

# Wiskunde D Online VWO 4, Summary Blok 1-7 and solved Problems

Mathematics Preparation for College, yOUlearn

Updated Blok 7 2025-12-11 Toegift a serie and a limit page 232

[www.leennoordzij.me](http://www.leennoordzij.me)

[Dr.I.noordzij@leennoordzij.nl](mailto:Dr.I.noordzij@leennoordzij.nl)

Summary of the PowerPoint Slides of the University of Groningen and the Wageningen Method (2015). A new edition of this method has been published in 2019.

These summaries were made for my granddaughter for her study Mathematics D Online, from 2016-2019. I supervised the theory, the homework and the tests. The Open University has supported me with this supervision.

<http://rug.nl>

<http://ou.nl>

<http://wageningse-methode.nl>

## Inhoudsopgave

|                                                                      |    |
|----------------------------------------------------------------------|----|
| Blok 1 Combinatorial Analysis and calculation rules.....             | 4  |
| Blok 1 Les 1. Wegendiagrammen, bomen en geordende grepen.....        | 4  |
| Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven. ....                            | 7  |
| Blok 1 Les 2 Roosters en ongeordende grepen.....                     | 11 |
| Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven. ....                            | 15 |
| Blok 1 Les 3 Het vaasmodel.....                                      | 19 |
| Voorbeelden met drie dobbelstenen.....                               | 22 |
| Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven. ....                            | 24 |
| Blok 1 Les 4 Combinatoriek en Rekenregels .....                      | 34 |
| Oefenen en uitgewerkte Oefenopgave.....                              | 38 |
| Blok 1 Toets Combinatoriek en Rekenregels.....                       | 41 |
| Blok 2 Logica.....                                                   | 43 |
| Blok 2 Les 1 definities en waarheidstabellen. Propositielogica ..... | 43 |
| Oefenen en uitgewerkte Oefenopgave.....                              | 47 |

|                                                         |     |
|---------------------------------------------------------|-----|
| Blok 2 Les 2 Bewijzen. Propositielogica.....            | 50  |
| Oefenen en uitgewerkte oefen opgave.....                | 54  |
| Blok 2 Les 3 Herleidingen. Propositielogica.....        | 55  |
| Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.....                | 61  |
| Blok 2 Les 4 Predicatenlogica .....                     | 65  |
| Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven. ....               | 68  |
| Blok 2 Toets Logica .....                               | 69  |
| Blok 3 Binomiale verdelingen.....                       | 71  |
| Blok 3 Les 1 Kans en combinatoriek .....                | 71  |
| Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven. ....               | 76  |
| Blok 3 Les 2 Verwachting.....                           | 81  |
| Oefenen en uitgewerkte Oefenopgave.....                 | 86  |
| Blok 3 Les 3 The Binomial Distribution.....             | 89  |
| Oefenen en uitgewerkte Oefenopgave.....                 | 93  |
| Blok 3 les 4 Cumulatieve binomiale kans .....           | 97  |
| Opmerkingen bij Les 4:.....                             | 99  |
| Oefenen en uitgewerkte Oefenopgave.....                 | 101 |
| Blok 3 Toets Binomial Distributions .....               | 104 |
| Blok 4 Analytische meetkunde, Analytical Geometry ..... | 107 |
| Blok 4 Les 1 Introductie analytische meetkunde .....    | 107 |
| Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven. ....               | 110 |
| Blok 4 Les 2 Lijnen .....                               | 113 |
| Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven. ....               | 117 |
| Blok 4 Les 3 Nog meer over lijnen .....                 | 121 |
| Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven. ....               | 124 |
| Blok 4 Les 4 Kwadratische vergelijkingen.....           | 127 |
| Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven. ....               | 130 |
| Blok 4 Toets Analytical Geometry .....                  | 134 |
| Blok 5 De normale verdeling .....                       | 136 |
| Blok 5 Les 1 De standaardafwijking.....                 | 136 |
| Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven. ....               | 142 |
| Blok 5 Les 2 De klokvorm en de normale verdeling .....  | 146 |
| Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven. ....               | 150 |

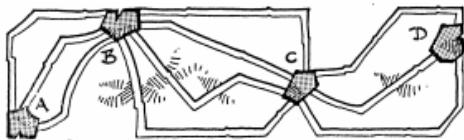
|                                                                               |     |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Blok 5 Les 3 De Z-waarde .....                                                | 154 |
| Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven. ....                                     | 159 |
| Blok 5 Les 4 De centrale limietstelling.....                                  | 161 |
| Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven. ....                                     | 165 |
| Toets De Normale Verdeling .....                                              | 167 |
| Blok 6 Inproduct .....                                                        | 171 |
| Blok 6 Les 1 Lijnen in de ruimte.....                                         | 171 |
| Oefenen en uitgewerkte oefenopgave. ....                                      | 175 |
| Blok 6 Les 2 Loodrechte stand en inproduct. ....                              | 178 |
| Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven. ....                                     | 183 |
| Blok 6 Les 3 Vergelijkingen van vlakken .....                                 | 186 |
| Oefenen en uitgewerkte Oefenopgave.....                                       | 190 |
| Extra: Het uitwendig product .....                                            | 194 |
| Blok 6 Les 4 Hoeken en inproduct.....                                         | 195 |
| Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven. ....                                     | 200 |
| Blok 6 Toets Inner Products .....                                             | 203 |
| 7 Discrete dynamische modellen .....                                          | 206 |
| Blok 7 Les 1 Dynamische systemen, Dynamical Systems .....                     | 206 |
| Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven. ....                                     | 209 |
| Blok 7 Les 2 Rijen , Series .....                                             | 215 |
| Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven. ....                                     | 217 |
| Een klassieke meetkundige reeks: De paradox van Achilles en de schildpad..... | 219 |
| Blok 7 Les 3 Iteratie, Iterative Processes.....                               | 220 |
| Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven. ....                                     | 223 |
| Blok 7 Les 4 Limieten, Limits .....                                           | 225 |
| Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven. ....                                     | 227 |
| Toets Reeksen, Iteratie en Limieten.....                                      | 230 |
| Epiloog Waarom de Samenvatting Online VWO 4? .....                            | 233 |
| Bijlage 1: De Standaardnormale Tabel. ....                                    | 234 |
| Bijlage 2: Webgrafiek op de GR.....                                           | 236 |

Tags: Analytical Geometry, Binomial Distributions, Combinatorial Analysis, Discrete Dynamical Modelling, Inner Product, Iteration, Limits, Logic, Normal Distribution, Outer Product, Permutations, Series, Mathematics, Open University, Wageningse Methode, Wiskunde D Online, Youlearn, VWO 4, Precollege

## Blok 1 Combinatorial Analysis and calculation rules

### Blok 1 Les 1. Wegendiagrammen, bomen en geordende grepen

- Wegendiagrammen:



Op hoeveel manieren kan je van A via B en C naar D komen?

3 wegen tussen A en B, 4 wegen van B naar C en 3 wegen van C naar D.

*Vermenigvuldigingsprincipe:*

*Het aantal routes van A via B te vermenigvuldigen met het aantal wegen van C naar D en het aantal wegen van B naar C.*

Dus:  $3 \times 4 \times 3 = 36$ .

- Boomdiagrammen:



Russische vlag

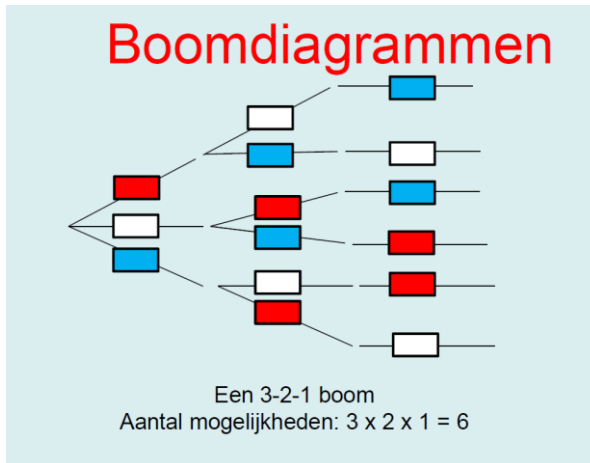


Nederlandse vlag

Hoeveel vlaggen kun je maken met 1 baan rood, 2 baan wit en 1 baan blauw?

Teken de vlag en denk in boven midden en onder. Begin boven met rood of wit of blauw.

Dus 3 mogelijkheden. Na deze keuze kan je er nog twee kiezen. Heb je dat gedaan, dan blijft er nog 1 mogelijkheid over.



Een ander voorbeeld:

Een vlag, 3 banen en 4 kleuren.

- Je mag elke kleur maar 1 keer gebruiken.

Aantal mogelijkheden:  $4 \times 3 \times 2 = 24$ .

- Je mag elke kleur opnieuw gebruiken.

Aantal mogelijkheden:  $4 \times 4 \times 4 = 64$ .

- **Faculteiten en Permutaties:** Op hoeveel manieren kun je van de letters t, u, r, f een (betekenisloos) woord maken?

Uitwerking:

Voor de eerste letter heb je 4 mogelijkheden, voor de tweede 3 mogelijkheden, voor de derde 2 mogelijkheden en voor de laatste 1 mogelijkheid.

Totaal:  $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ .

Notatie:  $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$  → Spreek uit als “4 faculteit”.

$4!$  Is het aantal verwisselingen (permutaties) waarmee je de 4 letters op volgorde kunt zetten.

Op de grafische rekenmachine zit een aparte optie:!

*Algemeen:*

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \dots \times 2 \times 1$$

*Afspraak:*

$$0! = 1.$$

- **Geordende grepen**

**Opgave 1** paragraaf 2:

In een bak zitten zeven ballen met op elke bal een getal van 1 tot en met 7. Nu gaan we op twee manieren rijtjes van drie ballen maken.

- Manier 1: trekken zonder terugleggen.

Pak een bal uit de bak en schrijf het cijfer van de bal op. Laat de bal uit de bak (trekken zonder terugleggen). Pak uit de bak met de overige 6 ballen opnieuw een bal. Schrijf het cijfer van die bal achter het cijfer van de eerste bal. Laat ook de tweede bal uit de bak. Pak ten slotte uit de overgebleven vijf ballen een derde bal en noteer het cijfer van die bal achter het tweede cijfer. Zo ontstaat een rijtje van drie cijfers.

- Manier 2: trekken met terugleggen.

Zelfde manier met de trekking en het noteren als bij manier 1, maar nu leg je steeds een getrokken bal weer terug in de bak. Op deze manier krijg je ook een rijtje van 3 cijfers.

a) Hoeveel verschillende rijtjes kun je krijgen op manier 1? Bij de eerste greep zijn er 7 ballen, daarna 6 en dan 5, dus  $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$  verschillende rijtjes. Een boomdiagram 7-6-5.

b) Hoeveel verschillende rijtjes kun je krijgen op manier 2? Nu zijn er bij iedere greep steeds 7 ballen, dus  $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$  mogelijkheden. Een wegendiagram 7-7-7.

*Trekken met terug leggen:*

→ *Geordende grepen met herhaling (terug leggen)*. Het begrip Greep: Stel je een vaas voor met 3 balletjes van gelijke grote en op elk balletje een andere letter. Bijvoorbeeld:  $a, b$  en  $c$ . Een greep is blindelings een balletje uit de vaas “trekken”. Geordend betekent dat je onderscheid maakt tussen bijvoorbeeld:  $a, b, c$  en  $b, a, c$ . De volgorde doet ertoe. Nota Bene: Dan ligt ongeordend ook vast: je maakt geen onderscheid tussen  $a, b, c$  en  $b, a, c$ . De volgorde doet er niet toe.

**Opgave 2 van paragraaf 2:**

**b)** Een alfabet met 26 letters.

Het aantal geordende grepen met herhaling

*Geordende greep met herhaling*

→ *Rekenen met machten*

Voorbeeld: Alfabet met 26 letters.

Hoeveel woorden van 4 letters kun je maken?

$26 \times 26 \times 26 \times 26 = 26^4 = 456976$  mogelijkheden. Een wegendiagram: 26-26-26-26.

*Trekken zonder terug leggen:*

→ *Geordende grepen zonder herhaling*

→ *Rekenen met faculteiten*

**Opgave 2 van paragraaf 2:**

**a)** Voorbeeld: Alfabet met 26 letters.

Hoeveel woorden van 4 letters kun je maken met elke letter verschillend?

$$26 \times 25 \times 24 \times 23 = \frac{26 \times 25 \times 24 \times 23 \times \dots \times 2 \times 1}{22 \times 21 \times \dots \times 2 \times 1} = \frac{26!}{22!} = \frac{26!}{(26-4)!} = 358800 \text{ mogelijkheden.}$$

Een boomdiagram: 26-25-24-23.

**b)** Zie bovenstaande samenvatting, onderaan pagina 5.

**c)** Bij een geordende greep van 4 letters met herhaling zitten ook permutaties van 4 letters die je ook zou verkrijgen bij geordende grepen zonder herhaling.

Van de  $26^4$  grepen met herhaling zijn er dus  $\frac{26!}{22!}$ , grepen zonder herhaling. Het deel van de geordende

grepen met herhaling welke permutaties zijn, is:  $\frac{\frac{26!}{22!}}{26^4} = \frac{\frac{26!}{22!}}{26^4} = 0.785$ .

**d)** Het aantal geordende grepen van 4 letters met herhaling (dus terug leggen) waarbij niet alle 4 de letters verschillend zijn:

Als in een greep de letters verschillende zijn, dan is het een permutatie. De overige letters zijn niet allemaal verschillend. Dit laatste aantal bedraagt:  $26^4 - \frac{26!}{22!} = 98176$ .

**e)** Het aantal permutaties van 13 uit 26:  $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \dots \cdot 15 \cdot 14$ .

Het aantal geordende grepen met herhaling van 13 uit 26:  $26^{13}$ .

*Algemeen*

Het aantal permutaties van  $k$  objecten uit een verzameling van  $n$  objecten kun je schrijven als:

-  $nPr k$  (zie grafische rekenmachine bij MATH en PRB)

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-(k-2)) \cdot (n-(k-1)).$$

#### Opgave 7: Voorbeeld

Toepassing van bovenstaande schrijfwijze van 3 uit 7.

$$= 7P3,$$

$$= \frac{7!}{(7-3)!},$$

$$= 7 \cdot (7-1) \cdot (7-2)$$

#### Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven.

##### Oefenopgave 12 van §1:

Een telefoonnummer bestaat uit de cijfers 1, 3, 5, 7, 8, 9. De volgorde van de cijfers ben je vergeten.

**a)** Hoeveel telefoonnummers zijn er mogelijk met deze cijfers? Alle cijfers worden gebruikt. Een probleem zonder teruglegging: 6 cijfers. Dus  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$  Mogelijkheden.

**b)** Hoeveel telefoonnummers zijn er mogelijk als je je herinnert dat het telefoonnummer begint met 35? Voor de overige 4 cijfers met de volgorde worden bepaald. Weer het probleem zonder teruglegging, maar nu met 4 cijfers. Dus:  $4!$  Mogelijkheden.

**c)** Hoeveel telefoonnummers zijn er met de cijfers 1, 1, 3, 5, 7, 8? Let op: twee dezelfde cijfers. Met permutaties, dus zonder terugleggen, neemt het aantal mogelijkheden met een factor 2 af. Of je met de eerste 1 begint of met de tweede doet er niet toe: er is geen verschil. Het aantal mogelijkheden wordt:  $6!/2$ .

Je kan ook voor een andere aanpak kiezen vervang de eerste 1 door 1a en de tweede 1 door 1b. Je hebt dan weer 6 cijfers en  $6!$  Mogelijkheden. Laat nu de a en de b weg en je ziet dat je twee keer dezelfde telefoonnummers hebt, met als resultaat  $6!/2$  mogelijkheden.

**d)** Welke twee telefoonnummers met 1, 3, 5, 7, 8, 9 horen op deze manier bij het nummer 351178?

Nota bene: "op deze manier" heeft betrekking op c). Dat wil zeggen, als je alle cijfers wil gebruiken zul je een 1 vervangen door de 9. Dus: 351978 of 359178.

**e)** Welk nummer met de cijfers 1, 1, 3, 5, 7, 8 hoort bij het nummer 158793?

Vervang de 9 in 158793 door een 1 → 158713

**f)** Er is nog een nummer met de cijfers 1, 3, 5, 7, 8, 9 dat hoort bij 158713.

Vervang nu de eerste 1 door een 9: 158713 → 958713.

In d), e), en f), hebben we een koppeling gemaakt tussen de telefoonnummers met de cijfers 1, 1, 3, 5, 7, 8 en de telefoonnummers met de cijfers 1, 3, 5, 7, 8, 9. Bij elk telefoonnummer van de eerste soort- 1, 1, 3, 5, 7, 8- horen twee telefoonnummers van de tweede soort- 1, 3, 5, 7, 8, 9. Er zijn dus half zo veel nummers van de eerste soort als van de tweede soort. Het aantal nummers van de eerste soort is:  $\frac{6!}{2} = \frac{720}{2} = 360$ .

**g)** Voorbeeld van een koppeling tussen de telefoonnummers met de cijfers 1, 3, 5, 1, 1, 7, en telefoonnummers met de cijfers 1, 3, 5, 7, 8, 9. Er zijn 3 posities voor de cijfers 1, 8, 9. Zonder teruglegging:  $3!$  Permutaties. Voor telefoonnummers met de cijfers 1, 3, 5, 1, 1, 7, zijn  $1/6$  minder mogelijkheden dan voor telefoonnummers met de cijfers 1, 3, 5, 7, 8, 9.

**h)** Nog een voorbeeld van een koppeling en wel tussen de telefoonnummers met de cijfers 1, 1, 1, 3, 5, 7, en telefoonnummers met de cijfers 1, 3, 5, 7, 8, 9.

Wat is nu de koppeling? Er zijn 3 posities voor de cijfers 1, 8, 9. Zonder teruglegging:  $3!$  Permutaties. Voor de telefoonnummers 1, 1, 1, 3, 5, 7, zijn er  $1/6$  minder mogelijkheden dan voor telefoonnummers met de cijfers 1, 3, 5, 7, 8, 9.

**i)** Hoeveel telefoonnummers zijn er met de cijfers 1, 1, 3, 3, 5, 7? We maken weer gebruik van de koppeling met de cijfers 1, 3, 5, 7, 8, 9, waarvan we weten dat er  $6!$  Mogelijkheden zijn. Er zijn nu 2 keer 2 mogelijkheden: twee voor de 1 en twee voor de 3.

Het gevolg hiervan is dat het aantal mogelijkheden voor de cijfers 1, 1, 3, 3, 5, 7, met een factor 4 wordt beperkt ten opzichte van de cijfers 1, 3, 5, 7, 8, 9:  $\frac{6!}{4} = \frac{720}{4} = 180$ .

Toelichting voor de cijfers 1, 1, 3, 3, 5, 7. Vervang een 1 door een 8. Dat kan twee keer. Vervang een 3 door een 9. Dat kan ook twee keer.

#### Opgave 6 paragraaf 2:

a) Het aantal permutaties van 4 uit 9 kun je berekenen met de Grafische rekenmachine:  $nPr$ .

De andere manier is direct uit rekenen:  $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ .

b) Met faculteiten:  $9!/5!$ , want:  $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \frac{5!}{5!} = \frac{9!}{5!}$ .

c) Het aantal permutaties van 13 uit 26 uitgedrukt in faculteiten:

$$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \dots \cdot 14 = \frac{26 \cdot 25 \cdot \dots \cdot 1}{13 \cdot 12 \cdot \dots \cdot 1} = \frac{26!}{13!}.$$

Het aantal permutaties van 20 uit 26 kun je nu direct opschrijven: maar let op, door uitschrijven wordt duidelijk dat het aantal **niet**  $\frac{26!}{20!}$  is, **maar**  $\frac{26!}{6!}$ . De fout  $\frac{26!}{20!}$ , kan ontstaan door het voorbeeld onder met 13 uit 26 permutaties.

Maar ja, 13 is de helft van 26. Dus bij twijfel: de permutaties uitschrijven. Controleer maar met de Grafische Rekenmachine.

d)  $k$  is een getal tussen 1 en 26.

Het aantal permutaties van  $k$  uit 26 vind je uit de voorbeelden onder c). We schrijven het nog eens uit:

$$26 \cdot 25 \cdot \dots \cdot (26 - k + 1) = \frac{26 \cdot 25 \cdot \dots \cdot 1}{[(26-k) \cdot \dots \cdot 1]} = \frac{26!}{(26-k)!}.$$

e) We passen bovenstaande formule voor het aantal permutaties van 26 uit 26 toe:  $\frac{26!}{0!}$ .

Met de afspraak  $0! = 1$ , wordt  $\frac{26!}{0!} = 26!$ .

#### Opgave 8 paragraaf 2:

A heeft op maandag de eerste zeven uur les, zonder tussenuur. A heeft die dag de vakken DU, GS, LO, MU, NA, NE, en WI.

a) Het aantal mogelijke roosters voor A: Permutaties, de vakken kunnen op  $7!$ , manieren op een rij worden gezet.

b) Het aantal roosters als NE eerder dan GS komt.

Er zijn twee mogelijkheden: GS komt eerder dan NE, of NE komt eerder dan GS. Het betekent voor het geval dat NE eerder komt dan GS er  $\frac{7!}{2}$ , manieren zijn.

c) Het aantal roosters als NE en WI voor de kleine pauze komen, GS en LO tussen de twee pauzes in, en DU, MU en NA na de grote pauze.

- NE en WI voor de kleine pauze: twee mogelijkheden  $2!$ ,

- GS en LO tussen de pauzes: twee mogelijkheden  $2!$ ,

- DU, MU en NA na de grote pauze; zes mogelijkheden  $3!$ .

Het totale aantal mogelijkheden  $2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$ .

#### Opgave 9 Een loterij paragraaf 2

Tijdens een fancy fair zijn er honderd loten verkocht, genummerd 1 tot en met 100. Bij de loterij kun je een eerste, een tweede, een derde en een vierde prijs winnen. Een trekkingslijst bestaat uit vier nummers: het nummer van de eerste prijs, het nummer van de tweede prijs en ook van de derde en de vierde prijs.

a) Het aantal trekkingslijsten: het aantal permutaties is 4 uit 100  $\Rightarrow \frac{100!}{(100-4)!} = 94109400$ .

Let op: gebruikmaken van de Grafische Rekenmachine betekent dat je 100 en 4 moet invoeren.

b) Het aantal trekkingslijsten met alle vier de nummers oneven: het aantal oneven nummers bedraagt 50.

Het aantal lijsten wordt dan:  $\frac{50!}{(50-4)!} = 5527200$ .

c) Het aantal trekkingslijsten waarbij één van de vier nummers oneven is.

- even nummers:  $\frac{50!}{(50-3)!}$ .

- oneven nummer: er zijn 50 mogelijkheden. Er zijn 4 prijzen, dus vier posities voor het oneven nummer.

Totaal  $\frac{50!}{(50-3)!} \cdot 50 \cdot 4 = 23520000$ .

**Opgave 10:** Nummerborden paragraaf 2

De nummerborden in Nederland van auto's uit een bepaalde tijdsperiode zijn van de vorm LL-LL-CC (eerst twee letters, dan weer twee letters en daarna twee cijfers. De letters A, C, E, I, M, O, Q, U en W worden niet gebruikt. Verder kunnen alle letters voorkomen. Van de cijfers wordt 0 tot en met 9 gebruikt. Twee voorbeelden: NL-BB-87 en YK-XV-33.

**a)** Het aantal mogelijke nummerborden.

Voor de 17 letters die gebruikt mogen worden geldt trekking met teruglegging: 4 posities voor de letters die gebruikt mogen worden:  $17^4$  mogelijkheden.

Voor de 10 cijfers zijn er twee posities en trekken met terugleggen:  $10^2$  mogelijkheden.

Totaal aantal mogelijkheden:  $10^2 \cdot 17^4$ .

**b)** Het nummerbord van een bedrijfswagen begint met een B of een V, dus twee mogelijkheden.

Het aantal mogelijke nummerborden voor bedrijfswagens.

Van de vier letters ligt er één vast. Hiermee wordt het aantal mogelijkheden:  $2 \cdot 10^2 \cdot 17^3$ .

**c)** Het aantal mogelijke nummerborden waarbij alle letters en cijfers verschillend zijn.

Mogelijkheden voor de letters: trekken zonder terugleggen  $\Rightarrow \frac{17!}{(17-4)!}$ .

Voor de cijfers  $\Rightarrow \frac{10!}{(10-2)!}$ .

Totaal aantal mogelijkheden:  $\frac{17!}{(17-4)!} \cdot \frac{10!}{(10-2)!}$ .

**d)** Neem 25 auto's.

Het aantal van deze auto's dat een nummerbord heeft waarvan alle letters en cijfers verschillend zijn.

Het gaat hier om de verwachting, dus bijvoorbeeld 40% van de 25 auto's voldoen aan het gevraagde aantal auto's waarvan alle letters en cijfers verschillend zijn.

Onder c) hebben we het aantal mogelijke nummerborden, waarbij alle letters en cijfers verschillend zijn, bepaald.

Onder a) is het aantal mogelijke nummerborden bepaald. De verhouding van deze mogelijkheden geeft dus het percentage van het totale aantal mogelijkheden:

$$\left[ \frac{17!}{(17-4)!} \cdot \frac{10!}{(10-2)!} \right] / (10^2 \cdot 17^4).$$

Dit kun je verder uitwerken:  $\frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 9}{10 \cdot 17^3} \cong 0.61$ .

Dus bij  $0.61 \cdot 25 \cong 15$  auto's verwacht je een nummerplaat met verschillende cijfers en letters.

**e)** Het aantal nummerborden beginnend met BB en eindigend met 00.

Merk op dat een nummerbord met BB-BB-00 tot de mogelijkheden behoort.

Voor de letters houden we twee posities over voor 17 letters en één cijfer combinatie.

Het aantal mogelijke nummerborden is:  $17^2$ .

**Opgave 11** de trein § 2

A heeft een treintje met 6 plaatsen. De reizigers zijn poppetjes. Er mogen, plaatsen onbezet blijven. Maar vol is vol.

**a)** Aantal mogelijkheden om zes verschillend gekleurde poppen te plaatsen, zonder "terug leggen".

Het aantal mogelijkheden is  $6!$ .

**b)** Aantal mogelijkheden om zes poppen van dezelfde kleur te plaatsen.

Hiervoor is slechts 1 mogelijkheid.

Opmerking: A zou kunnen besluiten om van deze poppen er 0, 1, ..., 5, 6, mee te nemen. Dus de keuze is dan: wel of niet. En dat kan 6 keer. Aantal mogelijkheden:  $2^6$

**c)** Aantal mogelijkheden voor één rode en één blauwe pop die meereizen.

Het aantal is  $6 \cdot 5$  of ook geschreven als:  $\frac{6!}{(6-2)!}$ .

**d)** Aantal mogelijkheden wanneer er twee rode poppen meereizen.

Eén rode pop:  $6!$  mogelijkheden. Met de tweede rode pop erbij:  $\frac{6!}{2!}$  mogelijkheden. Maar er is geen onderscheid

tussen de twee rode poppen  $\Rightarrow \left[ \frac{6!}{(6-2)!} \right] / 2$ .

**e)** Aantal mogelijkheden met blauwe en rode poppen, waarbij er meer rode dan blauwe poppen meereizen.

- 6 rood, 0 blauw: 1 mogelijkheid.

- 5 rood, 1 blauw: begin met blauw, daarvoor heb je dus 6 mogelijkheden. De plaatsen van de rode poppen liggen

daarmee vast.

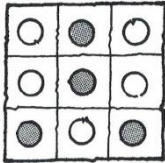
- 4 rood, 2 blauw: begin met twee blauw, het aantal mogelijkheden hebben we al onder d) uitgerekend

$\left[ \frac{6!}{(6-2)!} \right] / 2$  mogelijkheden. De posities van de vier rode popen liggen daarmee vast,

Totaal aan tal mogelijkheden

$$1 + 6 + \frac{\left[ \frac{6!}{(6-2)!} \right]}{2} = 22 \text{ mogelijkheden.}$$

#### Opgave 12 §2:



Op een (spellen)bord met negen velden, 3 bij 3, worden 5 witte en 4 donkere schijven geplaatst.

**a)** Hoeveel mogelijkheden zijn er om alle schijven op het bord te plaatsen?

Negen velden en negen schijven: Als alle donkere schijven op het bord geplaatst zijn is er nog maar 1 mogelijkheid voor de witte schijven. En andersom.

Permutaties, met de witte schijven zonder teruglegging:

$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$  mogelijkheden. Dat zijn dus 15120 mogelijkheden. Dit kun je ook schrijven als:  $9!/4!$ . Maar dit is te veel. De schijven zijn niet te onderscheiden. Zie ook de vorige oefen opgave met de telefoonnummers waar dezelfde cijfers in voorkomen. Met de 5 schijven hebben we dus vijf dezelfde schijven. Er zijn in dit geval dan  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 (= 5!)$  permutaties die tot dezelfde verdeling aanleiding zijn. Hieruit volgt dat het totale aantal mogelijkheden met een factor 120 afnemen. Conclusie: Het totale aantal mogelijkheden is  $15120/120=126$ .

In faculteiten uitgedrukt:  $\frac{9!}{5! \cdot 4!}$ . Of:  $\frac{9!}{5! \cdot (9-5)!}$ . Wat valt nu op in deze laatste schrijfwijze? Wel,

$$\frac{9!}{5! \cdot (9-5)!} = \frac{9!}{4! \cdot (9-4)!}. \text{ Toch geen verrassing? Je moet hetzelfde resultaat vinden als je met de witte schijven was}$$

begonnen. Overigens wordt voor de schrijfwijze  $\frac{9!}{5! \cdot (9-5)!}$ , de notatie  $\binom{9}{5}$  gebruikt. J zult deze notatie vaker gebruiken.

**b)** Hoeveel mogelijkheden zijn er als er twee witte schijven op de bovenste rij van 3 vlakken staan?

Opgelet: er staan dan 3 witte schijven op de overige 6 velden van het bord.

Op de bovenste rij heb je 3 mogelijkheden om 1 donkere schijf te plaatsen:  $3!/2$ .

Voor de rest van het spellen bord heb je nog 3 velden van de 6 velden om de resterende 3 donkere schijven te plaatsen. In feite heb je dit probleem al onder a) opgelost.

Resultaat van de 6 overige velden:  $\frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = 20$  mogelijkheden.

Het totale aantal mogelijkheden is:  $3 \times 20 = 60$  mogelijkheden.

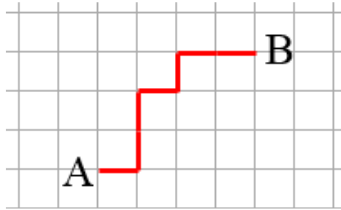
- Huiswerk. Bij opgave 11 van §1: bij c) hooguit weglaten, bij e) “die” heeft betrekking op rijtjes met een lengte 8.

Maak de opgaven van paragraaf 1 en 2 (van de Wageningse Methode, 2015) en in ieder geval:

- Opgaven 6, 7, 10, 11, en 13 van §1.

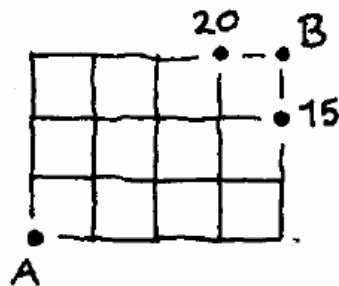
## Blok 1 Les 2 Roosters en ongeordende grepen

- Kortste routes in een rooster

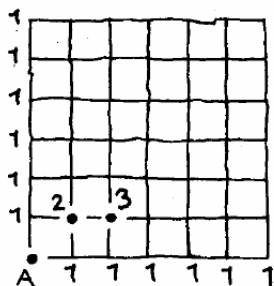


In de figuur is een kortste route getekend van A naar B. Er zijn meer kortste routes van A naar B. Hoeveel zijn dat er? Hoe bereken je dat? Wat bereken je ermee?

Het optelprincipe:



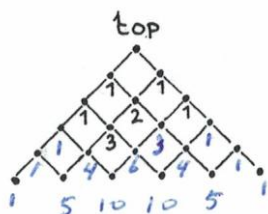
Vanaf A zijn er 20 kortste routes naar het punt links van B en 15 kortste routes naar het punt onder B. Het aantal kortste routes van A naar B is dus  $20 + 15 = 35$ . Dus tellen.



Een getal bij een kruispunt geeft het aantal kortste routes van A naar dat kruispunt. Met het optelprincipe kun je zo het rooster vullen.

**Opgave 3** paragraaf 3, een rooster:

Het rooster, zie volgende bladzijde, is gedraaid in vergelijking met het bovenstaand rooster.



Bij een aantal kruispunten staat het aantal kortste routes van de top

naar dat kruispunt. Bij de onderste rij kruispunten is het aantal kortste route erbij geschreven. Het rooster kun je nog veel verder voortgezet denken. De getallen op de kruispunten leiden ons naar de driehoek van Pascal.

- De driehoek van Pascal.

**De driehoek van Pascal**

|   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |   |   |   |
|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|---|---|---|
|   |   |   |   |    |    |    | 1  |    |    |    |   |   |   |
|   |   |   |   |    |    | 1  |    | 1  |    |    |   |   |   |
|   |   |   |   |    | 1  |    | 2  |    | 1  |    |   |   |   |
|   |   |   |   | 1  |    | 3  |    | 3  |    | 1  |   |   |   |
|   |   |   | 1 |    | 4  |    | 6  |    | 4  |    | 1 |   |   |
|   |   | 1 |   | 5  |    | 10 |    | 10 |    | 5  |   | 1 |   |
|   | 1 |   | 6 |    | 15 |    | 20 |    | 15 |    | 6 | 1 |   |
| 1 |   | 7 |   | 21 |    | 35 |    | 35 |    | 21 |   | 7 | 1 |

Tel zo:

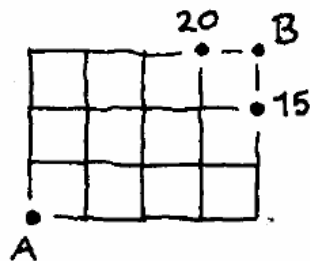
- de bovenste 1 is de nulde (0)rij .

- In een rij krijgt de linker 1, de plaats 0.

Dus de achtste rij: 1, 7(= 1 + 6), 21(= 6 + 15), 35(= 15 + 20), 35, 21, 7, 1.

Symmetrie.

- Pascal en het aantal kortste routes



Kortste Route van A naar B

- van (0,0) naar (4,3), de coördinaten.

- 7 stappen: 4 naar rechts en 3 naar boven. In willekeurige volgorde: bijvoorbeeld: 3 naar rechts, 1 naar boven, 1 naar rechts en 2 naar boven. Met de GR: optie nCr in

menu PRB onder de Math knop  $7 \text{ nCr } 3 = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$ .

Aantal kortste routes van A naar B met de driehoek van Pascal

- vierde positie, of de derde plaats, op de zevende rij. Nb: eerste positie is plaats 0.

**Opgave 6**, paragraaf 3:

a) Kortste route van (0,0) naar (14,6)

- 20 stappen: 14 naar rechts en 6 naar boven, in willekeurige volgorde.

Aantal kortste routes van A naar B

- veertiende plaats(positie) op de twintigste rij van Pascal.

Notatie, die je al eerder bent tegengekomen, zie hierboven in the summary,

- combinatie getal:  $\binom{20}{6} = \frac{20!}{6!(20-6)!}$ , met Grafische Rekenmachine (GR) 20, Math, PRB, 3: nCr 6, ENTER

- zeg: "20 boven 6". Ook wel: 20 over 6 genoemd.

Resultaat:  $\binom{20}{6} = 38700$  stappen.

**b)** Je kunt ook letten op het aantal stappen dat je naar rechts gaat: dat zijn er 14:

$\binom{20}{14} = 38700$ . Dus  $\binom{20}{6} = \binom{20}{14}$ . Dat zie je dus terug in de driehoek van Pascal.

Verder:  $\binom{20}{6} = \frac{20!}{6!(20-6)!} = \frac{20!}{14!(20-14)!} = \binom{20}{14}$ .

**c)**  $\binom{20}{7}$  is het aantal kortste routes van (0,0) naar het punt B.

De coördinaten van B:  $x + 7 = 20$ . De coördinaten zijn: (13,7). (7,13) mag ook.

**d)** De twee combinatie getallen voor de routes van (0,0) naar (10,8) zijn:

$\binom{18}{8}$  en  $\binom{18}{10}$ . Gelet op de definitie zijn de voorgaande twee combinatie getallen gelijk.

**e)** Het getal  $n \neq 7$ , waarvoor geldt:  $\binom{16}{n} = \binom{16}{7}$ , is  $16 - 7 = 9$ .

**f)** Het combinatie getal dat hoort bij de kortste route van (2,3) naar (8,6).

Het start punt is nu niet (0,0), maar (2,3). Je kunt dus bedenken dat we de oorsprong verschuiven van (0,0) naar (2,3). Dat betekent (8,6) wordt (6,3). Het combinatie getal is  $\binom{9}{3}$  of  $\binom{9}{6}$ .

Zoals je kunt controleren met de GR, heb je van (0,0) naar (8,6) veel meer mogelijkheden dan van (2,3) naar (8,6).

**Nota Bene:** Roosters kun je goed gebruiken om lastige telproblemen op te lossen.

## • Ongeordende grepen

**Opgave 1 § 4:**

**a)** Keuze CD's.

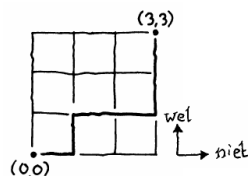
Je kiest 3 cd's uit een aanbod van 6. Je keuzes kun je op schrijven op een systematische wijze opschrijven. De zes CD's zijn: B, C, H, M, S en V.

Beginnen met B en C en achtereenvolgens H, M, S, V. Dan B en H en achtereenvolgens M, S, V. Enz.

Heb je dit uitgeschreven, dan vind je 20 mogelijke combinaties.

Bij het kiezen van 3 CD's moet je zes beslissingen nemen: voor elke CD moet je kiezen of je deze wel of niet neemt. Elke keuze betekent een stap in een wel niet rooster. Kies je de CD wel, dan ga je een stap naar boven, kies je de CD niet, dan ga je naar rechts. Elke keuze is een stap van het ene roosterpunt naar het andere. Je start in (0,0) en eindig je in (3,3).

**b)** De volgorde van je keuze doet er niet toe. Dit is een ongeordende greep, in dit geval zonder herhaling.



Het aantal mogelijke keuzes dat je kunt maken is dus het aantal kortste routes van (0,0) naar (3,3). Dat

is:  $6nC3 = \binom{6}{3} = 20$ .

**Opgave 2 § 4 de boeken club:**

Als lid van een boekenclub mag je drie boeken uitkiezen, Je hebt de keuze uit twintig verschillende titels.

Bij een keuze van 3 uit 20 kun je weer gebruik maken van een rooster waar je de stappen in weergeeft.

**a)** Het aantal stappen in het rooster waar de route uit bestaat.

Je moet 20 keer een keuze maken: dus 20 stappen. Als je een boek kiest maak je een stap naar boven. Dat kan dus 3 keer. Als je een boek niet kiest maak je een stap naar rechts in het rooster. Dat kan 17 keer. Op deze wijze eindig je in het punt (3,17) van het rooster.

**b)** Het aantal keuzemogelijkheden van 3 uit 20.

Het combinatie getal  $\binom{20}{3} = 1140$ .

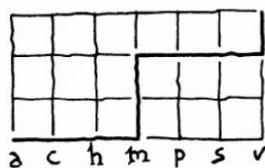
Nota Bene: het is instructief om vergelijkingen te maken. Denk bijvoorbeeld aan een bord met 20 vlakken. Je mag 3 zwarte en 17 witte schijven verdelen. Zie Blok 1 Les 1 **opgave 12** paragraaf 2.

Op deze wijze vind je voor het aantal mogelijkheden:  $\frac{20!}{(20-3)! 3!}$ . Je deelt weer door 3!, omdat de drie

zwarte schijven niet te onderscheiden zijn. Of, hetzelfde geldt voor de witte schijven:  $\frac{20!}{(20-17)! 17!}$ .

Samengevat: Het combinatiegetal  $\binom{20}{3}$ .

**Opgave 5** de ijssalon



Alvorens aan een dergelijk vraagstuk te beginnen, is het verstandig na te gaan wat voor soort keuzevraagstuk dit is: geordende greep of ongeordende greep. Met herhaling of zonder herhaling.

Met de ijsjes is het een ongeordende greep: er is geen verschil tussen een ijsje met (a, c, h) of (c, a, h).

Als je een boom zou tekenen, zie je direct dat je met de ijssalon dubbeltelingen krijgt als je, bijvoorbeeld, a, c, h of c, a, h tekent in de boom.

In de ijssalon kan je kiezen uit verschillende ijssoorten, waarvan de eerste letter aangegeven is in bovenstaand rooster. Het aantal bolletjes is verticaal weergegeven.

**a)** Uit hoeveel verschillende ijsjes kan worden gekozen als de drie gekozen bolletjes verschillende smaken hebben? Dus zonder herhaling. Een wel niet rooster.

Met 3 verschillende bolletjes: naar rechts, bijvoorbeeld tot c, 1 omhoog, naar rechts tot m, 1 omhoog, naar rechts tot s, en weer 1 omhoog.

Er worden 3 verschillende gekozen uit 7, dat kan op  $\binom{7}{3} = 35$ , verschillende manieren.

**b)** Weer kiezen van 3 verschillende bolletjes; p valt af. Hazelnoot, h, wordt gekozen. Er blijven er nog 2 over: 2 kiezen uit 5  $\rightarrow \binom{5}{2} = 10$ .

**c)** Een smaak kan ook meerdere keren gekozen worden. Bijvoorbeeld 3 bolletjes van p.

Voor een ijsje met drie bolletjes heb je een keuze van 3 uit 7. De volgorde doet er niet toe. Ook kun je 3 bolletjes van dezelfde smaak kiezen.

Dit is een voorbeeld van een **ongeordende greep met herhaling**.

Nota bene: In bovenstaand rooster zie je de keuze 2 x mokka(m) en 1 x vanille(v). Dus 2 x m en 1 x v.

Het gaat in dit geval om het aantal kortste routes van (a,0) naar (v,3). Elke kortste route heeft 9 stappen

Het aantal kortste routes is  $9 \text{ nCr } 3 = \binom{9}{3} = 84$ .

In het rooster: naar rechts tot p en dan 3 omhoog en weer naar rechts.

Met drie verschillende bolletjes is het aantal mogelijkheden dus minder. Zie onder a).

**d)** Hoeveel verschillende ijsjes van drie bolletjes zijn er mogelijk als elke smaak meerdere keren mag voorkomen? Bijvoorbeeld 3 keer dezelfde smaak: 3 omhoog en in totaal 6 naar rechts:  $\binom{9}{3} = 84$ . Door te tellen zie je ook dat bij 2 dezelfde het aantal mogelijkheden  $\binom{9}{3}$  is. Het resultaat onder c).

e) Hoeveel verschillende ijsjes van drie bolletjes zijn er mogelijk als je minstens 1 h wil en geen p?

Zet voor het gemak de h vooraan en de p achteraan. Je gaat direct 1 omhoog, dan heb je 1 h gekozen. Daarna bijvoorbeeld 5 naar rechts en 2 omhoog: dus van het punt (0,1) naar (5,3). Je kan niet meer p kiezen. Deze route is hetzelfde als van het hoekpunt linksonder in het rooster (0,0) naar het punt (5,2) →  $\binom{7}{2} = 21$ .

Het rooster helpt je bij het tellen. Want dat kan soms lastig zijn: Neem het geval waar je bijvoorbeeld twee of drie gelijke bolletjes hebt. Je denkt misschien dat je dan de combinatie  $\binom{10}{3} = \binom{7+3}{3}$  hebt, terwijl het  $\binom{9}{3} = \binom{6+3}{3}$  moet zijn. Hoe zit dat? Voor de verklaring is het rooster nuttig. Er zijn 7 smaken en het gaat om 3 bolletjes waarbij herhaling mogelijk is. Dat betekent dat er niet 3 bij de 7 geteld wordt maar 2. Want 1 bolletje met de smaak die herhaald kan worden zit er al bij. Dan is het handig, om geen fouten te maken, om 9 bolletjes op de horizontale as uit te zetten. De twee extra bolletjes kunnen dan steeds een andere smaak invulling krijgen.

## • Samenvatting

**Optelprincipe:**

**De driehoek van Pascal**

|   |   |    |    |    |    |   |   |
|---|---|----|----|----|----|---|---|
| 1 |   |    |    |    |    |   |   |
| 1 | 1 |    |    |    |    |   |   |
| 1 | 2 | 1  |    |    |    |   |   |
| 1 | 3 | 3  | 1  |    |    |   |   |
| 1 | 4 | 6  | 4  | 1  |    |   |   |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5  | 1  |   |   |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6  | 1 |   |
| 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 |

**Tel zo:**

- De bovenste 1 is de 0-de rij.
- In een rij krijgt de linker 1 plaats 0.
- $7nC2 = 7nC5 = \binom{7}{2} = \binom{7}{5} = 21$

**Ongeordende grepen ZONDER herhaling:**

- Bereken je met een 'wel/niet rooster', waarin je de keuzemogelijkheden in een bepaalde volgorde 'denkt'.

**Ongeordende grepen MET herhaling:**

- Bereken je met een aangepast 'aantal-rooster'.
- Horizontaal zet je de te kiezen elementen
- Verticaal zet je het aantal dat je van een element kiest.

## Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven.

- De Driehoek van Pascal en het binomium van Newton.

### Opgave 4, § 3

De driehoek van Pascal kun je oneindig voortzetten.

a) De achtste rij van de driehoek van Pascal.

Begin met 1 op plaats 0, dan tel je 1 en 7 uit de vorige rij op en zo vind je het getal 8. Zo tel je de twee opeenvolgende getallen in de zevende rij bij elkaar op. Zie de getallen voor de zevende rij in bovenstaande samenvatting. Dus,  $7 + 21 = 28$ , enz. Zo vind je 56, 70, 56, 28, 8, en sluit af met 1.

b) Het grootste getal in de negende rij.

Je hebt de achtste rij al. Dus:  $56 + 70 = 126$ , en dat getal komt twee keer voor. Om te onthouden: bij de oneven rij komen het grootste getal twee keer voor.

c) Het grootste getal in de 10<sup>e</sup> rij.

Je hebt het grootste getal in de 9<sup>e</sup> rij: 126. Dat getal komt twee keer voor. Gevolg: het grootste getal in de 10<sup>e</sup> rij is dus:  $126 + 126 = 252$ .

d) Het getal op plaats 4 in de 10<sup>e</sup> rij.

Je hebt alle informatie: 8<sup>e</sup> rij zie a), dan reken je de 9<sup>e</sup> rij uit. De eerste 5 getallen in die rij zijn: 1, 9, 36, 84, 126. Hieruit volgen de eerste 5 getallen in de 10<sup>e</sup> rij: 1, 10, 45, 120, 210. Het 4<sup>e</sup> getal is dus 210.

### Opgave 5, Paragraaf 3:

Zie ook bovenstaand voorbeeld: Pascal en het aantal kortste routes.

Voor de driehoek van Pascal zie ook bovenstaande samenvatting.

Een voorbeeld van het aantal kortste routes in het rooster van (0,0) naar (4,3): Je komt uit op het aantal 35. Elke kortste route bestaat uit 7 stappen (een stap is 1 naar boven of 1 naar rechts). Van de 7 stappen moet je er 3 naar boven doen en 4 naar rechts. Het aantal kortste routes vind je in de driehoek van Pascal in de 7<sup>e</sup> rij op de derde plaats; omdat je van de 7 stappen er 3 naar boven gaat. Je kunt het getal ook vinden op plaats 4; je gaat immers 4 stappen naar rechts in het rooster.

Dus:  $\binom{7}{3} = \binom{7}{4}$ .

**a)** In welke rij en op welke plaatsen kun je het aantal kortste routes van (0,0) naar (5,2) vinden? Hoeveel routes zijn er?

Je maakt 7 stappen → 7<sup>e</sup> rij. Je gaat 5 naar rechts en 2 naar boven, dus het aantal kortste routes vind je op plaats 2 en 5 in rij 7:  $\binom{7}{2} = \binom{7}{5} = 21$ .

**b)** Hoeveel kortste routes zijn er van (0,0) naar (4,6)?

Kijk in rij 10 op plaats 4 of 6. Je moet wel de driehoek van Pascal uitbreiden naar 10 rijen.

Of gebruik maken van de Grafische Rekenmachine (GR) met de optie *nCr* in het menu PRB onder de MATH-knop. Dus  $\binom{10}{6} = \binom{10}{4} = 210$ .

### Opgave 7 paragraaf 3 kortste routes:

**a)** Kortste routes van (0,0) naar (7,3).

Het aantal kortste routes zijn:  $\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = 120$ .

**b)** Kortste routes van (7,3) naar (10,8).

Verschuif (0,0) naar (7,3)  $\Rightarrow (10 - 7, 8 - 3) = (3,5)$ .

Het aantal kortste routes is:  $\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 56$ .

**c)** Kortste routes van (0,0), via (7,3), naar (10,8).

Eerst naar (7,3):  $\binom{10}{3} = 120$ , routes of mogelijkheden.

Dan van (7,3) naar (10,8):  $\binom{18-10}{8-5} = \binom{8}{3} = 56$ , routes of mogelijkheden.

Om het totale aantal te vinden worden de mogelijkheden voor beide routes met elkaar vermenigvuldigd.

Denk ook maar aan het wegendiagram. Dus:  $\binom{10}{3} \cdot \binom{8}{3} = 6720$ , routes of mogelijkheden.

**d)** Kortste routes van (0,0), via (7,3) naar (10,8) en vervolgens via (5,5) naar (0,0).

Keep in mind: van (10,8) naar (5,5) is hetzelfde als van (5,5) naar (10,8) en van (5,5) naar (0,0) is hetzelfde als van (0,0) naar (5,5).

Van (0,0), via (7,3) naar (10,8) hebben we al berekend onder c).

Nu nog van (5,5) naar (10,8)  $\Rightarrow$  is gelijk aan: van (0,0) naar (10-5,8-5)  $\Rightarrow \binom{8}{3} = 56$ , kortste routes of mogelijkheden.

En van (0,0) naar (5,5)  $\Rightarrow \binom{10}{5} = 252$ .

Het totale aantal kortste routes is  $6720 \cdot 56 \cdot 252 = 94832640$ .

Wat valt op?

- (7,3) naar (10,8), wordt van (0,0) naar (3,5),

- (5,5) naar (10,8), wordt van (0,0) naar (5,3).

Maar pas op: van (0,0) naar (7,3) is ongelijk aan van (0,0) naar (5,5).

#### Opgave 4, paragraaf 4 Een kaartspel

Bij een bepaald kaartspel gebruik je niet alle kaarten; van elke kleur/soort (schoppen, harten, ruiten en klaveren) gebruik je acht kaarten: 7, 8, 9, 10, B, V, H, A. In totaal gebruik je dus 32 kaarten. Iedere speler krijgt vier kaarten.

**a)** Het aantal verschillende combinaties van 4 kaarten voor een speler(m/v):

Uit 32 kaarten worden 4 kaarten gekozen. Dit komt overeen met 32 stappen in een rooster, waarvan 4 naar boven en 28 naar rechts in het rooster. Dus elke combinatie die de speler krijgt is een 32-staps route in een rooster van (0,0) naar (28,4). Het aantal combinaties is:  $\binom{32}{4} = 35960$ .

**b)** In het rooster teken je op de horizontale as de soorten kaarten achter elkaar. Maar let op. Op de horizontale as staan 28 stappen/kaarten. Er zijn er 32. Dat zit zo: Als er een kaart gekozen is, een stap verticaal, is er een kaart weg. Dus met de keuze van vier kaarten zijn er op de horizontale as 28 stappen.

**c)** De route van een combinatie van 4 kaarten van dezelfde soort.

Je kiest bijvoorbeeld 0 schoppen. In het rooster ga je dan van (0,) naar (8,0). Vervolgens kies je vier harten. Dat betekent dat je naar van (8,0) naar (12,4). Daarna ga je dus naar (28,4), want je hebt je keuze gemaakt.

Van (8,0) naar (12,4) is hetzelfde als van (0,0) naar (4,4) en dat kan op  $\binom{8}{4} = 70$ , verschillende manieren.

Let op: als je bij (8,0) bent aangekomen en je gaat direct 4 stappen naar boven, dan ben je bij (8,4), Je hebt dan direct het antwoord! Dit is geheel overeenkomstig de uitleg onder b).

**d)** De route van een combinatie van twee schoppen en twee harten.

De route gaat via (6,2) naar (12,4).

Het aantal combinaties: van (0,0) naar (6,2) kan op  $\binom{8}{2} = 28$  manieren. Van (6,2) naar (12,4) is hetzelfde als van (0,0) naar (6,2), dus ook 28 manieren. Totaal zijn er  $28 \cdot 28 = 784$ , mogelijkheden.

**e)** De drie punten in het rooster voor een combinatie van 1 schoppen, 1 harten, 1 ruiten en 1 klaveren.

Van (0,0) naar (7,1), dat kan op  $\binom{8}{1} = 8$  manieren. Van (7,1) naar (14,2) kan weer op  $\binom{15-7}{2-1} = 8$ , manieren. Van (14,2) naar (21,3) op  $\binom{22-14}{3-2} = 8$ , manieren. Van (21,3) naar (28,4) op  $\binom{29-21}{4-3} = 8$ , manieren. Totaal:  $8^4 = 4096$  manieren.

**f)** Het punt in het rooster waarbij de route hoort voor een combinatie van schoppen en harten. Dus ook 4 harten of vier schoppen.

Het laatste punt voor de combinatie is (12,4).

Voor deze combinatie zijn er  $\binom{16}{4} = 1820$ , manieren/mogelijkheden.

**g)** Het punt in het rooster waarbij de route hoort voor een combinatie van schoppen en ruiten. Dus ook 4 ruiten of vier schoppen.

Je maakt nu een nieuw rooster met de andere volgorde. Het resultaat is gelijk aan het antwoord onder f),  $\binom{16}{4} = 1820$ , manieren/mogelijkheden.

**h)** Het aantal combinaties van twee 9's en vier 10'en.

Ook nu maak je weer een nieuw rooster. Je zet eerst de vier 9's op de horizontale as van het rooster.

Vervolgens de vier 10'en. De route wordt: van (0,0) naar (2,2) en dat kan op  $\binom{4}{2} = 6$ , manieren. Daarna ga je van (2,2) naar (4,4) en dat is hetzelfde als van (0,0) naar (2,2) en dat kan op  $\binom{4}{2} = 6$ , manieren. Totaal aantal mogelijkheden:  $6 \cdot 6 = 36$ .

#### Opgave 7 Munten

Een spel met 5 munten ter waarde van a, b, c, d en e € cent.

Iemand heeft 4 munten in de hand. Bijvoorbeeld: 2 munten a, 1 munt van b en 1 munt van d.

Het gaat erom te raden welke munten het zijn.

**a)** Het aantal mogelijkheden.

Een rooster waarvan je gebruik van kunt maken heeft 5 verticale lijnen: 5 munten,

verder heeft het rooster 5 horizontale lijnen: iedere munt kan 0, 1, 2, 3, 4 keer voorkomen.

Met vier munten in de hand moet je 8 stappen maken: 4 stappen naar rechts en 4 stappen omhoog. Dat kan op  $\binom{8}{4} = 70$  manieren.

**b)** We bekijken routes waarbij de munten a en b uitgesloten zijn.

Je kan bijvoorbeeld een aantal routes tekenen. Bijvoorbeeld: 1 maal c, tweemaal d en 1 maal e.

Dus de eerste twee stappen gaan naar rechts, naar (2,0). Daarna van (2,0) naar (4,4). Dat is hetzelfde als van (0,0) naar (2,4), Zo vind je  $\binom{6}{2} = 15$  mogelijkheden.

**c)** Aantal mogelijkheden met minsten twee munten d.

Als je dit weet, pas je het rooster aan en zet de munt d voorop. Je gaat dan van (0,2), naar (4,4). Dat is hetzelfde als van (0,0) naar (4,2). Dus  $\binom{6}{2} = 15$  mogelijkheden.

**d)** Aantal mogelijkheden met twee munten d.

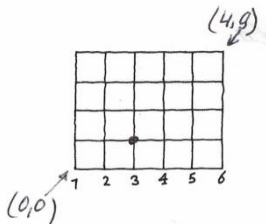
In het rooster zet je d munt d weer voorop. Maar je vertrekt nu van (1,2), je hebt dan precies 2 munten van d, naar (4,4). Dat is hetzelfde als van (0,0) naar (3,2). Dus  $\binom{5}{2} = 10$  mogelijkheden.

**e)** Aantal mogelijkheden wanneer elke munt één keer mag voorkomen. Dus vier verschillende munten.

Dit zijn combinaties zonder herhaling. Als je zonder herhaling 4 uit 5 munten moet kiezen kan dat op  $\binom{5}{4} = 5$  manieren.

Nota bene: rooster coördinaten zijn niet hetzelfde als het aantal munten! Voorbeeld: als je munt d vooropzet, in het rooster coördinaat (0,0) dan heb je 1 munt d.

#### Opgave 8 dobbelstenen



Als je met 4 dobbelstenen werpt, is 3, 4, 4, 6 een mogelijke combinatie. In het rooster hiernaast kun je alle mogelijke combinaties weergeven.

**a)** Aantal mogelijke worpen:  $\binom{9}{4} = 126$ .

**b)** Aantal mogelijke worpen waarbij het laagste aantal ogen 3 is. 3 mag vaker dan één keer voorkomen. Het startpunt is in bovenstaand rooster met een dot aangegeven. Het nulpunt verschuift naar de dot.

Aantal mogelijkheden:  $\binom{6}{3} = 20$ .

**c)** Aantal mogelijke worpen met alleen een even aantal ogen. Dus, 2, 4, 6.

Het rooster halveert: van (0,0) naar (6,4)  $\Rightarrow \binom{6}{4} = 15$ .

Maak de opgaven van paragraaf 3 en 4 (van de Wageningse Methode, 2015) en in ieder geval:

- Opgave 9 van paragraaf 4.

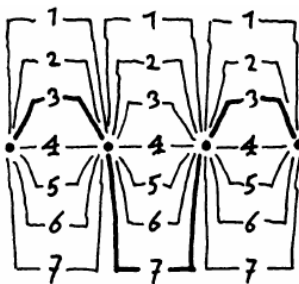
- **Samenvatting**

in een vaas zitten briefjes met de nummers 1 tot en met 7. Er zijn 4 mogelijkheden:

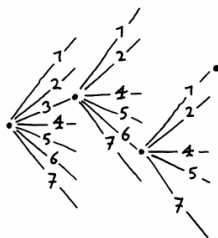
- Je doet een **geordende greep met** herhaling.
- Je doet een **geordende greep zonder** herhaling.
- Je doet een **ongeordende greep met** herhaling.
- Je doet een **ongeordende greep zonder** herhaling.

Je kunt op de bovengenoemde vier manieren bijv. drie briefjes uit de vaas trekken.

- Eerst een **geordende greep met herhaling**: je trekt met terugleggen en **let op de volgorde**. Je maakt rijtjes van lengte 3, dus 3 cijfers. Teken een wegendiagram. Het aantal mogelijke grepen is een macht:  $7 \times 7 \times 7 = 7^3$ . De getekende route is 3-7-3.

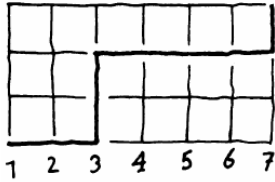


-Daarna een **geordende greep zonder herhaling**: je trekt zonder terugleggen en **let op de volgorde**. Je maakt rijtjes van lengte 3, dus 3 cijfers. Teken een boomdiagram. Het aantal mogelijke grepen is het aantal permutaties van 3 uit 7. De faculteit: met notatie Grafische Rekenmachine (GR):  $7 \text{ nPr } 3 = \frac{7!}{(7-3)!} = 7 \times 6 \times 5$ . Het aangegeven eindpunt hoort bij de permutatie 3-6-1.



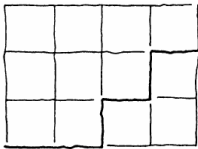
-Nu een **ongeordende greep met herhaling**: je trekt met terugleggen en **let niet op de volgorde**. Je maakt rijtjes van lengte 3, dus 3 cijfers.

Teken een 'aantal-rooster', horizontaal staan de te trekken nummers, verticaal het aantal getrokken nummers. Elke trekking komt overeen met een kortste route van 9 stappen in het rooster. Het aantal trekkingen is  $9 \text{ nCr } 3 = \binom{9}{3} = 84$ . De aangegeven route hort bij 3, 3, 7.



-Tenslotte een **ongeordende greep zonder herhaling**: je trekt zonder terugleggen en **let niet op de volgorde**. Dus (4, 2, 6) is hetzelfde als (2, 6, 4). Je maakt rijtjes van lengte 3, dus 3 cijfers. Je moet 3 keuzes maken uit de 7 nummers. Dat zijn 7 'wel-niet' beslissingen. Teken een 'wel-niet' rooster. In het getekende rooster is de volgorde niet-niet-wel-niet-wel-niet-wel en levert zo de greep (3, 4, 7) op.

Het aantal grepen is  $7 \text{ nCr } 3 = \binom{7}{3} = 35$ .



- Combinatorische problemen.

Hoe los je een combinatorisch probleem op?

Stap 1: Kies voor een passend vaasmodel.

Stap 2: Ga na met welk soort greep je te maken hebt.

Stap 3: Kies een rooster passend bij de soort greep.

- Voorbeeld:

**Oefenopgave 8** paragraaf 4 Blok 1 Les 2:

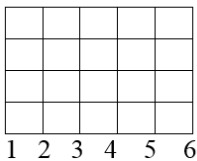
Je gooit met vier identieke dobbelstenen. Hoeveel mogelijke uitkomsten zijn er?

Stap 1: Kies voor een passend vaasmodel:

In de vaas zitten 6 nummers 1 tot en met 6. Elke worp met de 4 dobbelstenen komt overeen met 4 keer trekken uit de vaas. Na elke trekking wordt het nummer in de vaas teruggelegd.

Stap 2: Soort greep **een ongeordende greep met herhaling**.

Stap 3: Kies als rooster, een aantal (1,2,3,4,5,6) -rooster. Aantal kortste routes is  $\binom{9}{4} = 126$ .



- **Opgave 6** Paragraaf 5:

**a)** Hoeveel rijtjes met lengte 8 zijn er met nullen en enen? Een rijtje met alleen nullen en alleen enen mag ook.

Kies een vaas met twee briefjes, een briefje met een 0 en een briefje met een 1. Nadat je een briefje getrokken hebt, **leg je dat briefje terug**. Dat doe je 8 keer.

Je hebt te maken met een **geordende greep met herhaling**. De volgorde van de greep van 8 doet ertoe. Dus twee keer hetzelfde rijtje is niet toegestaan. Voor het eerste getal heb je twee mogelijkheden. Voor het tweede getal weer twee mogelijkheden, en zo verder. Totaal  $2^8 = 256$  mogelijkheden.

**b)** Aantal rijtjes met slecht één 1.

Er zijn 8 rijtjes omdat je 8 keer de positie van 1 kan veranderen.

c) Hoeveel rijtjes met lengte 8 zijn er met nullen en met twee enen?

Stap 1: Kies een vaas met de nummers 1 tot en met 8 en trek twee keer.

Stap 2: Dit is een **ongeordende greep zonder herhaling**.

Stap 3: Met een wel-niet rooster: twee keer wel en zes keer niet.

Uit de vaas trek je, zonder terugleggen en zonder op de volgorde te letten, twee getallen. Deze twee getallen geven de plaatsen aan waar de twee enen komen. Trek je bijvoorbeeld 3 en 7, dan hoort daarbij het rijtje: 00100010.

Dus  $8 \text{ nCr } 2 = \binom{8}{2} = 28$ .

Toelichting: bij dit voorbeeld van het vaasmodel.

Begin met 11000000, laat de enen gezamenlijk opschuiven, dus 01100000, enz. Dan 10100000, 01010000, enz. De laatste is 10000001. Een getal, je kan niet meer schuiven.

Opgeteld:  $7+6+5+4+3+2+1=28$  mogelijkheden.

Of anders gezegd: Je hebt 8 verschillende cijfers. Trekken zonder terugleggen:

8! Mogelijke combinaties, permutaties.

Nu zijn er 2 cijfers hetzelfde en wel twee enen. Dus het aantal mogelijkheden neemt met een factor 2! Af.

Dus  $(8!/2!)$  mogelijkheden. Verder zijn de overige cijfers (6) nullen. De mogelijkheden nemen nog eens

met een factor 6! Af:  $[8!/(2!6!)] = \binom{8}{2} = 28$ .

d) Trekking van een 1 en een 8: 10000001. Dus een 1 op de eerste positie en een 1 op de achtste positie.

Trekking bij het rijtje 00110000: een 3 en een 4. Of andersom.

e) Zoals toegelicht onder c) zijn er  $\binom{8}{2} = 28$  mogelijkheden. Dit zijn het aantal mogelijkheden van een trekking met twee enen.

f) Je zou uit de vaas ook zes nummers kunnen trekken, die geven dan de plaats van de nullen aan. Op deze wijze heb je ook een trekking met twee enen. Je schrijft het nu anders op met hetzelfde resultaat als onder

c) en d):  $\binom{8}{6} = \binom{8}{2} = 28$ .

g) Aantal mogelijkheden van een rijtje met lengte 8 en drie enen:  $\binom{8}{3} = 56$ .

Met 5 enen en dus 3 nullen:  $\binom{8}{5} = 56$ . Je ziet het, een spel met het Binomium van Newton.

h) Een rij van een lengte 10 met drie enen en zeven nullen.

Het model: een vaasmodel met 10 briefjes waarop op elk briefje een verschillend getal van 1 tot en met 10: dus  $\binom{10}{3} = 120$ .

- Een ander voorbeeld:

Je gaat rijtjes maken van 7 cijfers. Een rijtje bevat precies twee nullen, één twee en één drie.

Hoeveel van deze rijtjes kun je maken?

Kies een vaas met 7 briefjes en daarop de cijfers 1 tot en met 7.

Elk briefje geeft de plaats aan van het te kiezen cijfer.

Eerst trek je twee keer zonder terugleggen (anders komen de cijfers op elkaar te liggen).

Dat zijn de plaatsen van de twee nullen. Dat kan op  $\binom{7}{2}$  manieren.

Dan trek je drie keer, weer zonder terugleggen, voor de plaatsen van de drie enen.

Dat kan op  $\binom{5}{3}$  manieren.

Je hebt nog twee briefjes over voor de plaats van de 2 en dus ook de 3.

$$\text{Totaal: } \binom{7}{2} \times \binom{5}{3} \times \binom{2}{1}.$$

- **Kansen**

- Je gooit met een zuivere dobbelsteen.

De theoretische kans op 1,2,3,4,5 of 6 ogen is  $\frac{1}{6}$ .

Zuivere dobbelstenen bestaan niet. Je gooit 600 keer met een gewone dobbelsteen. Je gooit 105 keer 6 ogen. Deze experimentele kans is  $\frac{105}{600} \approx \frac{1}{6}$ .

Hoe vaker je gooit, hoe dichter deze kans bij de theoretische kans komt.

### Voorbeelden met drie dobbelstenen

Het spelen met dobbelstenen is van oudsher een kansspel: dobbelen. Het dobbelen en berekenen van kansen horen bij elkaar. Pascal heeft mede aan de wieg gestaan van de ontwikkeling van kansrekening. Hoe groot is de kans om met drie dobbelstenen meer dan 10 ogen te werpen. Je kunt dit vraagstuk oplossen door alle mogelijkheden uit te rekenen en daarmee de kans bepalen. Maar is het nodig om alle mogelijkheden uit te rekenen?

Laten we eens kijken.

Het laagste aantal ogen met de drie dobbelstenen is 3 en het hoogste is 18: (3,18). De volgende combinatie, de laagste 1 omhoog en de hoogste 1 omlaag: (4,17) ..... Tot tenslotte: (10,11). Wat opvalt, is dat het gemiddelde 10.5 is. Maar dat is een rekenkundig gemiddelde, want het aantal ogen opgeteld is nooit 10.5. Ook weten we dat (10,11) in het midden ligt van de combinaties. Hoeveel mogelijkheden zijn er voor 10 ogen en hoeveel zijn er voor 11 ogen? Laten we ervan uitgaan dat de volgorde van belang is. En de volgorde is ook een gegeven!

**Let op:** gelet op wat volgt: volgorde is van belang! Maar, om dan het experiment goed uit te voeren is het nodig om de 3 dobbelstenen een aparte kleur te geven of te nummeren van 1 tot 3. Zie hieronder met het voorbeeld van 11 ogen en "de volgorde doet er toe", (6,4,1), enz. Met experiment wordt bedoeld om na te gaan dat je bij de combinatie (6,4,1), 6 mogelijkheden hebt.

Voorbeeld: aantal ogen 11  $\Rightarrow$  (6,4,1), (6,1,4), (4,6,1), (4,1,6), (1,6,4) en (1,4,6). Zo zijn er nog meer.

Maar let op: bij het aantal ogen van 10, heb je de combinatie (6,2,2), (2,6,2) en (2,2,6). Dus in dit laatste geval 3 mogelijkheden. Werk je de 10 ogen en 11 ogen op deze wijze uit dan vind je: 27 mogelijkheden voor 10 ogen en 27 mogelijkheden voor 11 ogen. Tevens weet je dat voor het laagste aantal ogen er 1 mogelijkheid is: (1,1,1), en voor het hoogste aantal ogen ook 1 mogelijkheid: (6,6,6). Dit duidt op symmetrie  $\Rightarrow$  het aantal mogelijkheden voor het aantal ogen groter dan 10 is gelijk aan het aantal mogelijkheden voor het aantal ogen kleiner dan 11. Conclusie: het aantal mogelijkheden groter dan 10 en het aantal mogelijkheden kleiner dan 11 vormen samen het totaal aantal mogelijkheden. Het totale aantal mogelijkheden voor 3 dobbelstenen is  $6 \times 6 \times 6 = 216$ .

Dus het aantal mogelijkheden om meer dan 10 ogen te gooien is 108. De kans:  $\frac{108}{216} = \frac{1}{2}$ , Tenslotte, aangezien de totale kans 1 is, geldt dat de kans om minder dan 11 ogen te gooien ook  $\frac{1}{2}$ , is.

Een praktijkgeval (De Méré's paradox): Na veel waarnemingen, stelde De Méré vast dat het aantal ogen van 11 na een worp met drie dobbelstenen vaker voorkwam dan het aantal ogen van 12. Volgens De Méré moest dit echter even vaak voorkomen.

Redenering:

11 ogen  $\Rightarrow$  (6,4,1), (6,3,2), (5,5,1), (5,4,2), (5,3,3), (4,4,3)  $\Rightarrow$  6 manieren,

12 ogen  $\Rightarrow$  (6,5,1), (6,4,2), (6,3,3), (5,5,2), (5,4,3), (4,4,4)  $\Rightarrow$  6 manieren.

Daarom hebben de twee worpen, 11 en 12 ogen dezelfde kans volgens De Méré.

Pascal heeft aangetoond dat de twee worpen niet gelijkwaardig zijn. Dat deed Pascal aan de hand van het bovenstaande voorbeeld met “de volgorde doet er toe”. Dan zijn er 27 mogelijkheden bij 11 ogen en 25 mogelijkheden bij 12 ogen. Het verschil treedt op bij de combinaties:

$(4,4,3) \Rightarrow 3$  mogelijkheden,

$(4,4,4) \Rightarrow 1$  mogelijkheid.

Zou er bij het dobbelen, dus “gambling”, gelet worden op de volgorde? Kun je dat waarnemen zonder “gemerkte” dobbelstenen? Nee, er wordt niet gelet op de volgorde, dat kan ook niet. Je wordt geacht te weten wat het aantal mogelijkheden zijn bij een bepaalde worp.

Een aantal voorbeelden:

**a)** Wat is de kans dat speler A met 1 dobbelsteen meer ogen gooit dan speler B met 2 dobbelstenen?

De handigheid bij de oplossing van dit vraagstuk om het te onderzoeken alsof je 3 dobbelstenen werpt.

En dan zit er niets anders op dan te tellen.

Te beginnen met  $(3,1,1)$ ;  $(4,1,1)$ ,  $(4,2,1)$ ,  $(4,1,2)$ ;.....; $(6,1,1)$ ,....., $(6,4,1)$ , $(6,1,4)$ : 10 mogelijkheden op een

totaal van 216. De kans:  $\frac{10}{216} = \frac{5}{54}$ .

**b)** Drie dobbelstenen.

De kans dat de som van de ogen 17 bedraagt. De volgorde doet ertoe. De enige combinatie is 5, 6, 6. Deze combinatie bereik je op 3 manieren: 566, 656, en 665. Er zijn  $6^3$  mogelijkheden. De kans van een som van

17 ogen is:  $\frac{3}{216} = \frac{1}{72}$ .

**c)** De kans dat de som van de ogen groter is dan 14.

- som is 15: 456 kan 6 keer (=3!), 555 kan 1 keer en 366 kan 3 keer. Totaal 10 mogelijkheden.

- som is 16: 466 kan 3 keer, 556 kan 3 keer. Totaal 6 mogelijkheden.

- som is 17: 566 kan 3 keer. Totaal 3 mogelijkheden.

- som is 18: 666 kan 1 keer. Totaal 1 mogelijkheid.

Het totaal aantal mogelijkheden: 20

De kans dat de som van de ogen groter is dan 14:  $\frac{20}{216} = \frac{5}{54}$ .

- Je gooit twee keer met een munt.

**Je let op de volgorde.** Dit komt overeen met een **geordende greep met herhaling**.

De uitkomsten zijn: MM, KM, MK, KK.

Alle uitkomsten hebben gelijke kans:  $\frac{1}{4}$ .

- Je gooit twee keer met een munt.

Je let **niet** op de volgorde. Dit komt overeen met een **ongeordende greep met herhaling**.

De uitkomsten zijn: (M,M), (K,M), (K,K).

De uitkomsten hebben **ongelijke** kansen:  $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ .

Ten overvloede: ongeordend  $\rightarrow (K,M)=(M,K)$

- De uitkomsten van **geordende grepen** met  $k$  uit  $n$  **met herhaling** hebben gelijke kans.

De reciproke waarde van het aantal mogelijkheden:  $\frac{1}{n^k}$ .

- De uitkomsten van **geordende grepen** van  $k$  uit  $n$  **zonder herhaling**(permutaties)

hebben gelijke kans:  $\frac{(n-k)!}{n!} \rightarrow \frac{1}{nPk}$ .

- De uitkomsten van **ongeordende grepen** van  $k$  uit  $n$  **zonder herhaling**(combinaties)

hebben gelijke kans:  $\frac{(n-k)!k!}{n!} \rightarrow \frac{1}{nCk}$ .

- De uitkomsten van **ongeordende grepen** van  $k$  uit  $n$  met **herhaling**(combinaties) hebben ongelijke kans.

### Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven.

#### **Opgave 4** paragraaf 5:

20 suikerklontjes verdelen over 4 personen

Kies een vaasmodel. Maak 4 briefjes voor 4 personen met de nummers 1, 2, 3, 4.

Nu 20 keer een greep in de vaas met terugleggen.

Aantal manieren om de twintig suikerklontjes te verdelen over 24 personen. Een rooster van (0,0) naar (20,23) geeft:

Het aantal mogelijkheden is  $\binom{23}{20} = 1771$ .

#### **Opgave 7** paragraaf 5:

Rijttjes van 8 getallen bestaande uit nullen, enen en tweeën.

**a)** Aantal mogelijke rijttjes. Vaasmodel met drie briefjes genummerd 0, 1 en 2.

Trekken met terugleggen: een wegendiagram  $\Rightarrow 3^8$ .

**b)** Aantal mogelijkheden zonder nullen in de trekking onder a):  $2^8$ .

**c)** Aantal rijttjes(mogelijkheden) met twee nullen, vijf enen en 1 twee.

Toelichting: in de vaas zitten weer de plaatsen 1 tot en met 8(8 briefjes met de nummers (1t/m8). Eerst trekken we uit de vaas twee getallen die de plaatsen voor de twee nullen aangeven. Vervolgens trekken we uit de vaas-waar dan nog 6 plaatsen in zitten- vijf getallen die de plaatsen voor de vijf enen aangeven. Het getal dat overblijft geeft de plaats voor de twee aan.

Stel dat je eerst de 3 en 6 trekt en vervolgens de nummers 1,2,5,7 en 8. Dan krijg je het volgende rijtje:

1, 1, 0, 2, 1, 0, 1, 1.

Het aantal mogelijke rijttjes is:  $\frac{8!}{5!2!} = 168$ .

**d)** Het aantal mogelijkheden voor 2 plaatsen voor de nullen, zonder terugleggen.

Denk weer in termen van 8 verschillende getallen, zes liggen al vast en je kiest er twee voor de nullen:  $\binom{8}{2}$  mogelijkheden.

Vervolgens, nadat de twee nullen getrokken zijn, is het aantal mogelijkheden voor de 5 enen, 5

permutaties. Er zijn nog 6 plaatsen voor de 5 enen:  $\frac{6!}{5!} = 6$ , mogelijkheden. Dus het totaal aantal

mogelijkheden is:  $\binom{8}{2} \cdot 6 = 168$ . Zoals berekend is onder c).

**e)** Je kan ook eerst de plaats voor de 2 trekken en daarna de plaats voor de twee nullen.

Het aantal mogelijkheden: De plaats voor de 2 kan op 8 manieren, want er zijn 8 plaatsen:  $\binom{8}{1}$ . Voor de

twee nullen zijn er dan nog 7 plaatsen:  $\binom{7}{2}$  mogelijkheden. De rest ligt nu vast.

Totaal:  $\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{2} = 168$ , mogelijkheden.

**f)** De derde manieren om een rijtje te maken, is beginnen met de vijf plaatsen met enen te vullen:  $\binom{8}{5}$

mogelijkheden. Er resten nog 3 plaatsen voor de twee nullen:  $\binom{3}{2}$ . De rest ligt weer vast

Totaal:  $\binom{8}{5} \cdot \binom{3}{2} = 168$ .

**g)** Het aantal mogelijkheden met een rijtje van de lengte 10 cijfers: één nul, twee enen, drie tweeën en vier drieën. We kiezen een volgorde: vier drieën  $\binom{10}{4}$ , drie tweeën  $\binom{6}{3}$ , twee enen  $\binom{3}{2}$ .

Totaal  $\binom{10}{4} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} = 12600$ .

Of één nul  $\binom{10}{1}$ , twee enen  $\binom{9}{2}$  drie tweeën  $\binom{7}{3}$ .

Totaal  $\binom{10}{1} \cdot \binom{9}{2} \cdot \binom{7}{3} = 12600$ . Opgelet, de vier drieën  $\binom{4}{4} = 1$ .

**Opgave 8 §5 Telefoonnummers:**

**a)** Aantal mogelijke telefoonnummers met de cijfers 1, 3, 5, 7, 8 en 9. Dus een telefoonnummer van 6 cijfers. Ik neem ook aan dat het een trekking zonder terugleggen is. Met terugleggen zijn er  $6^6$  mogelijkheden.

Zonder terugleggen: mogelijkheden met permutaties  $6!$ .

Samengevat: je begint met 1 cijfer, daar voor zijn er 6 plaatsen, dus  $\binom{6}{1}$  mogelijkheden. Vervolgens heb je nog 5 plaatsen, daarvoor zijn er  $\binom{5}{1}$  mogelijkheden, enz. Dus,  $\binom{6}{1} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} = 6!$ .

**b)** Aantal telefoonnummers met 1, 1, 3, 5, 7 en 8. De 9 ontbreekt, daarvoor in de plaats komt nog een 1. Als je twee enen hebt zijn die niet te onderscheiden: het aantal mogelijkheden wordt daardoor gehalveerd:  $\frac{6!}{2!}$ . Samengevat:  $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1}$ .

**c)** Aantal telefoonnummers met de cijfers 1, 1, 1, 3, 5, 7.

We weten nu hoe het gaat: drie enen die niet te onderscheiden zijn:  $\frac{6!}{3!} = \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1}$ .

**d)** Aantal telefoonnummers met de cijfers 1, 1, 3, 3, 5, 7.

De mogelijkheden:  $\frac{6!}{2!2!} = \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} = 180$ .

Opmerkingen:

-  $\binom{1}{1}$  kun je natuurlijk weglaten.

- Verder: zie ook opgave 12 paragraaf 1 van Blok 1 Les 1.

- Aanvullend voorbeeld. Een rijtje van 2 nullen, 3 enen, 1 twee en 1 drie. Dus:  $\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{1}$ . Als je eerst de 3 enen aanwijst, dan de twee en daarna de 2 nullen, vind je voor het aantal:  $\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{4} \cdot \binom{3}{2}$ .

**Opgave 9 paragraaf 5:**

In een bak zitten de letters a, b, c, d, e, f en g.

**a)** Aantal verschillende geordende grepen van 3 uit de bak met letters. Verschillende geordend: zonder terugleggen.

Permutaties:  $7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{7!}{4!} = \frac{7!}{(7-3)!} = 210$ , verschillend geordende grepen. Dus let op: abc, acb, bac, bca, cab, cba, zijn  $6 = 3!$  Geordende grepen.

**b)** Aantal verschillende ongeordende grepen. Nu is er geen onderscheid meer tussen abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Het aantal mogelijkheden is:  $\frac{7!}{4!3!} = \binom{7}{3} = \binom{7}{4} = 35$ .

**c)** Aantal geordende grepen met de letters a, b, c. Het antwoord hebben we al gegeven onder a): abc, acb, bac, bca, cab, cba, zijn  $6 = 3!$  Geordende grepen.

**d)** Zoals we hebben gevonden, hebben we bij een ongeordende greep van a, b, c, zes geordende grepen.

**e)** Met de Grafische Rekenmachine (GR) kun je niet rechtstreeks het aantal geordende grepen van 60 uit 100 berekenen. Met  $100nPr60$  krijg je een foutmelding.

Aantal ongeordende grepen met de GR:  $\binom{100}{60} = 1.375 \cdot 10^{28}$ .

**f)** Aantal geordende grepen van 60 uit 100.

Bij 1 ongeordende greep horen  $60!$  Geordende grepen.  $60! = 8.321 \cdot 10^{81}$ .

**g)** Een benadering van het aantal geordende grepen van 60 uit 100.

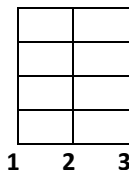
Aantal geordende grepen:  $\frac{100!}{(100-60)!} = 60! \cdot \binom{100}{60} = 8.321 \cdot 10^{81} \cdot 1.375 \cdot 10^{28} = 1.144 \cdot 10^{110}$ .

**Opgave 10** van Paragraaf 5

In een vaas zitten 3 briefjes met de getallen 1, 2 en 3.

a) Het aantal geordende grepen met herhaling bij 4 keer een briefje trekken. De volgorde is van belang. Er zijn  $3^4 = 81$  mogelijkheden of wel verschillende grepen.

b) Het aantal ongeordende grepen met herhaling bij 4 keer trekken van een briefje.



Een rooster met 3 verticale lijnen voor de 3 getallen, waarin je met 4 stappen omhooggaat. Dus 5 horizontale lijnen. Iedere route van linksonder naar rechtsboven is een andere ongeordende greep. Iedere route van linksonder naar rechtsboven is een ander ongeordende greep. Iedere route bevat zes stappen waarvan vier naar boven. Er zijn  $\binom{6}{4} = 15$ .

c) Bij de ongeordende greep 1, 1, 1, 2 horen vier geordende grepen: 1112, 1121, 1211, 2111.

Aantal geordende grepen bij de ongeordende greep 1, 1, 2, 3.

Er zijn vier posities waar de enen geplaatst kunnen worden. Dat kan op  $\binom{4}{2}$  manieren. Daarna zijn er nog twee posities over voor de twee:  $\binom{2}{1}$  manieren. De positie van de drie ligt vast. Dus 1 manier. Totaal aantal manieren wordt dan:  $\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} = 12$ .

We kunnen dit probleem ook anders oplossen: je hebt 4 verschillende getallen. Met 4 geordende grepen heb je 4! mogelijkheden. Echter, twee cijfers zijn gelijk. Dus het aantal mogelijkheden is:  $\frac{4!}{2!} = 12$ .

d) We gaan nu het aantal ongeordende grepen opschrijven met de drie cijfers en het aantal bij behorende geordende grepen.

| Ongeordend | geordend | ongeordend | geordend | ongeordend | geordend |
|------------|----------|------------|----------|------------|----------|
| 1111       | 1        | 2221       | 4        | 1133       | 6        |
| 2222       | 1        | 2223       | 4        | 2233       | 6        |
| 3333       | 1        | 3331       | 4        | 1123       | 12       |
| 1112       | 4        | 3332       | 4        | 2213       | 12       |
| 1113       | 4        | 1122       | 6        | 3312       | 12       |

Totaal 81 geordende grepen. Zie onder a).

**Opgave 11** van Paragraaf 5

In een vaas zitten de nummers 1, 2, 3, 4, 5 en 6. We nemen met teruglegging drie nummers uit de vaas, waarbij we letten op de volgorde. Ofwel, we nemen een geordende greep met herhaling van 3 uit 6.

a) De kans dat het eerste nummer een 1 is, het tweede nummer een 3 en het derde nummer een 6.

Dit lijkt ook op de dobbelsteen. De kans dat het eerste nummer een 1 is:  $\frac{1}{6}$ , en dat geldt voor alle nummers.

Dat wil zeggen, de kans op drie nummers is:  $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$ .

b) De kans dat alle drie de nummers een 5 zijn, is geleid op de teruglegging ook:  $\frac{1}{216}$ .

c) Alle geordende grepen van 3 uit 6 met herhaling hebben een gelijke kans. Je kunt  $6^3 = 216$  verschillende geordende grepen doen: een wegendiagram. De kans op een combinatie van 3 cijfers is steeds  $\frac{1}{216}$ .

d) We nemen weer met teruglegging drie nummers uit de vaas, maar nu letten we niet op de volgorde. Een ongeordende greep met herhaling. Daarvoor moeten we een rooster tekenen met 6 verticale lijnen (voor de nummers 1 tot en met 6) en 3 stappen omhoog. Het rooster ziet er als volgt uit:

|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

1 2 3 4 5 6

We moeten 3 omhoog en 5 naar rechts, dus 8 stappen. Dit kan op  $\binom{8}{3} = 56$ , manieren.

**e)** Kansen bij een trekking: i) de kans bij een trekking van drie 6'en, ii) de kans van 1, 2 en 3.

Bij een ongeordende greep van 3 zessen hoort 1 geordende greep.

Bij een ongeordende greep van 1, 2, en 3 horen zes geordende grepen. De kans bij de ongeordende greep is dus zes keer zo groot.

### Opgave 12 van Paragraaf 5

In een vaas zitten de nummers 1, 2, 3, 4, 5 en 6. We nemen-zonder teruglegging-drie nummers uit de vaas, waarbij we letten op de volgorde. Ofwel, we nemen een geordende greep zonder herhaling van 3 uit 6.

a) De kans dat het eerste nummer een 1 is, het tweede een 3 en het derde een 5.

De kans dat we als eerste een 1 trekken is 1 op 6:  $\frac{1}{6}$ . Daarna zijn er nog 5 nummers over (want zonder teruglegging). De kans dat de tweede een 3 is:  $\frac{1}{5}$ . Tenslotte, de kans dat de derde een 4 is:  $\frac{1}{4}$ .

De totale kans is voor de combinatie van drie nummers:  $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{120}$ .

b) We hebben dus met permutaties te maken. Het kenmerk van: zonder herhaling.

Het aantal permutaties is het aantal mogelijkheden: 120. De kans is 1 gedeeld door het aantal mogelijkheden.

c) Nu trekken we weer 3 nummers met teruglegging. Deze problematiek hebben we in de vorige opgave bestudeerd. Let op: de volgorde is van belang.

- de kans van de combinatie 1, 3, 5:  $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$ .

- de kans van de combinatie 1, 2, 6:  $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$ .

De kans op iedere combinatie van 3 uit 6 is even groot.

Wanneer de volgorde niet van belang is, hebben we in de voorafgaande opgave gevonden dat het aantal mogelijkheden  $\binom{8}{3} = 56$ , is. De kans is  $\frac{1}{56}$ .

### Opgave 13 van Paragraaf 5:

Werpen met 3 dobbelstenen. We nemen de som van het aantal ogen van de drie dobbelstenen. Gooi je twee 1'en en een 6 dan is de som 8.

a) Schrijf alle worpen op waarbij de som 8 is. Een worp is bijvoorbeeld 1, 1, 6. Schrijf ongeordende grepen op. Vermeld bij elke ongeordende greep hoeveel geordende grepen erbij horen.

De volgorde is niet van belang. De ogen worden opgeteld. De worpen zijn:

1, 1, 6 . Geordend:  $3!/2$ , er zijn twee 1'en, niet te onderscheiden.

1, 2, 5 . Geordend:  $3!$  Mogelijkheden.

1, 3, 4 . Geordend:  $3!$  Mogelijkheden.

2, 2, 4 . Geordend:  $3!/2$  mogelijkheden.

2, 3, 3 . Geordend:  $3!/2$  mogelijkheden.

b) Hoeveel geordende grepen hebben de som van 8?

Totaal  $3+6+3+3=21$  geordende grepen met de som van 8. Wat is de kans op de som van 8? Dus hoeveel geordende grepen zijn er die een gelijke kans hebben? Een vaasmodel met 6 briefjes met de nummers 1 tot en met 6. Je trekt 3 keer met terugleggen:  $6^3 = 216$  mogelijkheden. De kans voor de som van 8:  $21/216 = 7/72$ .

c) Bereken de kans van de som van 9 ogen.

1, 2, 6 . Met 6 geordende grepen.

1, 3, 5 . Met 6 geordende grepen.

1, 4, 4 . Met 3 geordende grepen.

2, 2, 5 . Met 3 geordende grepen.

2, 3, 4 . Met 6 geordende grepen.

3, 3, 3 . Met 1 geordende greep.

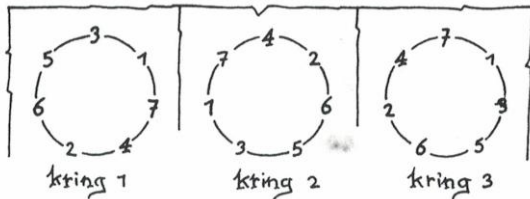
Opgeteld zijn er 25 geordende grepen.

De kans op een greep met de som van 9 is:  $25/216$ .

### Opgave 1 van Paragraaf 6

De cijfers 1,2,3,4,5,6 en 7 kun je in een kring plaatsen.

Hieronder zijn een drietal manieren aangegeven waarop dit kan:



Kring 1 en kring 2 zijn hetzelfde: kring 2 krijg je door kring 1 te

draaien. Kring 1 en kring 3 lijken ook veel op elkaar: in beide kringen heeft elk getal dezelfde buren (directstbijzijnde getallen). Toch zijn de kringen verschillend: in kring 1 staat 7 rechts van 1 en in kring 3 staat 7 juist links van 1.

Eigenlijk staan hierboven maar twee verschillende kringen: kring 1 en kring 2.

a) Aantal mogelijk verschillende kringen.

Let op: de kring verandert niet door draaiing. Zet daarom, bijvoorbeeld, de 1 bovenaan. Een positie ligt vast. Er zijn dan nog 6 posities over. Permutaties zonder terugleggen:  $6! = 720 (= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$ , mogelijkheden.

b) We bekijken dezelfde kring: met zeven plaatsen. Nu plaatsen we de getallen 1,2,3,4,5, en 6 in de kring. Er blijft één plaats open.

Aantal mogelijk verschillende kringen.

We gaan er weer vanuit dat de 1 boven aanstaat. Voor de 2 hebben we zes plaatsen, voor de 3 nog vijf plaatsen, enz. De zes cijfers kunnen op  $6!$  Manieren geplaatst worden. Dus  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ .

c) Aantal mogelijke kringen als de getallen 1,2,3,4 en 5 in de kring geplaatst worden. Let op: er blijven twee plaatsen open.

We plaatsen de 1 weer boven aan. Er zijn dan voor de 2 nog zes plaatsen, voor de 3 nog vijf, enz.

Totaal:  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$  mogelijkheden.

### Opgave 2 van Paragraaf 6

A. heeft morgen zes lessen. Het eerste uur heeft A. les en ook het achtste uur; A. heeft dus twee tussenuren. A.

heeft de vakken: Nederlands, Duits, Frans, geschiedenis, wiskunde en scheikunde.

Aantal mogelijke roosters.

Het is handig om eerste de tussenuren te plaatsen. De tussenuren kunnen het tweede tot en met het zevende uur zijn. Dat zijn zes uren: zes posities. We moeten er twee uit zes kiezen. Het zijn tussenuren, de volgorde is niet van

belang. Dat kan dus op  $\binom{6}{2} = 15$  manieren.

Nog eens herhalen: Er zijn zes plaatsen voor zes cijfers. Aangezien het om twee tussenuren gaat noem ik vier van de zes cijfers, bijvoorbeeld, 0. Het aantal mogelijkheden reduceert tot  $\frac{6!}{4!}$ . Maar, nu moeten we verder nog rekening houden dat de twee tussenuren niet te onderscheiden zijn. Het aantal mogelijkheden neemt daardoor nog verder af:

$$\frac{6!}{4!2!} = \binom{6}{2} = 15. \text{ Uiteraard kunnen we dit ook weer vaststellen met een rooster.}$$

Nu moeten we de lessen nog inroosteren. We hebben acht posities waarvan er twee toegewezen zijn aan de tussenuren. Er resten nog zes posities om de vakken te verdelen. Het aantal volgordes waarop de vakken geplaatst kunnen worden is  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$ .

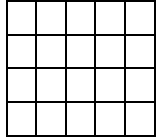
Het totaal aantal mogelijke roosters is  $\binom{6}{2} \cdot 6! = 15 \cdot 720 = 10800$ , mogelijkheden.

**Opgave 3 van Paragraaf 6**

We werpen met 4 dobbelstenen. Er kan bijvoorbeeld twee 1'en een 3 en een 4 geworpen worden.

**a) Aantal mogelijke worpen.**

Een ongeordende greep- de volgorde doet er niet toe- met herhaling. Daar hoort een rooster bij met 6 verticale lijnen (voor het aantal ogen van 1 tot en met 6) en vier stappen omhoog omdat we met vier dobbelstenen gooien.



1 2 3 4 5 6

Van linksonder in het rooster naar rechtsboven zijn negen stappen, waarvan vier omhoog.

Nota bene: van 1 naar 2 is de eerste stap.

Er zijn  $\binom{9}{4} = 126$ , mogelijkheden om van linksonder naar rechtsboven te komen.

**b) De kans dat de som van de ogen gelijk is aan 8 .**

Het aantal ongeordende grepen is 5, tussen haken staat het aantal geordende grepen:

- 1, 1, 1, 5 ( $4!/3!$  , 4 geordende grepen)
- 1, 1, 2, 4 ( $4!/2!$  , 12 geordende grepen)
- 1, 1, 3, 3 ( $4!/(2!2!)$ , 6 geordende grepen)
- 1, 2, 2, 3 ( $4!/2!$  , 12 geordende grepen)
- 2, 2, 2, 2 ( 1 geordende greep)

Dus 5 ongeordende grepen en 35 geordende grepen , waarbij de som van de ogen gelijk is aan 8.

Er zijn totaal 126 ongeordende grepen en  $6^4 = 1296$  geordende grepen(een wegendiagram).

De kans op de som van 8:

- ongeordende grepen:  $5/126$  ,
- geordende grepen:  $35/1296$  .

**Opgave 6 van Paragraaf 6**

Een coupe ijs bestaat uit drie bolletjes. Je kunt kiezen uit zes smaken, v, a, m, p, s, en c. Je mag ook smaken vaker kiezen en de volgorde is niet van belang. Ongeordende greep met herhaling.

**a) Aantal mogelijke verschillende coupes.**

Hier hoort een rooster bij met 6 verticale lijnen voor de smaken en 3 stappen omhoog voor de drie bolletjes.

Van linksonder naar rechtsboven zijn 8 stappen, waarvan 3 omhoog.

Aantal mogelijkheden is:  $\binom{8}{3} = 56$  .

**b) Aantal mogelijkheden met 3 uit zes en de volgorde is niet van belang: ongeordend zonder herhaling.**

Dus,  $\binom{6}{2} = 20$  .

**c) Aantal mogelijkheden(coupes) met twee verschillende smaken. Eén smaak komt twee keer voor. Er moet dus twee verschillende smaken worden aangewezen.**

We hebben 6 mogelijkheden voor de smaak die twee keer voorkomt, en daarna nog 5 mogelijkheden voor de smaak die één keer voorkomt. Dus  $6 \cdot 5 = 30$  mogelijkheden.

Je had natuurlijk ook mogen beginnen met de 6 mogelijkheden voor de ene smaak en 5 mogelijkheden voor de twee gelijke smaken. Het aantal mogelijkheden is gelijk.

Opmerking Zie ook opgave 5 van Blok 1 Les 2.

**Opgave 7 van Paragraaf 6 Lego**

C. heeft veel vierkante legoblokjes in drie kleuren: blauw, geel, rood.

C. bouwt torentjes van zeven blokken hoog. Ook hier vraag je jezelf af: wat voor soort greep is het? Soms is dat niet duidelijk.

De volgorde is van belang en herhaling is toegestaan. Deze informatie is van belang.

**a)** Aantal te maken torentjes. De volgorde is van belang en herhaling, dus een geheel blauwe toren van 7 blokjes is toegestaan. Zonder deze informatie is het aantal te bouwen torentjes: het aantal blokjes gedeeld door zeven. Dit getal moet worden afgerond (naar beneden) tot een veelvoud van zeven.

Een geordende greep met herhaling: een wegen diagram. Het aantal mogelijkheden is:  $3^7 = 2187$ .

**b)** Aantal torentjes met verschillende kleuren, dus waarbij alle drie de kleuren voorkomen.

Blauw geel en rood komen dus steeds voor.

- 1, 1, 5 is: 1 blauw, 1 geel en 5 rood. Deze combinatie kan nog 2 keer: 1, 5, 1 en 5, 1, 1. Het aantal mogelijkheden is:  $3 \cdot \frac{7!}{5!} = 126$ .

- 1, 2, 4 is 1 blauw, 2 geel en 4 rood. Zo zijn er nog 5 verschillende volgordes: drie verschillende cijfers en de volgorde doet ertoe. Het aantal mogelijkheden is:  $6 \cdot \frac{7!}{2!4!} = 630$ .

- 1, 3, 3. Deze combinatie kan nog twee keer. Het aantal mogelijkheden is:  $3 \cdot \frac{7!}{3!3!} = 420$ .

- 2, 2, 3. Deze combinatie komt nog twee keer voor. Het aantal mogelijkheden is:  $3 \cdot \frac{7!}{2!2!3!} = 630$ .

Opgeteld vinden we voor het totale aantal mogelijkheden:  $126 + 630 + 420 + 630 = 1806$ .

**c)** Aantal torentjes waarbij twee kleuren voorkomen.

Twee kleuren uit 3 kleuren kiezen kan op  $\binom{3}{2} = 3$  manieren.

De eerste en tweede kleur kunnen in de volgende aantallen voorkomen:

- 1, 6. En dat kan nog een keer: 6, 1. Het aantal combinaties is:  $2 \cdot \frac{7!}{6!} = 14$ .

- 2, 5. Dit kan ook nog een keer. Het aantal combinaties is:  $2 \cdot \frac{7!}{2!5!} = 42$ .

- 3, 4. Dit kan ook nog een keer. Het aantal combinaties is:  $2 \cdot \frac{7!}{3!4!} = 70$ .

In totaal zijn dit 126 mogelijkheden. En dat kan op 3 manieren:  $3 \cdot 126 = 378$ .

Maar dit kan sneller gevonden worden. Twee kleuren:  $2^7$  mogelijkheden. Maar je hebt er dan twee te veel.

Namelijk twee torentjes met één kleur. Dus totaal:  $2^7 - 2 = 126$ .

**d)** Aantal torentjes van één kleur. Daar zijn er 3 van: alles blauw, alles geel, of alles rood.

e) Wat blijkt? Als je de resultaten onder b) tot en met d) optelt vind je:  $1806 + 378 + 3 = 2187$ . Het resultaat onder a).

### Opgave 8 van Paragraaf 6

A. heeft in een voorraad bus twee soorten theezakjes: bosvruchtenthee(b) en perzikthee(p). Van beide soorten heeft A vijf zakjes. Elke dag pakt A. een nieuw zakje zodat de bus na 10 dagen leeg zal zijn. Een mogelijke route is bbbppppbb.

**a)** Aantal routes waarbij er nog twee zakjes perzikthee(p) over zijn op het moment dat het laatste zakje bosvruchtenthee(b) gepakt wordt.

Wanneer de laatste (b) gepakt wordt, hebben we nog bpp over. Dus het aantal mogelijkheden eindigt op bpp. Er zijn dus al 4 b's en 3 p's gekozen. Het aantal mogelijkheden om met het rijtje bpp te eindigen is: routes met de

lengte 7(=4+3), waarvan er  $\frac{7!}{4!3!} = \binom{7}{3} = 35$ .

**b)** Als er van beide smaken evenveel zakjes zijn, kiest A. willekeurig een zakje. In het andere geval kiest A. die smaak waarvan er de meeste zijn. Door deze keuze strategie zijn niet alle routes meer mogelijk.

Aantal mogelijke routes.

Aantal keuzes bij de keuze van het eerste zakje: 2 keuzes. De volgende keuze ligt vast. Voor de keuze van het derde zakje zijn er weer 2 mogelijkheden, waarna de volgende weer vast ligt. Bij de eerste, derde, vijfde, zevende en negende keuze zijn er twee keuzes. Totaal aantal mogelijke keuzes:  $2^5 = 32$ .

Opmerking: Het geval bij het begin dat er meer zakjes zijn van bijvoorbeeld p, is dat een keuze uit één smaak.

### Opgave 9 van Paragraaf 6 Verbindingslijnen

Hieronder zie je acht stippen. Tussen twee stippen is een verbindingslijnstuk getekend

a) Totaal aantal mogelijke lijnstukken tussen de acht stippen.



Vanuit iedere stip kun je 7 lintjes trekken. Dat kan 8 keer. Dus totaal  $8 \cdot 7 = 56$  lijnstukken. Maar dan heb je iedere lijn twee keer getekend. Het aantal lijnstukken is:  $\frac{56}{2} = 28$ .

b) In plaats van lijn stukken tekenen we een driehoek. Zie schets hieronder:



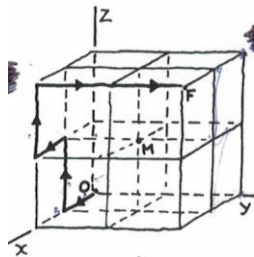
Voor iedere driehoek moet je drie punten kiezen uit 8 punten. Dat kan  $\binom{8}{3} = 56$  keer.

Dus 56 mogelijke driehoeken.

Als de punten gelijkelijk langs de cirkelomtrek verdeeld zijn, vind je dat er een aantal gelijke driehoeken zijn.

#### Opgave 10 van Paragraaf 6.

Kortste routes in de ruimte.



We bekijken kortste routes vanuit de oorsprong van de gelijkzijdige kubus  $O=(0,0,0)$  over roosterlijnen naar  $F=(2,2,2)$ . In de bovenstaande kubus is een dergelijke route getekend. De roosterlijnen zijn ook getekend.

a) Hoeveel kortste routes zijn er in totaal van O naar F?

Tip. Zo'n route bestaat uit 6 stappen: daarvan ga je er twee in de x-richting; twee in de y-richting en twee in de z-richting. Je kunt zo'n route dus coderen met een rijtje van 2 x-en, 2 y-en en 2 z-en.

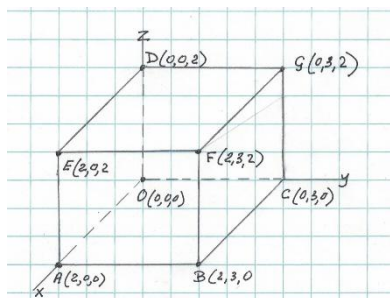
Je hebt altijd 2x, 2y en 2z stappen nodig. Het kan helpen om in telefoonnummers te denken van 6 cijfers. Je hebt dan 3 rijtjes met twee gelijke cijfers.

Plaats voor een route eerst twee x-en in een rijtje van 6. Dat kan dus op  $\binom{6}{2} = 15$  manieren. Plaats dan 2 y-en op de overgebleven 4 plaatsen. Dat kan op  $\binom{4}{2} = 6$  manieren. De z-en komen op de overgebleven plaatsen en dat kan op 1 manier,  $\binom{2}{2}$ . Het totaal aantal verschillende manieren:  $15 \cdot 6 = 90$ . Telefoonnummer met 6 verschillende cijfers: 6! Mogelijkheden. Nu zijn er 3 keer 2 gelijke cijfers:  $6!/8$  mogelijkheden: 90.

b) Hoeveel kortste routes zijn er van O via  $M=(1,1,1)$  naar F?

Van O naar M zijn er 6 geordende mogelijkheden. Een rijtje met 3 cijfers: 3! Mogelijkheden. Van M naar F nog een keer. Totaal  $3! \cdot 3! = 36$  manieren.

c) Een nieuwe kubus, geen gelijkzijdige kubus. Zie onderstaande schets.



Aantal kortste routes van O naar G: de kortste routes lopen via de ribben van de kubus. Opgelet: de ribben zijn niet allemaal even lang. Dan zijn er twee routes: OCG en ODG. Met lengte 5.

**d)** Aantal kortste routes van O naar F. Er zijn 6 routes met de lengte 7.

**e)** Aantal kortste routes van O naar F via G. Twee routes via ODGF en OCGF met lengte 5.

**f)** Aantal kortste routes van O naar F via C. Twee routes OCGF en OCBF met lengte 5.

### Opgave 11 van Paragraaf 6

Bij een onderzoek naar de intelligentie van ratten wordt soms gebruik gemaakt van een gangenstelsel: een zogenaamd T-labyrint. Hieronder is een dergelijk labyrint weergegeven. Het lijkt op het bord van Galton. Maar is toch anders: een labyrint met één uitgang.



In elk van de verticaal getekend gangen zit een klapdeurtje, dat slechts in één richting kan worden gepasseerd. Dat verhindert de mogelijkheid dat een rat terug naar boven kan lopen. Een rat kan langs een groot aantal routes van de ingang naar de uitgang lopen. Vetgedrukt is een dergelijke route in het labyrint getekend.

**a)** Aantal routes van de ingang van het labyrint (de top) naar de uitgang. Twee routes worden als gelijk beschouwd als dezelfde serie klapdeurtjes worden gepasseerd.

Iedere keer als de rat door een klapdeurtje gaat, moet de rat kiezen welke van de volgende gangetjes genomen wordt. Aantal gangetjes is rechts in de schets aangegeven.

Dus  $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$  mogelijkheden.

**b)** Aantal kortste routes van de ingang, bovenaan, naar de uitgang. Een kortste route is een route waarbij de als vet gedrukte lijn zo kort mogelijk is. Dat betekent: de kortste route gaat driekeer een half blokje naar rechts en driekeer een half blokje naar links. In 6 keer moet dus 3 keer naar links worden gekozen. Het aantal mogelijkheden  $\binom{6}{3} = 20$ .

**c)** De uitgang van het labyrint zit in het midden (onderste regel). We gaan onderzoeken wat er gebeurt als we de uitgang op de onderste regel ergens anders onderaan plaatsen.

Als de uitgang bij 0 komt te liggen, dan is er maar 1 kortste route. Als de uitgang bij 1 ligt zijn er  $\binom{6}{5} = 6$  kortste routes. Ligt de uitgang bij 2 dan zijn er  $\binom{6}{4} = 15$  verschillende kortste routes.

Opmerkingen: Er is opgemerkt dat het Labyrint op het bord van Galton lijkt.

- poortje 0:  $\binom{6}{6} = \binom{6}{0} = 1$  mogelijk kortste route,

- poortje 1:  $\binom{6}{5} = \binom{6}{1} = 6$  mogelijk kortste routes,
- poortje 2:  $\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15$  mogelijk kortste routes,
- poortje 3:  $\binom{6}{3} = 20$  mogelijk kortste routes.

Voilà, het binomium van Newton:  $(a + b)^6$ .

**d)** We voegen nog een regel onderaan het labirint toe. Dus er komt één deurtje bij.

Het aantal kortste routes is  $\binom{7}{3} = \binom{7}{4} = 35$ . Er komen dus 15 kortste routes bij.

Het totaal aantal routes wordt:  $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$ .

Het extra aantal routes door de toevoeging van een regel is:  $8! - 7! = 7! (8 - 1) = 7 \cdot 7!$ .

#### **Opgave 6** van paragraaf 7, De Pincode

Een pincode bestaat uit 4 cijfers. Het cijfer 0 komt ook voor. Voorbeelden: 0017 en 9319.

**a)** Aantal verschillende pincodes.

Een wegendiagram:  $10^4$ , verschillende pincodes.

**b)** Aantal pincodes met vier verschillende cijfers.

Een boom:  $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{10!}{6!}$ , verschillende pincodes.

**c)** B. is de pincode vergeten. B. weet nog wel dat er twee 1'en, een 3 en een 9 in stonden. B. wil toch geld opnemen en toets een willekeurige pincode in met de genoemde cijfers.

Kans dat B. de juiste pincode intoetst.

Als de cijfers allemaal verschillend zijn, maar wel bekend dan zijn er 4! Mogelijkheden. We weten echter dat er twee 1'en zijn. Het aantal mogelijkheden is:  $\frac{4!}{2!} = 12$ . De kans op een juiste keuze is:  $\frac{1}{12}$ .

**d)** Aantal pincodes zonder nullen.

Negen getallen voor het wegen diagram:  $9^4$  verschillende pincodes.

**e)** Aantal pincodes met alleen nullen en enen, waarbij beide cijfers minsten één keer voorkomen.

Een wegendiagram waarbij de twee mogelijkheden, waarbij één van beide cijfers niet voorkomen, afvallen. Dus  $2^4 - 2 = 14$ , mogelijkheden.

**f)** Aantal pincodes met twee verschillende cijfers, bijvoorbeeld 9898.

Onder e) gaat het om nullen en enen. Nu algemener, de cijfers van nul tot en met negen.

We gaan eerst twee cijfers trekken. De volgorde doet er niet toe. Het gaat om de trekking van twee verschillende cijfers. Een ongeordende greep zonder herhaling voor twee verschillende cijfers uit 10  $\Rightarrow \binom{10}{2}$  mogelijkheden.

Reminder: de "2" in  $\binom{10}{2}$  heb je nodig om dubbeltellingen te voorkomen. Voorbeeld: als je al de cijfers 8 en 9 hebt, kun je de trekking 9 en 8 weglaten.

We hebben nu de twee cijfers en kunnen gebruik maken van het resultaat onder e).

Voor de resterende mogelijkheden hebben we een wegendiagram waarbij in het wegendiagram twee routes afvallen en wel die twee waarvoor alle cijfers gelijk zijn. Bijvoorbeeld: 9999 en 8888. Het aantal mogelijkheden dat resteert voor de twee cijfers is:

$$2^4 - 2 = 14.$$

Het totaal aantal pincodes bestaande uit twee verschillende cijfers is:  $\binom{10}{2} \cdot 14 = 630$ .

**g)** In Nederland zijn 20 miljoen bankpasjes in omloop.

Aantal mensen met dezelfde pincode:  $20 \frac{10^6}{10^4} = 2000$ .

- Maak de opgaven van paragraaf 5 en 6 (van de Wageningse Methode, 2015) en in ieder geval:
  - Opgaven 4, en 5 van paragraaf 6.

## Blok 1 Les 4 Combinatoriek en Rekenregels

- **Verzamelingen en kans**

$U$  is de verzameling van uitkomsten.

$\#U$  is het aantal elementen van  $U$ .

Een verzameling  $V$  is een deelverzameling van  $U$  als elk element van  $V$  ook een verzameling is van  $U$ .

Notatie:  $V \subset U$ .

In de kansrekening wordt  $V$  ook gebeurtenis genoemd.

Met  $\emptyset$  geef je de lege verzameling (onmogelijke gebeurtenissen) aan.

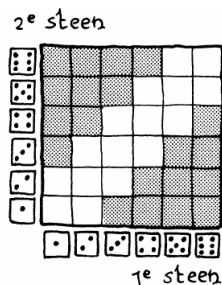
$\emptyset$  heeft geen elementen dus  $\#\emptyset = 0$ .

Voorbeeld

Je gooit met twee dobbelstenen.

$U$  is de verzameling getallenparen van 1 tot en met 6.

$V$  is de gebeurtenis: "Het verschil van het aantal ogen is minstens 2" (zie figuur).



$\#U = 36$  en  $\#V = 20$ .

Definitie:

$P(V) = \frac{\#V}{\#U}$  is de kans op gebeurtenis  $V$ . In bovenstaand voorbeeld:  $P(V) = \frac{20}{36}$ .

- **Verzamelingen en kans(vervolg)**

Gevolgen

-  $P(U) = \frac{\#U}{\#U} = 1$

-  $P(\emptyset) = \frac{0}{\#U} = 0$

-  $0 \leq P(V) \leq 1$ .

**Opgave 1 § 8**

Je gooit twee keer met één dobbelsteen

**a)**  $A$  is de gebeurtenis: "de som van de ogen is 10"  $\rightarrow 6,4; 4,6; 5,5$ .

$B$  is de gebeurtenis: "de som van de ogen is 11"  $\rightarrow 6,5; 5,6$ .

Bereken  $P(A)$ ,  $P(B)$  en  $P(A \text{ en/of } B)$ :

$P(A) = \frac{3}{36}$ ,  $P(B) = \frac{2}{36}$  en  $P(A \text{ en/of } B) = P(A \cup B) = \frac{5}{36}$ .

**b)** Bij deze opgave zie je:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow$  er is geen "overlap" in aantal ogen.

Dus:  $(A \cap B) = \emptyset$ .

**c)**  $E$  is de gebeurtenis: de eerste keer wordt zes gegooit.  $F$  is de gebeurtenis: de tweede keer wordt zes gegooit.

$P(E)$ : eerste keer een zes  $P(E) = \frac{1}{6}$ ,

$P(F)$  : de tweede keer een zes  $P(F) = \frac{1}{6}$ ,

$P(E \cup F)$ : twee keer achter elkaar een zes gooien. Let op: dit is dus niet  $P(E) + P(F)$ . Want dan tel je twee keer achter elkaar zes gooien één keer te veel en wel  $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$ .

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

d)  $P(E \cup F) \neq P(E) + P(F)$ .

e) In woorden: Twee gebeurtenissen,  $S$  en  $T$ , sluiten elkaar uit als er geen uitkomsten zijn die zowel tot  $S$  als tot  $T$  behoren.

Gebeurtenissen combineren:

$V$  is een gebeurtenis bij de uitkomstenverzameling  $U$  en

$W$  is een gebeurtenis bij de uitkomstenverzameling  $U$ .

$V \cap W$  is de nieuwe gebeurtenis die alle uitkomsten van  $V$  en  $W$  bevat.

$V \cup W$  is de nieuwe gebeurtenis die alle uitkomsten van  $V$  en/of  $W$  bevat.

$V$  en  $W$  sluiten elkaar uit als  $(V \cap W) = \emptyset$ .

- **Verzamelingen**

Voorbeeld

$U$  is de verzameling uitkomsten bij het werpen met twee dobbelstenen.

$A$  is de gebeurtenis: de ogen zijn gelijk,

$B$  is de gebeurtenis: de som van het aantal ogen is minstens 10.

Dus

$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

$$B = \{(4,6), (6,4), (5,5), (5,6), (6,5), (6,6)\}$$

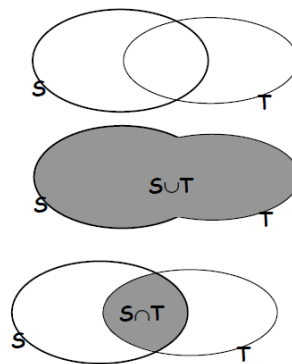
$$A \cap B = \{(5,5), (6,6)\}$$

$$A \cup B = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (4,6), (6,4), (5,5), (5,6), (6,5), (6,6)\}$$

$A$  en  $B$  sluiten elkaar niet uit.

- **Verzameling en kans**

Opgave 3, § 8



- Waarom geldt:  $\#(S \cup T) = \#S + \#T - \#(S \cap T)$ ?

In bovenstaande figuur, Venndiagrammen, wordt duidelijk dat de dubbeltelling in de overlap van  $S \cup T$  er af getrokken moet worden.

- Bewijs nu dat  $P(S \cup T) = P(S) + P(T) - P(S \cap T)$ .

Met de definitie van kansen en de uitkomst ruimte  $S \cup T$ :

$$P(S \cup T) = \frac{\#(S \cup T)}{\#(S \cup T)} = 1 = \frac{\#S + \#T - \#(S \cap T)}{\#(S \cup T)} = \frac{\#S}{\#(S \cup T)} + \frac{\#T}{\#(S \cup T)} - \frac{\#(S \cap T)}{\#(S \cup T)}.$$

In het bijzonder:

$P(S \cup T) = P(S) + P(T)$ , als  $S$  en  $T$  elkaar uitsluiten, geen overlap.

## • Voorwaardelijke kans

**Opgave 4 § 8 Dobbelstenen:**

$U$  is de verzameling uitkomsten van twee keer werpen met een dobbelsteen.

**a)**  $A$  is de gebeurtenis: de som van het aantal ogen is even,

$B$  is de gebeurtenis: de som van het aantal ogen is minstens 8.

$P(B|A)$  is de kans dat de som van het aantal ogen minstens 8 is, terwijl je weet dat die som even moet zijn. Dit is de voorwaardelijke kans op  $B$  onder de voorwaarde  $A$ .

In dit geval neem je  $A$  als de uitkomst ruimte.

$$\text{Dus } P(B|A) = \frac{\#(B \cap A)}{\#A} = \frac{\frac{\#(B \cap A)}{\#U}}{\frac{\#A}{\#U}} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}.$$

Nu ga je tellen. Maar pas op.

De som van aantal ogen is even. Tellen: gebeurtenis  $A$  kan 18 keer.

Dan  $B$ : (2,6)(3,6)(4,6)(5,6)(6,6)(3,5)(4,5)(5,5)(6,5)(6,4)(5,4)(4,4)(5,3)(6,3)(6,2), 15 keer.

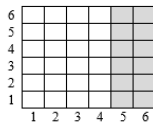
Nu  $B \cap A = (2,6)(4,6)(6,6)(3,5)(5,5)(6,4)(4,4)(5,3)(6,2)$ , 9 keer.

Hiervan vallen er nogal wat af. Het eerste cijfer tussen haakjes is de eerst geworpen dobbelsteen.

We hebben voor  $P(B|A)$ :  $\frac{9}{18}$ .

**b)**  $A$  is de gebeurtenis: de som van het aantal ogen is even,

$C$  is de gebeurtenis: De eerste keer wordt meer dan 4 gegooit met één dobbelsteen.



$C = \{(5,1), \dots, (5,6), (6,1), \dots, (6,6)\}$ ,  $\#C = 12$ .

$A$ : de som van het aantal ogen is even geeft een aantal mogelijkheden van 18. Daar vallen er vanaf onder de voorwaarde  $C$ .

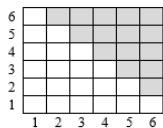
Dus,  $A \cap C = (5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6)$ .

Kans op  $A$  onder de voorwaarde  $C$ :  $P(A|C)$

$$P(A|C) = \frac{\#A \cap C}{\#C} = \frac{6}{12}.$$

**c)**  $U$  is de verzameling uitkomsten bij twee keer werpen met een dobbelsteen.

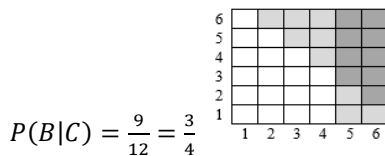
$B$  is de gebeurtenis: De som van het aantal ogen is minstens 8. Zie onderstaande figuur



$C$  is de gebeurtenis: De eerste keer wordt meer dan 4 gegooit met één dobbelsteen.

$C = \{(5,1), \dots, (5,6), (6,1), \dots, (6,6)\}$ ,  $\#C = 12$ .

$B \cap C = \{(5,3), \dots, (5,6), (6,2), \dots, (6,6)\}$ ,  $\#(B \cap C) = 9$ .



$$P(B|C) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

## • Afhangelijke en Onafhankelijke kansen

Voorbeeld

### Opgave 7, 8 en 9 van § 8

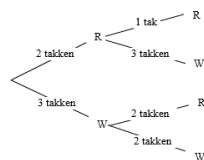
In een vaas zitten twee rode en drie witte ballen. Je trekt twee keer een bal **zonder** terugleggen.  $S$  is de gebeurtenis: de eerste bal is rood.  $T$  is de gebeurtenis: de tweede bal is rood.

a) De kans dat de tweede bal rood is:  $P(T)$ , dus zonder voorwaarde.

- We analyseren het boomdiagram hieronder.

We "lopen" langs de bovenste tak: twee rode ballen uit vijf ballen; een fractie van  $2/5$ . Eén rode bal wordt getrokken. Er blijft nog één rode over met drie witte:  $1/4$  is de kans dat deze wordt getrokken. Dus de kans dat de tweede rode bal wordt getrokken is:  $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$ . Maar dat is nog niet alles. We hebben nog een kans. Er zijn twee takken voor de rode bal. We hebben er één geanalyseerd. Nu de andere tak/route. We hebben drie takken: twee rood en drie wit: de kans op de andere route is  $3/5$  bal. Er zijn nog vier takken: 2 rood en 2 wit. De kans op de tweede bal rood, want je hebt nu al een witte, is  $2/4$ . Totaal voor de onderste route:  $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$ .

Het resultaat  $P(T) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2}{5}$ .



Totaal:  $2 \times 4 + 3 \times 4 = 20$  takken

- Nu zonder bovenstaande bomen en vertakkingen, twee rode ballen en drie witte ballen. We gaan weer de kans dat de tweede getrokken bal weer een rode bal is, uitrekenen.

**Eerste** trekking een rode bal. De kans daarop is  $2/5$ . Er zijn nog vier ballen waarvan één rode. De tweede trekking een rode bal. De kans daarop is  $1/4$ . De kans dat de tweede bal een rode is als de eerste trekking een rode is, is  $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$ .

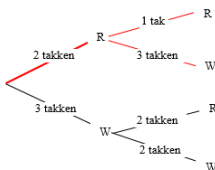
**Eerste** trekking een witte bal. De kans daarop is  $3/5$ . Er zijn nog vier ballen waarvan twee rode. De tweede trekking een rode bal. De kans daarop is  $1/2$ . De kans dat de tweede bal een rode is als de eerste trekking een witte is, is  $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$ .

De totale kans dat je bij de tweede trekking een rode bal hebt, zonder voorwaarde is:  $P(T) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{2}{5}$ .

b)  $P(S \cap T)$ : de kans dat de eerste trekking een rode bal is. De kans daarop is  $2/5$ . Er zijn nog vier ballen waarvan één rode. De tweede trekking een rode bal. De kans daarop is  $1/4$ . De kans dat de tweede bal een rode is als de eerste trekking een rode is, is  $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10} \Rightarrow P(S \cap T) = \frac{1}{10}$ .

Dit hebben we al onder a) gevonden.

c)  $P(T|S)$ : de tweede bal is rood terwijl de eerste ook rood is.  $P(T|S) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ .



Totaal:  $2 \times 4 = 8$  rode takken

Klopt: wanneer je ervan uit gaat dat de eerste bal rood moet zijn, dan zit er 1 rode bal bij de vier overgebleven ballen. De bovenstaande kans bomen illustreren dit voorbeeld. Je zit dus op de rode takken. Totaal 8 takken. Er worden twee ballen getrokken:  $2/8$ . Maar ook: pas de rekenregel toe:

$$P(T|S) = \frac{P(S \cap T)}{P(S)} = \frac{1/10}{2/5} = \frac{1}{4}.$$

Het bovenstaande experiment wordt herhaald **met** teruglegging.

In een vaas zitten twee rode en drie witte ballen.

Je trekt twee keer een bal **met** terugleggen.

$S$  is de gebeurtenis: de eerste bal is rood.

$T$  is de gebeurtenis: de tweede bal is rood.

$T|S$ : de tweede bal is rood terwijl de eerste ook rood is.

**a)** Bereken  $P(S)$ ,  $P(T)$ ,  $P(S \cap T)$ .

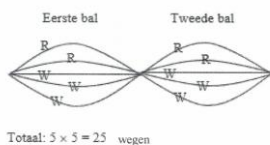
De kans  $P(S)$ : 2 rode ballen en 3 witte ballen, de eerste bal rood  $P(S) = \frac{2}{5}$ .

De kans  $P(T)$ : de tweede bal is rood. In het onderstaande wegendiagram zijn er  $5^2$  mogelijkheden. De voorwaarde is nu niet dat de eerste bal rood moet zijn, maar het mag natuurlijk wel. Nu de vraag, wat is de kans dat de tweede bal rood is zonder de voorwaarde dat de eerste rood is. De uitkomst ruimte is nu 25. Voor de tweede bal rood leiden er 5 wegen naar de twee rode wegen in het rechterdeel van het wegen diagram  $\rightarrow 5 \cdot 2$  mogelijkheden. De kans op een tweede rode bal zonder de voorwaarde dat de eerste rood moet zijn:

$$P(T) = \frac{5 \cdot 2}{5^2} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}.$$

Nu onder de voorwaarde  $S$ :  $P(T|S)$ .

We bekijken weer het wegendiagram:



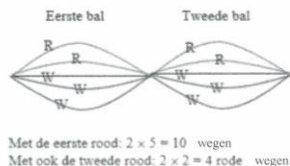
Een wegendiagram met 25 mogelijke routes.

Voor de eerste rode bal  $\rightarrow 2 \times 5$  wegen. Dus 10 mogelijkheden.

De uitkomst ruimte is  $U = 10$ . De tweede bal rood onder de voorwaarde van de eerste bal rood:  $V = 4$  mogelijkheden. Een wegendiagram van  $2 \times 2$  wegen.

$$P(T|S) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

In dit geval blijkt  $P(T|S) = P(T)$ .



Twee gebeurtenissen  $T$  en  $S$  zijn onafhankelijk als  $P(T|S) = P(T)$ .

$$\text{Gevolg: } P(T) = P(T|S) = \frac{P(T \cap S)}{P(S)}.$$

$$\text{Dus: } P(T \cap S) = P(T) \cdot P(S).$$

In woorden:

Bij onafhankelijke kansen kun je de afzonderlijke kansen vermenigvuldigen.

$$\text{Dus } P(T \cap S) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}.$$

**b)** In opgave 7 (zie boven, zonder teruglegging) vind je  $P(T|S) \neq P(T)$ , in opgave 8 (zie boven met teruglegging),  $P(T|S) = P(T)$ . In opgave 7 verandert de kans op  $T$  als je die onder de voorwaarde  $S$  bekijkt, omdat  $S$  en  $T$  in die opgave afhankelijk zijn. In opgave 8 verandert die kans niet, omdat  $S$  en  $T$  in die opgave onafhankelijk zijn.

## Oefenen en uitgewerkte Oefenopgave.

### Opgave 2 van §8:

Kranten. Van een groep mensen leest 30% krant V, 20% leest krant N en 57% leest geen krant.

-  $V$  is de gebeurtenis  $\Rightarrow$  die persoon leest krant V,

-  $N$  is de gebeurtenis  $\Rightarrow$  die persoon leest de krant  $N$ .

**a)** Sluiten de gebeurtenissen  $N$  en  $V$  elkaar uit?

Neen, want zoals je kunt vaststellen is het totale percentage groter dan 100%. Er zijn een aantal personen die beide kranten lezen.

**b)** Het percentage krantenlezers dat beide kranten leest:  $107\% - 100\% = 7\%$ .

**c)**  $P(V) = \frac{30}{100} = 0.3$ ;  $P(N) = \frac{20}{100} = 0.2$ ;  $P(V \cap N) = \frac{7}{100} = 0.07$ ;  $P(V \cup N) = \frac{50-7}{100} = 0.43$ .

**d)** Het verband tussen de kansen onder c).

$$\#V + \#N - \#(V \cap N) = \#(V \cup N).$$

### Opgave 5 van §8

A. passeert op weg naar school twee verkeerslichten(stoplichten). Deze werken onafhankelijk van elkaar. Voor het eerste verkeerslicht moet A. met 30% kans wachten, voor het tweede verkeerslicht met 20% kans. Op school vertelt A. voor één verkeerslicht te hebben gewacht.

De kans dat dit voor het eerste verkeerslicht was, gaan we nu berekenen.

A. heeft voor één stoplicht gewacht.

- Als het wachten voor het eerste stoplicht was, dan kan er bij de tweede worden doorgereden. De kans om te moeten stoppen is dan:  $0.3 \cdot (1 - 0.2) = 0.24$ .

- Als het wachten voor het tweede stoplicht was, dan kan er bij het eerste stoplicht worden doorgereden. De kans om te moeten stoppen is in dit geval:  $(1 - 0.3) \cdot 0.2 = 0.14$ .

De totale kans om voor één stoplicht te moeten wachten is  $0.24 + 0.14 = 0.38$ .

Hier uit volgt dat de kans om voor het eerste stoplicht te moeten wachten, onder de voorwaarde dat voor één stoplicht moet worden gewacht, is:  $\frac{0.24}{0.38} = \frac{12}{19}$ .

Nota bene: Er is ook nog de kans dat A. voor beide stoplichten moet wachten. Deze kans is:  $0.3 \cdot 0.2$ . Verder is er ook nog de kans dat A. voor geen van beide stoplichten moet wachten:  $(1 - 0.3) \cdot (1 - 0.2) = 0.56$ . Spelen deze kansen ook nog een rol? Neen. De vraagstelling is: "wat is de kans dat A. voor het eerste stoplicht moet wachten?".

Er zijn twee gebeurtenissen:

- Gebeurtenis B: A. moet wachten voor het eerste stoplicht:  $P(B) = 0.3$ .

- Gebeurtenis C: A. moet wachten voor één van de stoplichten:  $P(C) = 0.38$ , zoals bovenstaand is uitgerekend.

De gebeurtenis  $B \cap C$  is de situatie waarin A. hoeft te wachten voor het eerste stoplicht. De kans daarop:  $P(B \cap C) = 0.3 \cdot (1 - 0.2) = 0.24$ . Dit hebben we bovenstaand ook al uitgerekend. De voorwaarde dat A. voor één stoplicht hoeft te wachten is gebeurtenis C:  $P(C) = 0.38$ . We hebben alle ingrediënten. In formule:

$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{0.24}{0.38} = \frac{12}{19}.$$

### Opgave 6 van § 8:

Is lucifers trekken eerlijk?

Bij luciferstrekken tussen 4 spelers, houdt één van hen vier lucifers in de hand waarvan er één lucifer korter is dan de andere drie. Maar dat kun je niet zien als je naar de vier stukjes kijkt die zichtbaar zijn. Om beurten trekken de drie anderen een lucifer tot de kortere lucifer getrokken is. De speler die de korte lucifer trekt heeft verloren. Als de kortere lucifer niet getrokken wordt, verliest de speler die de lucifers vasthield.

**a)** Wat is de kans dat de eerste speler de kortere lucifer trekt? Er zijn nog 4 lucifers. De kans dat de eerste speler de kortere lucifer trekt is  $\frac{1}{4}$ .

**b)** Wat is de kans dat de derde speler de kortere lucifer trekt?

We gaan de rij af. Eerst, wat is de kans dat de tweede speler de kortere lucifer trekt? De eerste gedachte is misschien: er zijn nog 3 lucifers. De kans is dus  $\frac{1}{3}$ . Helaas, dit is niet goed. De eerste speler kan de kortere lucifer al getrokken hebben. De kans daarop

is  $\frac{1}{4}$ . Voor de tweede trekking is sprake van een voorwaarde: de kans dat de eerste speler de kortere lucifer niet trekt:  $\frac{3}{4}$ . De kans dat de tweede speler de kortere lucifer trekt is dus:  $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ .

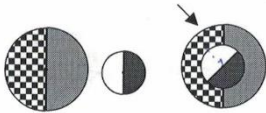
De kans dat de tweede speler de lucifer niet krijgt is  $2/3$ .

Nu de kans voor de derde speler om de kortere lucifer te trekken. Er zijn nog twee lucifers aanwezig. De kans voor de derde speler is dan:  $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ .

c) Is het spel eerlijk? Elke speler heeft een gelijke kans,  $1/4$ , om de kortere lucifer te trekken. Het spel is eerlijk.

#### Opgave 10 van § 8

Twee kartonnen schijfjes worden op elkaar geplakt. De schijf die zo gemaakt is, wordt gedraaid en op een willekeurig moment gestopt. Zie figuur hieronder:



Er wordt genoteerd wat de pijl aanwijst. Dat kan zijn Z(zwart), W(wit), G(grijs) en B(blokjes). In de figuur wordt B en W aangewezen. De kans daarop is  $\frac{3}{8}$ , een gegeven.

a)  $P(B|Z)$ ,  $P(G|Z)$  en  $P(W|Z)$ ?

Wat weten we?  $P(B \cap W) = \frac{3}{8}$ . Verder,  $P(Z) = \frac{1}{2}$ ,  $P(W) = \frac{1}{2}$ ,  $P(G) = \frac{1}{2}$ , en  $P(B) = \frac{1}{2}$ .

Dus, bijvoorbeeld  $P(B|W) = \frac{P(B \cap W)}{P(W)} = \frac{3/8}{1/2} = \frac{3}{4}$ , en  $P(W|B) = \frac{P(B \cap W)}{P(B)} = \frac{3/8}{1/2} = \frac{3}{4}$ .

Nu we  $P(B|W)$  hebben bepaald, heb je ook  $P(G|Z)$ . Hoe? Symmetrie in de Figuur:  $P(G|Z) = P(B|W) = \frac{3}{4}$ . Dan vind je ook  $P(B|Z)$ . Bekijk de Figuur maar weer:  $P(B|Z) + P(G|Z) = 1 \Rightarrow P(B|Z) = 1 - P(G|Z) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ .

Er resteert nog  $P(W|Z)$ : de kans op wit onder de voorwaarde zwart is natuurlijk 0.  $P(W \cap Z) = 0$ .

b) Zijn zwart (Z) en blokjes(B) onafhankelijk?

De theorie: Twee gebeurtenissen  $T$  en  $S$  zijn onafhankelijk als  $P(T|S) = P(T) \Rightarrow P(T) = P(T|S) = \frac{P(T \cap S)}{P(S)} \Rightarrow P(T) \cdot P(S) = P(T \cap S)$ . Wat leren wij hieruit? Voor onafhankelijkheid moet gelden:  $P(B|Z) = P(B)$ . Uit wat we berekend hebben, volgt  $P(B|Z) \neq P(B) \Rightarrow \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}$ .

c) De twee schijfjes zo op elkaar plakken dat Z en B onafhankelijk zijn. Dus  $P(B|Z) = P(B) = \frac{1}{2}$ .

We hebben onder a) :  $P(B|Z) + P(G|Z) = 1$ . Dit betekent dat de schijfjes zo geplakt moeten worden dat  $P(G|Z) = \frac{1}{2}$ . Dat bereiken we door Z en W gelijkelijk te verdelen over B en G. Zie onderstaande Figuur.



#### Opgave 11 van § 8

Er wordt twee keer met een dobbelsteen gegooid.

A is de gebeurtenis: met de eerste steen wordt hoger dan 4 gegooid, dus 5 of 6.

B is de gebeurtenis: de som van de ogen is lager dan 6, dus  $\leq 5$ .

C is de gebeurtenis: de som van de ogen is even.

a) Zijn A en B onafhankelijk?

A de eerste steen meer dan 4:  $\{(5,1), (5,2), \dots, (5,6), (6,1), (6,2), \dots, (6,6)\}$ ,  $\#A = 12$ ,  $P(A) = \frac{12}{36}$ .

B de som van de ogen is lager dan 6:  $\{(1,4), (1,3), (1,2), (1,1), (2,3), (2,2), (2,1), (3,1), (3,2), (4,1)\}$ ,  $P(B) = \frac{10}{36}$ .

Van A leren we dat de som van de ogen  $\geq 6$ .

Conclusie :  $(A \cap B) = \emptyset$ .  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0}{10/36} = 0 \neq P(A) = \frac{12}{36} \Rightarrow A$  en  $B$  zijn afhankelijk.

b) Zijn B en C onafhankelijk?

C de som van de ogen is even:  $\#C = 18$ ,  $P(C) = \frac{1}{2}$ .

$(B \cap C) = \{(1,3), (1,1), (2,2), (3,1)\}$ .

Conclusie :  $P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{2}{9} \neq P(B) = \frac{5}{18} \Rightarrow B$  en  $C$  zijn afhankelijk.

c) Zijn  $A$  en  $C$  onafhankelijk?

$$(A \cap C) = \{(5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6)\}, P(A \cap C) = \frac{6}{36}.$$

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3} = P(A) \Rightarrow A \text{ en } C \text{ zijn onafhankelijk.}$$

- **Oefenen**

Opgaven van § 8 (De Wageningse Methode 2015).

### Blok 1 Toets Combinatoriek en Rekenregels

1) Aantal permutaties van 4 uit 10.

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

$$2) \frac{81!}{79!6!} = \frac{81 \cdot 80}{6!} = \frac{81 \cdot 8}{72} = 9.$$

$$3) \binom{50}{47} = \binom{50}{3} \Rightarrow \frac{50!}{47!3!} = \frac{50!}{3!47!}.$$

In woorden: Het aantal manieren waarop je 47 objecten uit 50 objecten kiest, is gelijk aan het aantal manieren waarop je de overige drie objecten niet kiest.

4) In een assenstelsel zijn de coördinaten gegeven van de punten:  $P(2,3)$  en  $Q(8,8)$ .

Het aantal kortste routes van  $P$  naar  $Q$ : in een rooster zes stappen naar rechts en 5 stappen omhoog. Dit is hetzelfde als te beginnen in de oorsprong van het assenstelsel  $(0,0)$  naar het punt met coördinaten  $(6,5) \Rightarrow \binom{11}{6}$ .

Met de grafische rekenmachine:  $11nCr6 \Rightarrow 462$  kortste routes.

5) In een assenstelsel zijn de coördinaten gegeven van de punten:  $P(2,3)$  en  $Q(8,8)$ .

Het aantal kortste routes van  $P$  naar  $Q$  via het punt  $T(4,4)$ .

Van  $P$  naar  $T$  is hetzelfde als van  $(0,0)$  naar het punt met coördinaten  $(2,1)$ :  $\binom{3}{2} = 3$  kortste routes.

Van  $T$  naar  $Q$  is hetzelfde als van  $(0,0)$  naar het punt met coördinaten  $(4,4)$ :  $\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!} = 70$  kortste routes. Of met de grafische rekenmachine:  $8nCr4=70$ .

Totaal aantal kortste routes  $3 \cdot 70 = 210$ .

6) Een groep bestaat uit 12 meisjes en 15 jongens. Uit de groep van 27 personen wordt een feestcommissie samengesteld bestaande uit 2 meisjes en 2 jongens.

Het aantal manieren waarop een feestcommissie kan worden samengesteld:

$$\text{Het is een ongeordende greep zonder herhaling: } \binom{15}{2} \cdot \binom{12}{2} = 7 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 11 = 6930 \text{ feestcommissies.}$$

Uiteraard ook weer te berekenen met de Grafische Rekenmachine:  $(15nCr2) \cdot (12nCr2)$ .

7) De feestcommissie uit 6) vindt dat er een promotiefilmpje gemaakt moet worden door de **overige**, dus 23 groepsleden. Er zijn enkele voorwaarden: i) een vrouwelijke regisseur, ii) een mannelijke camerapersoon, en drie acteurs (mannelijk zowel als vrouwelijk). Verder weet de feestcommissie dat Jan niet met een camera overweg kan, en Elisa wat camera schuw is- zij wil geen acteur worden.

Het aantal manieren waarop de filmploeg kan worden samengesteld:

Voor de regisseur:  $12 - 2 = 10$ , mogelijke kandidaten.

Voor de camerapersoon:  $15 - 2 - 1 = 12$ , mogelijke kandidaten (Jan valt af).

Aantal mogelijke acteurs:  $23 - 2 = 21$ , als Elisa regisseur is geworden, of  $23 - 2 - 1 = 20$ , als Elisa geen regisseur is geworden, want zij wil geen acteur zijn.

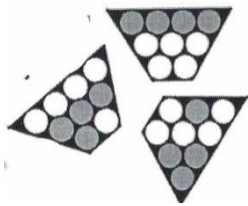
mogelijkheden voor de filmploeg

- met Elisa als regisseur:  $10 \cdot 12 \cdot 20 = 2520$ ,

- zonder Elisa als regisseur:  $10 \cdot 12 \cdot 20 = 2400$ .

8) In de dozen, onderstaande figuur, zitten per doos 9 biljartballen, 4 rode en 5 witte ballen. In de figuur zijn drie

van alle mogelijke vulpatronen getekend.



Een vaasmodel, het soort greep/trekking, en het aantal mogelijkheden.

Vul de vaas met de nummers 1 tot/m 9. Je trekt viermaal een nummer zonder terugleggen. Je let niet op de volgorde (een ongeordende greep/trekking). De getrokken nummers stellen de plaatsen, in de doos, van de vier rode ballen voor. De plaatsen van de witte ballen liggen dan vast. Een wel/niet rooster. Dus  $\binom{9}{4} = 9 \cdot 7 \cdot 2 = 126$ , mogelijkheden.  $9nC4$ .

**9)** Eén van de witte ballen wordt vervangen door een zwarte bal. Het aantal mogelijke vulpatronen verandert. Je kan een witte bal 5 keer vervangen. Het aantal mogelijkheden neemt met een factor 5 toe. Dus  $5 \cdot 126 = 630$ .

**10)** De kans dat een zwarte bal in een rijtje met twee ballen terecht komt.

Het aantal beschikbare plekken is met één plek afgenomen, er moet een zwarte bal op één van de twee bovenste plaatsen terecht komen. Dus  $\binom{8}{4} = 7 \cdot 5 \cdot 2 = 70$  mogelijkheden om de ballen te rangschikken. Echter, er zijn twee plekken. Het aantal mogelijkheden wordt daardoor:  $2 \cdot 70 = 140$ .

De kans dat op één van de twee bovenste plaatsen een zwarte bal terecht komt is:  $\frac{140}{630} = \frac{2}{9}$ .

**11)** Van een tweetal vitrines heeft er één een rode ondergrond, terwijl de andere een zwarte heeft. De vitrines gaan gevuld worden met acht verschillende merken horloges.

Aantal manieren waarop de acht merken over de twee vitrines verdeeld kunnen worden.

Een wegendiagram met bijvoorbeeld twee uitersten: alle merken in de enen of de andere vitrine. Verder met alle tussenliggende mogelijkheden. Voor elk merk is er een keuze uit twee vitrines: Totaal  $2^8 = 256$  mogelijke verdelingen.

**12)** In elke vitrine ligt minstens één merk.

Aantal manieren waarop de merken over de vitrines kunnen worden verdeeld.

Twee mogelijkheden vallen af: de rode vitrine leeg of de zwarte vitrine leeg:  $256 - 2 = 254$  mogelijke verdelingen.

**13)** Zo verdelen over de vitrines dat er minsten vier merken in de rode vitrine komen en vier merken in de zwarte vitrine.

Neem vier merken voor de rode vitrine, dan heb je ook de vier merken voor de zwarte vitrine. Dus twee keer vier merken; een greep zonder op de volgorde te letten en zonder terugleggen:  $\frac{8!}{4!4!} = \binom{8}{4} = 7 \cdot 5 \cdot 2 = 70$  of  $8nC4$ .

**14)** In elke vitrine liggen minstens 3 merken. Let op, dus 4 of 5 horloges kan ook. We krijgen dan de som van een aantal mogelijkheden:  $\binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} = \binom{8}{4} \cdot \frac{13}{5} = 70 \cdot \frac{13}{5} = 14 \cdot 13 = 182$ .

Met de grafische rekenmachine:  $8nC3 + 8nC4 + 8nC5 = 2 \cdot 8nC3 + 8nC4 = 2 \cdot 56 + 70 = 182$ .

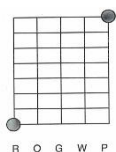
**15)** De bloemen staan in bloei. Rode(R), oranje(O), gele(G) witte(W) en paarse(P) bloemen in overvloed. S. plukt een boeket met 7 bloemen, zonder voorkeur. Dat is natuurlijk bijzonder.

Aantal verschillende boeketten.

Een vaasmodel met vijf kleuren. Zevenmaal een ongeordende greep (volgorde is niet van belang) met herhaling. Dus in het boeket zitten bloemen met dezelfde kleur.

Een rooster waarin horizontaal de kleuren worden aangegeven en verticaal het te kiezen aantal. Het rooster wordt 4 bij 7 groot. Zie hieronder.

Totaal  $11nC7=330$  mogelijkheden.



**16)** Het rooster wordt aangepast. Nu met één kleur minder: paars(P). S wil in ieder geval twee gele(G) bloemen in het boekje hebben.

Aantal verschillende boeketten met zeven bloemen.

Bovenstaand rooster wordt aangepast. Je begint linksonder met geel. Daarvan moet je er twee hebben. Die liggen dus vast. Het rooster wordt nu 3 bij 5 groot. Dat geeft een totaal van  $8nC5=56$  mogelijkheden.

**17)** De kans dat S. met een boekje met drie gele bloemen thuiskomt. Dus geen paarse bloemen meer.

Het rooster wordt nu 3 bij 4 groot. Het aantal mogelijkheden is  $7nC4= 35$ .

De kans is  $\frac{35}{56} = \frac{5}{8}$ .

**18)** Uit een volledig kaartspel van 52 kaarten wordt een kaart getrokken.

# A: De kaart is een schoppen kaart.

# B: Op de kaart staat een even getal.

$P(A|B)$ : #A =  $\frac{52}{4} = 13$ , en #B =  $\frac{52-12}{2} = 20$ . Dus  $\#(A \cap B) = 5$ , (10,8,6,4,2).

Met deze ingrediënten:  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{5/52}{20/52} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ , en  $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{5/52}{13/52} = \frac{5}{13}$ .

**19)** Zijn de #A en #B onafhankelijk?

$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A) = P(A|B) \Rightarrow \#A$  en  $\#B$  zijn onafhankelijk.

## Blok 2 Logica

### Blok 2 Les 1 definities en waarheidstabellen. Propositielogica

Deze les sluit aan bij les 1 van de syllabus Logica WD\_online

- De taal van de wiskunde

De taal van de wiskunde streeft naar een zo duidelijk mogelijke exactheid. Dit betekent dat zo precies mogelijk wordt vastgelegd wat de eigenschappen zijn van wiskundige objecten en begrippen. Van sommige begrippen, zoals punt en lijn, gebeurt dat niet. Dat zijn grondbegrippen. Een grondbegrip(axioma) doet een beroep op onze intuïtie. Een axioma (postulaat) is een propositie die van nature als waar wordt aangenomen. Een grondbegrip is niet helemaal hetzelfde als een axioma. Het verschil is subtiel en hier niet van belang.

Daarnaast kent de wiskundige taal een aantal gedragsregels die vastleggen op welke manier met de taal wordt omgegaan. Die regels zijn onderdeel van de wiskundige logica.

- Definities

Met een definitie leg je precies de betekenis vast van wiskundige objecten. Dit zijn afspraken waarbij je alleen gebruik mag maken van grondbegrippen(axioma's) en al eerder gedefinieerde begrippen.

De definitie van een gelijkzijdige driehoek zou kunnen zijn:

*“Een gelijkzijdige driehoek is een driehoek waarvan de drie zijden gelijke lengtes hebben”*. In deze definitie herken je de grondbegrippen driehoek, zijde en lengte. De definitie legt dus vast wat in de wiskunde wordt bedoeld met het woord *“gelijkzijdig”*.

- **Propositie**

Een propositie is een uitspraak over een feit. Het is een grondbegrip. Een propositie is een bewering die waar of onwaar is (er is geen derde mogelijkheid).

De waarheid kan op objectieve wijze worden vastgesteld (staat dus los van je eigen mening). Het kan zijn dat je de waarheid nog niet weet of de propositie waar is, maar er bestaat een onafhankelijke manier om de waarheid eventueel vast te kunnen stellen.

Non-voorbeeld:

- Een bevel of een vraag is geen propositie.

Een propositie waarvoor een wiskundig bewijs bestaat noem je een (wiskundige) *stelling*.

Voorbeeld:

- De stelling van Pythagoras.

Vaak wordt in het bewijs van een stelling gebruik gemaakt van eerdere definities en eerder bewezen stellingen volgens strikte regels. Die regels leggen vast hoe je proposities kunt combineren en aanpassen.

Naast grondbegrippen zoals 'punt', 'lijn', 'driehoek', worden sommige proposities van nature als waar aangenomen. Ze hebben geen bewijs nodig omdat ze intuïtief voor waar worden aangenomen. Ze worden *axioma's* of postulaten genoemd.

Voorbeelden van axioma's:

- Je kunt één lijn trekken door twee verschillende punten.

- Je kunt een cirkel tekenen bij een gegeven middelpunt en straal.

- Bij een gegeven lijn en een punt buiten die lijn, kun je één lijn tekenen die evenwijdig is met de gegeven lijn.

Een propositie heeft *waarheidswaarde* (1 of 0)

- Een propositie is waar  $\rightarrow$  waarde = 1

- Een propositie is niet waar  $\rightarrow$  waarde = 0

- **Propositie veranderen**

Een **negatie** van een propositie  $P$  (ontkenning):

$$P \rightarrow \neg P$$

Note: In the English textbooks on Logic  $\neg$  is represented by  $\sim$ . So,  $P \rightarrow \sim P$ .

De definitie van de negatie weergegeven in een **waarheidstabel** is:

| $P$ | $\neg P$ |
|-----|----------|
| 1   | 0        |
| 0   | 1        |

De negatie is een belangrijk hulpmiddel bij het programmeren van computers of rekenmachines. In die context wordt meestal het woordje NOT gebruikt.

De **conjunctie**:

Uit twee proposities  $P$  en  $Q$  een nieuwe maken:  $P \wedge Q$  (AND)

Voorbeeld

$P$ : De zon schijnt

$Q$ : Het regent.

$P \wedge Q$ : De zon schijnt en het regent.

Note: in the English textbooks on Logic  $\wedge$  is represented by &. So,  $P \& Q$ .

De waarheid van  $P \wedge Q$  hangt af van de waarheid van  $P$  en van  $Q$ .

$P \wedge Q$  is waar als  $P$  waar is en als  $Q$  waar is.

De waarheid van de conjunctie  $P \wedge Q$  is vastgelegd in onderstaande waarheidstabel:

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ |
|-----|-----|--------------|
| 0   | 0   | 0            |
| 0   | 1   | 0            |
| 1   | 0   | 0            |
| 1   | 1   | 1            |

Er zijn vier gevallen te onderscheiden in bovenstaande tabel. In slechts één van deze gevallen is de conjunctie  $P \wedge Q$  waar.

De **disjunctie** (inclusief **of**):

Uit twee proposities  $P$  en  $Q$  een nieuwe maken:  $P \vee Q$  (OR).

Voorbeeld:

$P$ : De zon schijnt

$Q$ : Het regent.

$P \vee Q$ : De zon schijnt of het regent.

De waarheid van  $P \vee Q$  hangt af van de waarheid van  $P$  en van  $Q$ .

$P \vee Q$  is waar als  $P$  waar is of  $Q$  waar is (of beide).

De definitie met waarheidstabel is:

| $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ |
|-----|-----|------------|
| 0   | 0   | 0          |
| 0   | 1   | 1          |
| 1   | 0   | 1          |
| 1   | 1   | 1          |

In computertoepassingen wordt de disjunctie (inclusief **of**) aangegeven door OR.

In het dagelijks taalgebruik blijkt uit de context welke betekenis het woordje “of” heeft. In de wiskunde kunnen we dit niet gebruiken. Vandaar dat in de logica twee betekenissen voor “of” bestaan: inclusief of exclusief. Het inclusief “**of**” wordt veelal disjunctie genoemd.

De **disjunctie** (exclusief-**of**):

Voor exclusief-of zijn verschillende symbolen in omloop. Hier wordt  $\Delta$  gebruikt. Uit twee proposities  $P$  en  $Q$  een nieuwe maken:  $P \Delta Q$  (XOR).

Voorbeeld

$P$ : Ik ben jonger dan 70 jaar.

$Q$ : Ik ben ouder dan 70 jaar.

$P \Delta Q$ : Ik ben jonger of ouder dan 70 jaar.

De waarheid van  $P \Delta Q$  hangt af van de waarheid van  $P$  en van  $Q$ .

$P \Delta Q$  is waar als  $P$  waar is of  $Q$  waar is (niet tegelijk).

De definitie met waarheidstabel is:

| $P$ | $Q$ | $P \Delta Q$ |
|-----|-----|--------------|
|-----|-----|--------------|

|   |   |   |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

In computertoepassingen wordt de inclusieve disjunctie aangegeven door XOR .

### De implicatie:

Notatie  $P \Rightarrow Q$  (IF ...THEN)

Voorbeeld

$P$ : Ik heb geen onvoldoenden

$Q$ : Ik ga over naar klas 5.

Dit is een samenstelling van twee proposities.

$P \Rightarrow Q$ : Als ik geen onvoldoenden heb, ga ik over naar klas 5.

$P \Rightarrow Q$  is waar als uit de waarheid van  $P$  de waarheid van  $Q$  volgt.

Maar uit de onwaarheid van  $P$  is niet de waarheid van  $Q$  af te leiden.

Met onvoldoenden kun je overgaan of blijven zitten.

De definitie met waarheidstabel is:

| $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ |
|-----|-----|-------------------|
| 0   | 0   | 1                 |
| 0   | 1   | 1                 |
| 1   | 0   | 0                 |
| 1   | 1   | 1                 |

De waarheidstabel van  $\neg(P \Rightarrow Q)$

| $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ | $\neg(P \Rightarrow Q)$ |
|-----|-----|-------------------|-------------------------|
| 0   | 0   | 1                 | 0                       |
| 0   | 1   | 1                 | 0                       |
| 1   | 0   | 0                 | 1                       |
| 1   | 1   | 1                 | 0                       |

Veel wiskundige uitspraken zijn als-dan-proposities.

### De bi-implicatie(equivalentie)

Voor sommige implicaties,  $P \Rightarrow Q$ , geldt dat de omkering,  $Q \Rightarrow P$ , ook waar is .

Notatie  $P \Leftrightarrow Q$  (Equivalentie).

Voorbeeld

$P$ : De vierhoek is een vierkant

$Q$ : De diagonalen in de vierhoek delen elkaar middendoor en staan loodrecht op elkaar.

$P \Rightarrow Q$  en  $Q \Rightarrow P$  .

De bi-implicatie of equivalentie kan op een natuurlijke manier met behulp van de bewerkingen  $\wedge$  en  $\Rightarrow$  worden gedefinieerd. Met de bi-implicatie  $P \Leftrightarrow Q$  betekent:

$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ .

De definitie met waarheidstabel voor het voorbeeld met het vierkant:

| $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ | $P \Leftarrow Q$ | $P \Leftrightarrow Q$ |
|-----|-----|-------------------|------------------|-----------------------|
| 0   | 0   | 1                 | 1                | 1                     |
| 0   | 1   | 1                 | 0                | 0                     |
| 1   | 0   | 0                 | 1                | 0                     |
| 1   | 1   | 1                 | 1                | 1                     |

## Oefenen en uitgewerkte Oefenopgave.

### Opgave 1.1 Een gedicht

Drie soorten mathematici:

*Onze buurman bleef beweren dat hij mathematici*

*nader kon classificeren*

*in divisies en wel drie*

*Welke drie-kan men nu stellen- Onderscheidde deze man?*

1. De groep die goed kan tellen,
2. De groep die dat niet kan.

De buurman heeft het over drie klassen mathematici, maar hij noemt er maar twee. Zou de derde klasse de groep mathematici zijn waarvan hij nog niet weet of ze wel of niet kunnen tellen? Of kan de buurman niet tellen?

### Opgave 1.3 Voetballogica

*"Voetbal is simpel, je bent op tijd of je bent te laat. Als je te laat bent, moet je eerder vertrekken", J. Cruijff.*

Je bent op tijd vertrokken en toch was je te laat.

Klopt dit met de logica van Cruijff?

Tja, Wat is *op tijd vertrekken*? Dat is op het tijdstip vertrekken zodat je niet te laat bent. De twee beweringen *op tijd vertrekken* en *niet te laat komen* zijn gelijkwaardig en de eerste bewering voegt niets toe aan de tweede bewering.

### Opgave 1.4 Medicijn

De dokter zegt: "Als je mijn medicijn slikt, dan word je beter".

**a)** Twee proposities.

Propositie P: 'je slikt medicijn' en propositie Q 'je wordt beter'.

**b)** Logische bewerking in de uitgesproken zin.

De uitspraak van de dokter is de implicatie:  $P \Rightarrow Q$ .

**c)** Een week later ontmoet je de dokter weer. De dokter kijkt je aan en concludeert: "Je ziet er goed uit. Je hebt dus mijn medicijn geslikt".

Een juiste conclusie? De dokter stelt vast dat je beter bent, dus stelt de dokter vast dat Q waar is. Dan kan P waar zijn. Maar het hoeft niet waar te zijn. Je had ook zonder gebruik te maken van het medicijn beter kunnen worden. In de taal van de logica: de bewering  $P \Rightarrow Q$  is altijd waar als Q waar is, ongeacht de waarde van P.

### Opgave 1.5 Waarheidstabellen

De waarheidstabellen van de volgende

**a**  $\neg(P \Rightarrow Q)$

**b**  $P \wedge \neg Q$

**c**  $(\neg P) \Delta (\neg Q)$

**d**  $(\neg P) \wedge (\neg Q)$

**e**  $\neg(P \vee Q)$

a)

| P | Q | $P \Rightarrow Q$ | $\neg(P \Rightarrow Q)$ |
|---|---|-------------------|-------------------------|
| 0 | 0 | 1                 | 0                       |
| 0 | 1 | 1                 | 0                       |
| 1 | 0 | 0                 | 1                       |
| 1 | 1 | 1                 | 0                       |

b)

| P | Q | $\neg Q$ | $P \wedge \neg Q$ |
|---|---|----------|-------------------|
| 0 | 0 | 1        | 0                 |
| 0 | 1 | 0        | 0                 |
| 1 | 0 | 1        | 1                 |
| 1 | 1 | 0        | 0                 |

c)

| P | Q | $\neg P$ | $\neg Q$ | $(\neg P) \Delta (\neg Q)$ |
|---|---|----------|----------|----------------------------|
| 0 | 0 | 1        | 1        | 0                          |
| 0 | 1 | 1        | 0        | 1                          |
| 1 | 0 | 0        | 1        | 1                          |
| 1 | 1 | 0        | 0        | 0                          |

d)

| P | Q | $\neg P$ | $\neg Q$ | $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ |
|---|---|----------|----------|----------------------------|
| 0 | 0 | 1        | 1        | 1                          |
| 0 | 1 | 1        | 0        | 0                          |
| 1 | 0 | 0        | 1        | 0                          |
| 1 | 1 | 0        | 0        | 0                          |

e)

| P | Q | $P \vee Q$ | $\neg(P \vee Q)$ |
|---|---|------------|------------------|
| 0 | 0 | 0          | 1                |
| 0 | 1 | 1          | 0                |
| 1 | 0 | 1          | 0                |
| 1 | 1 | 1          | 0                |

f) De laatste kolommen in de tabellen onder d) en onder e) hebben dezelfde waarden in de cellen.

### Opgave 1.6 Waarheidstabellen

a)  $(P \wedge Q) \Rightarrow \neg(P \Delta Q)$

| P | Q | $P \wedge Q$ | $P \Delta Q$ | $\neg(P \Delta Q)$ | $(P \wedge Q) \Rightarrow \neg(P \Delta Q)$ |
|---|---|--------------|--------------|--------------------|---------------------------------------------|
| 0 | 0 | 0            | 0            | 1                  | 1                                           |
| 0 | 1 | 0            | 1            | 0                  | 1                                           |
| 1 | 0 | 0            | 1            | 0                  | 1                                           |
| 1 | 1 | 1            | 0            | 1                  | 1                                           |

b)  $(P \neg Q) \Delta Q$

| P | Q | $\neg Q$ | $P \wedge \neg Q$ | $(P \wedge \neg Q) \Delta Q$ |
|---|---|----------|-------------------|------------------------------|
| 0 | 0 | 1        | 0                 | 0                            |
| 0 | 1 | 0        | 0                 | 1                            |
| 1 | 0 | 1        | 1                 | 1                            |
| 1 | 1 | 0        | 0                 | 1                            |

c)  $(P \Leftrightarrow Q) \vee Q$

| P | Q | $P \Leftrightarrow Q$ | $(P \Leftrightarrow Q) \vee Q$ |
|---|---|-----------------------|--------------------------------|
| 0 | 0 | 1                     | 1                              |
| 0 | 1 | 0                     | 1                              |
| 1 | 0 | 0                     | 0                              |
| 1 | 1 | 1                     | 1                              |

d)  $(P \wedge Q) \vee [(P \Delta R) \wedge \neg Q]$

| P | Q | R | $P \wedge Q$ | $P \Delta R$ | $\neg Q$ | $(P \Delta R) \wedge \neg Q$ | $(P \wedge Q) \vee ((P \Delta R) \wedge \neg Q)$ |
|---|---|---|--------------|--------------|----------|------------------------------|--------------------------------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0            | 0            | 1        | 0                            | 0                                                |
| 0 | 0 | 1 | 0            | 1            | 1        | 1                            | 1                                                |
| 0 | 1 | 0 | 0            | 0            | 0        | 0                            | 0                                                |
| 0 | 1 | 1 | 0            | 1            | 0        | 0                            | 0                                                |
| 1 | 0 | 0 | 0            | 1            | 1        | 1                            | 1                                                |
| 1 | 0 | 1 | 0            | 0            | 1        | 0                            | 0                                                |
| 1 | 1 | 0 | 1            | 1            | 0        | 0                            | 1                                                |
| 1 | 1 | 1 | 1            | 0            | 0        | 0                            | 1                                                |

### Opgave 1.7 A murdercase

A,B,C zijn verdachten in een moordzaak. Ze leggen onder ede de volgende verklaringen af:

A: B is schuldig en C is onschuldig.

B: Als A schuldig is, dan is C ook schuldig.

C: Ik ben onschuldig, maar minstens één van de anderen is schuldig.

We definiëren drie proposities: A is schuldig, B is schuldig, C is schuldig. Met deze drie proposities kunnen we drie beweringen als volgt formuleren:  $B \wedge \neg C$ ,  $A \Rightarrow C$ ,  $(A \vee C) \wedge \neg C$ .

De waarheidstabel met de drie beweringen:

| A | B | C | $B \wedge \neg C$ | $A \Rightarrow C$ | $(A \vee B) \wedge \neg C$ |
|---|---|---|-------------------|-------------------|----------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0                 | 1                 | 0                          |
| 0 | 0 | 1 | 0                 | 1                 | 0                          |
| 0 | 1 | 0 | 1                 | 1                 | 1                          |
| 0 | 1 | 1 | 0                 | 1                 | 0                          |
| 1 | 0 | 0 | 0                 | 0                 | 1                          |
| 1 | 0 | 1 | 0                 | 1                 | 0                          |
| 1 | 1 | 0 | 1                 | 0                 | 1                          |
| 1 | 1 | 1 | 0                 | 1                 | 0                          |

a) Alle drie van de verdachten zijn onschuldig, weergegeven door de eerste rij in de waarheidstabel. De eerste bewering,  $B \wedge \neg C$ , is onwaar (eerste rij en vierde kolom) en derde bewering,  $(A \vee C) \wedge \neg C$ , is onwaar (eerste rij en zesde kolom).

A en C pleegden meeneed.

b) Alle drie spreken de waarheid. Dit wordt weergegeven door de derde rij. In die rij is B schuldig.

c) De onschuldigen spraken de waarheid en de schuldigen logen. We moeten dan op zoek naar de rij waarin als een persoon onschuldig is (0) de uitspraak van de persoon waar is (1) en als een persoon schuldig is (1) de uitspraak van de persoon onwaar is (0). Dit is alleen het geval in de zesde rij. In dit geval zijn a en C schuldig.

### Opgave 1.8 van de syllabus Logica

Een computer kan allerlei opdrachten uitvoeren. Daartoe voer je commando's in via het toetsenbord. De commando's moeten aan strikte regels voldoen. Een computertaal maakt gebruik van de regels van de logica.

Hieronder volgt een stukje programmeercode:

IF ( $X > 3$ ) THEN (OPDRACHT 1) ELSE (OPDRACHT 2)

Het programma zal OPDRACHT 1 uitvoeren als ( $X > 3$ ) waar is, maar als ( $X > 3$ ) niet waar is zal OPDRACHT 2 worden uitgevoerd.

Een ander stuk programmeer code: IF ( $X \geq 4$ ) AND ( $Y < 3$ ) THEN (ACTIE!).

Geef aan wat het programma bij de onderstaande gevallen zal doen:

a)  $X = 2, Y = 6$

In dit geval is niet aan de voorwaarde  $X \geq 4$  voldaan. De actie wordt niet uitgevoerd.

b)  $X = 4, Y = 21$

In dit geval is niet aan de voorwaarde  $Y < 3$  voldaan. De actie wordt niet uitgevoerd.

c)  $X = 5, Y = 2$

In dit geval is aan beide voorwaarden voldaan. De actie wordt uitgevoerd.

**d)** Nog een stukje programmeercode: IF  $(X \geq 6)$  AND  $(X < 6)$  THEN (ACTIE!)

Wat is er aan de hand bij de bovenstaande programmaregel?

Hier wordt de actie alleen uitgevoerd als aan beide voorwaarden is voldaan. De voorwaarden zijn echter tegenstrijdig. De actie wordt niet uitgevoerd.

### **Opgave 1.9** Implicatie en bi-implicatie

**a)** Als een vierhoek een rechthoek is dan heeft een vierkant één rechte hoek. In dit geval heeft de vierhoek vier rechte hoeken. De vierhoek heeft dan in ieder geval één rechte hoek. Dus hier geldt de implicatie (van links naar rechts):  $P \Rightarrow Q$ .

Kijken we naar de situatie dat een vierhoek één rechte hoek heeft, dan behoeven de andere driehoeken geen rechte hoeken ( $90^\circ$ ) te zijn. Dus de implicatie van rechts naar links geldt niet:  $P \Leftarrow Q$  geldt niet. Er is geen sprake van bi-implicatie:  $P \Leftrightarrow Q$  geldt niet.

**b)** Als de functie  $y = (x - 3)^3$  een maximum heeft in  $x = 3$  dan is  $\frac{dy}{dx} \equiv y'(3) = 0$ .

Als een functie een maximum heeft in een zeker punt, dan is daar de afgeleide gelijk aan 0. Dus de implicatie van links naar rechts is waar. Maar als de afgeleide in een zeker punt gelijk is aan 0, dan hoeft dat punt nog geen maximum te zijn. Het kan ook een minimum zijn. De implicatie van rechts naar links geldt niet. Er is geen sprake van bi-implicatie.

- **Oefenen**

Lezen Logica les 1. Downloaden

Maken: de bijbehorende vraagstukken.

## Blok 2 Les 2 Bewijzen. Propositielogica

Deze les sluit aan bij les 2 van de Syllabus Logica WD\_online.

- **Stelling**

Het kwadraat van een negatief getal is een positief getal.

*Bewijs:*

Stel  $n$  is een negatief getal. Dan bestaat er een positief getal  $p$  zodat  $n = -p \rightarrow n^2 = (-p)^2 = (-1)^2 \cdot p^2 = p^2 > 0$ .

*End of Proof*

Analyse van stelling en bewijs:

Het gaat om de implicatie van twee proposities  $P$  en  $Q$

$P$ : Een getal  $n$  is negatief.

$Q$ : Het kwadraat van  $n$  is positief.

Stelling:  $P \Rightarrow Q$ .

In het bewijs neem je aan dat  $P$  waar is,  $w(P) = 1$ . Van daaruit beredeneer je dat  $Q$  ook waar is:  $w(Q) = 1$ .

Opmerking: Nu  $w(P) = 0$ , dus het getal  $n$  is niet negatief, wat betekent dan  $w(Q) = 0$ ? Dus wat betekent het kwadraat van  $n$  is niet positief? De eerste rij van de tabel. Het zou kunnen zijn dat  $n = 0$  is bedoeld? De tweede rij is duidelijk:  $n$  is positief.

| $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ |
|-----|-----|-------------------|
| 0   | 0   | 1                 |
| 0   | 1   | 1                 |
| 1   | 0   | 0                 |
| 1   | 1   | 1                 |

Dus  $w(P \Rightarrow Q) = 1$ .

Je kunt hierbij ook denken dat  $P$  een schakelaar is en  $Q$  een lamp die op één of andere manier met  $P$  is verbonden.  $P \Rightarrow Q$  betekent dan: *“Als schakelaar  $P$  aan staat, gaat het licht aan. Als schakelaar  $P$  uit staat, kan het licht aan staan via een andere schakelaar, de hotelschakeling, of niet aanstaan.”*

De omgekeerde implicatie

De omgekeerde stelling: als het kwadraat van een getal positief is, dan is het getal negatief.

Neem  $Q$  is:  $2^2 > 0$  en  $P$  is:  $2 < 0$ , dit is dus de stelling.

Maar  $w(Q) = 1$  en  $w(P) = 0$ , want  $2 > 0$ . Met dit voorbeeld zie je zo dat deze implicatie niet waar is. In het voorbeeld heeft  $Q$  de waarheidswaarde  $w=1$ , maar  $P$  heeft de waarde 0. Je zit in de situatie van de derde regel in onderstaande tabel en de implicatie krijgt de waarde 0

De tabel voor de omgekeerde bewering  $Q \Rightarrow P$ .

| $Q$ | $P$ | $Q \Rightarrow P$ |
|-----|-----|-------------------|
| 0   | 0   | 1                 |
| 0   | 1   | 1                 |
| 1   | 0   | 0                 |
| 1   | 1   | 1                 |

Dus  $w(Q \Rightarrow P) = 0$ .

### Stelling:

Een getal is deelbaar door 9 als de som van de cijfers deelbaar is door 9.

*Bewijs:*

Het bewijs gaat uit van de eigenschappen van een tientallig stelsel.

Neem, bij wijze van voorbeeld, een getal van drie cijfers. De cijfers waaruit het getal is samengesteld zijn  $a, b, c$ .

Het getal is:  $100 \cdot a + 10 \cdot b + c$ . De som van de drierijfers is:  $a + b + c$ .

Neem het verschil van het getal en de som:

$$(100 \cdot a + 10 \cdot b + c) - (a + b + c) = 99 \cdot a + 9 \cdot b \rightarrow$$

$$\rightarrow (100 \cdot a + 10 \cdot b + c) = (a + b + c) + 99 \cdot a + 9 \cdot b.$$

Als  $(a + b + c)$  deelbaar is door 9, dan is de rechterkant van het gelijk teken deelbaar door 9.

Dat impliceert dat de linker kant van het gelijktteken eveneens deelbaar is door 9, en dat is gegeven.

*End of Proof.*

Analyse van de stelling en het bewijs.

$P$  is: Een getal deelbaar door 9.

$Q$  is: De som van de cijfers waaruit het getal is samengesteld is deelbaar door 9.

Ga ervan uit dat  $P$  waar is en je gaat bewijzen dat  $Q$  waar is.

Uit bovenstaand bewijs kun je ook afleiden dat het omgekeerde ook waar is: "Als de som van de cijfers deelbaar is door 9, dan is het getal ook deelbaar door 9." Weergegeven door bovenstaande vergelijking:  $(a + b + c) + 99 \cdot a + 9 \cdot b = (100 \cdot a + 10 \cdot b + c)$ .

Neem aan dat  $Q$  waar is  $\rightarrow (a + b + c) + 99 \cdot a + 9 \cdot b$  is deelbaar door 9, dus ook  $(100 \cdot a + 10 \cdot b + c)$ . Dit is gegeven, dus geen tegenspraak/contradictie

Dus ook  $Q \Rightarrow P$  is waar.

En in dit geval ook  $P \Leftrightarrow Q$ .

- **Contradictie**

Voorbeeld

Ik ben groter dan 2 meter en ik ben kleiner dan 2 meter. Of "Het regent of het regent niet". Je hebt hier te maken met een propositie in combinatie met de ontkenning.

De vorm is  $P \wedge \neg P$

Met de waarheidstabel

| $P$ | $\neg P$ | $P \wedge \neg P$ |
|-----|----------|-------------------|
| 0   | 1        | 0                 |
| 1   | 0        | 0                 |

$w(P \wedge \neg P) = 0$  voor elke waarde van  $P$ . Een dergelijke propositie is een contradictie.

- **Tautologie**

Voorbeeld

Ik ben geboren in Nederland of ik ben in het buitenland geboren. Of "Het regent of het regent niet". Beide proposities zijn altijd waar.

De vorm is

$P \vee \neg P$

Met tabel

| $P$ | $\neg P$ | $P \vee \neg P$ |
|-----|----------|-----------------|
| 0   | 1        | 1               |
| 1   | 0        | 1               |

$w(P \vee \neg P) = 1$  voor elke waarde van  $P$  (de onderliggende propositie).

Toon met een waarheidstabel aan dat (de dubbele ontkenning)  $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$  een tautologie is.

| $P$ | $\neg P$ | $\neg(\neg P)$ | $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$ |
|-----|----------|----------------|----------------------------------|
| 0   | 1        | 0              | 1                                |
| 1   | 0        | 1              | 1                                |

- **De wet van de uitgesloten derden**

De tautologie  $P \vee \neg P$  wordt ook de wet van de uitgesloten derden genoemd. Een wiskundige bewering is waar of is niet waar. In ons dagelijks taalgebruik geldt deze

wet niet. De mogelijkheid bestaat dat je niet weet of een bewering waar is en je er niet achter kan komen of die bewering waar of onwaar is.

Ook in de wiskunde zijn er beweringen waarvan we (nog) niet weten of die waar is of niet waar is. Dit wordt dan geen bewering genoemd maar een vermoeden (conjecture). Een voorbeeld is het vermoeden van Goldbach: *“Elk even getal groter dan 2 is te schrijven als de som van twee priemgetallen.”* Wiskundigen gaan ervan uit dat het vermoeden waar is of niet waar is. Er wordt nog naar een bewijs gezocht. Het bewijs is nog steeds niet gevonden. Een methode voor het bewijs is een voorbeeld te vinden waarbij een even getal niet te schrijven is als de som van twee priemgetallen. Dat voorbeeld is nog niet gevonden.

Nota Bene: je zou kunnen denken dat het vermoeden van Goldbach wordt bevestigd dat dan ook een algemene methode/formule is gevonden voor de priemgetallen.

Samengevat:

Geef een bewijs van propositie  $P$ , dan is  $P$  waar.

Geef een tegenvoorbeeld bij propositie  $P$ , dan is  $\neg P$  waar.

- **Propositie**

- Een propositie is een wiskundige bewering
- Een propositie is waar of niet waar (uitgesloten derde).
- Een bewezen propositie is een stelling.
- Een onbewezen stelling is een vermoeden (vermoeden van Goldbach)
- Een tegenvoorbeeld bewijst dat de propositie niet waar is.

- **Bewijs uit het ongerijmde, Reductio ad Absurdum**

Bij het bewijs uit het ongerijmde bewijst je dat  $\neg(\neg P)$  waar is en dat dus  $P$  waar is.

Voorbeeld

Bewijs dat er oneindig veel priemgetallen zijn.

$P$  is: er zijn oneindig veel priemgetallen.

$\neg P$  is: het aantal priemgetallen is eindig.

Je kunt bewijzen dat  $\neg P$  niet waar is, dus  $w(\neg P) = 0$ .

Dan is  $w(P) = 1$ .

Dus, neem eens aan dat  $\neg P$  waar is.

Stel dat de eindige lijst van priemgetallen is:  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Het laatste priemgetal is  $p_n$ .

Bekijk nu het getal  $g = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ .

Er zijn twee mogelijkheden:  $g$  is een priemgetal of  $g$  is geen priemgetal.

In het eerste geval heb je een groter priemgetal gevonden en dat is in strijd met je aanname dat je een volledige lijst had opgeschreven. In het tweede geval is  $g$  geen priemgetal. Dan is  $g$  deelbaar door een ander priemgetal (Fundamenteel theoreem of Arithmetic). Maar dat andere getal kan niet in je lijst voorkomen want dan zou 1 deelbaar zijn door dat priemgetal. Dit laatste getal moet dus een groter priemgetal

dan in bovenstaande lijst staat. Zo heb je weer een groter priemgetal gevonden en dit is weer in strijd met de aanname. In feite doet zich al gauw de tweede situatie voor:  $g$  is geen priemgetal.

Voorbeeld:  $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 30031 = 59 \cdot 509 \rightarrow$  geen priemgetal, maar het product van twee priemgetallen. Deze priemgetallen zijn weer groter dan 13.

Resultaat:  $\neg P$  is onwaar, dus  $P$  is waar.

Het bewijs van Euclides opgenomen in het boek Elementen meer dan 2000 jaar geleden.

Zie Priemgetal: [www.nl.m.wikipedia.org](http://www.nl.m.wikipedia.org)

- Een metastelling (is een stelling **over** proposities)

Blok 2 Les 1: de samengestelde propositie  $P \Rightarrow Q$  is waar als  $P$  en  $Q$  dezelfde waarheidswaarden hebben.  $P$  en  $Q$  heten dan equivalent of gelijkwaardig.

Als de proposities  $P$  en  $Q$  equivalent zijn, dan is  $P \Leftrightarrow Q$  een tautologie.

Vergelijk  $\neg P \vee Q$  met  $P \Rightarrow Q$  in onderstaande tabel. Je ziet geen verschil.

| $P$ | $Q$ | $\neg P \vee Q$ | $P \Rightarrow Q$ | $(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$ |
|-----|-----|-----------------|-------------------|-----------------------------------------------------|
| 0   | 0   | 1               | 1                 | 1                                                   |
| 0   | 1   | 1               | 1                 | 1                                                   |
| 1   | 0   | 0               | 0                 | 1                                                   |
| 1   | 1   | 1               | 1                 | 1                                                   |

Met andere woorden:  $\neg P \vee Q$  en  $P \Rightarrow Q$  hebben altijd dezelfde waarheidswaarden, wat de waarden van  $P$  en  $Q$  ook zijn. Ze zijn dus equivalent of gelijkwaardig. Je mag ook schrijven:  $(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$ . Deze propositie is toegevoegd aan bovenstaande waarheidstabel. De waarheidswaarde van  $(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$  is een tautologie.

- Contrapositie

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

Voorbeeld

Als het regent, is de weg nat.

Contrapositie:

Als de weg droog is, regent het niet.

Bewijs:

| $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ | $\neg P$ | $\neg Q$ | $\neg Q \Rightarrow \neg P$ |
|-----|-----|-------------------|----------|----------|-----------------------------|
| 0   | 0   | 1                 | 1        | 1        | 1                           |
| 0   | 1   | 1                 | 1        | 0        | 1                           |
| 1   | 0   | 0                 | 0        | 1        | 0                           |
| 1   | 1   | 1                 | 0        | 0        | 1                           |

Oefenen en uitgewerkte oefen opgave.

- Uitgewerkte Oefenopgave.

**Opgave 2.1** van de syllabus Logica:

Onderzoek de waarheid van de bewering "Een getal is deelbaar door 4 als de som van de cijfers is deelbaar door 4."

Een voorbeeld: 22 is niet deelbaar door 4,  $2+2$  is wel deelbaar door 4. Of 16 is deelbaar door 4,  $1+6$  is niet

deelbaar door 4.

**Opgave 2.2.** Contradictie en tautologie van de syllabus Logica

a) De waarheidstabel van de samengestelde propositie:  $(P \wedge Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$  is een contradictie.

| P | Q | $P \wedge Q$ | $\neg P$ | $\neg Q$ | $\neg P \vee \neg Q$ | $(P \wedge Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$ |
|---|---|--------------|----------|----------|----------------------|--------------------------------------------|
| 0 | 0 | 0            | 1        | 1        | 1                    | 0                                          |
| 0 | 1 | 0            | 1        | 0        | 1                    | 0                                          |
| 1 | 0 | 0            | 0        | 1        | 1                    | 0                                          |
| 1 | 1 | 1            | 0        | 0        | 0                    | 0                                          |

b) De waarheidstabel van de samengestelde propositie:  $(P \wedge Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \Rightarrow (P \vee Q)$  is een tautologie.

| P | Q | $P \wedge Q$ | $\neg P$ | $\neg Q$ | $\neg P \vee \neg Q$ | $(P \wedge Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$ | $P \vee Q$ | $(P \wedge Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \Rightarrow (P \vee Q)$ |
|---|---|--------------|----------|----------|----------------------|--------------------------------------------|------------|-------------------------------------------------------------------|
| 0 | 0 | 0            | 1        | 1        | 1                    | 0                                          | 0          | 1                                                                 |
| 0 | 1 | 0            | 1        | 0        | 1                    | 0                                          | 1          | 1                                                                 |
| 1 | 0 | 0            | 0        | 1        | 1                    | 0                                          | 1          | 1                                                                 |
| 1 | 1 | 1            | 0        | 0        | 0                    | 0                                          | 1          | 1                                                                 |

**Opgave 2.3** van de syllabus Logica:

Gebruik waarheidstabellen om aan te tonen dat de volgende proposities tautologieën zijn:

Nota bene: ik kies twee van de a) en e)

a)  $(P \wedge P) \Leftrightarrow P$

| P | $P \wedge P$ | $(P \wedge P) \Leftrightarrow P$ |
|---|--------------|----------------------------------|
| 0 | 0            | 1                                |
| 1 | 1            | 1                                |

e)  $[P \wedge (P \vee Q)] \Leftrightarrow P$

| P | Q | $P \vee Q$ | $P \wedge (P \vee Q)$ | $[P \wedge (P \vee Q)] \Leftrightarrow P$ |
|---|---|------------|-----------------------|-------------------------------------------|
| 0 | 0 | 0          | 0                     | 1                                         |
| 0 | 1 | 1          | 0                     | 1                                         |
| 1 | 0 | 1          | 1                     | 1                                         |
| 1 | 1 | 1          | 1                     | 1                                         |

**Opgave 2.4** De contrapositie

a) Als in een driehoek geldt dat  $a^2 + b^2 = c^2$ , dan is de hoek tussen de zijden met lengte  $a$  en  $b$  een rechte hoek. De contrapositie:

Als in een driehoek de hoek tussen de zijden  $a$  en  $b$  geen rechte hoek is, dan geldt  $a^2 + b^2 \neq c^2$ .

b) Als een getal deelbaar is door 6, dan is het deelbaar door 3.

De contrapositie:

Als een getal niet deelbaar is door 3, dan is het niet deelbaar door 6.

c) Als  $x^2 = y^2$ , dan is  $x = y$  of  $x = -y$ .

De contrapositie:

Als  $x \neq y$  en  $x \neq -y$  dan is  $x^2 \neq y^2$ .

- Oefenen

Lezen: Logica les 2

Blok 2 Les 3 Herleidingen. Propositielogica

Deze les sluit aan bij Les 3 van de Syllabus Logica WD\_online

- Anders schrijven

Schrijfregels:

- Commutatief
- Associatief
- Distributief

Toepassing

- Schakelingen
- Schakelalgebra – proposities

- Commutatieve eigenschap (De verwisseleigenschap)

Als je de waarheidstabellen van de conjunctie, disjunctie, bi-implicatie en exclusief-of bekijkt, zie je een zekere symmetrie. Als je de rol van  $P$  en  $Q$  verwisselt, blijven de waarheidstabellen correct. Dit betekent dat de volgende paren proposities gelijkwaardig zijn:

- $P \wedge Q$  en  $Q \wedge P$   $\therefore (P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$  : een tautologie,
- $P \vee Q$  en  $Q \vee P$   $\therefore (P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$  : een tautologie,
- $P \Delta Q$  en  $Q \Delta P$   $\therefore (P \Delta Q) \Leftrightarrow (Q \Delta P)$  : een tautologie,
- $P \Leftrightarrow Q$  en  $Q \Leftrightarrow P$   $\therefore (P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow P)$  : een tautologie.

Wisseleigenschap, voorbeelden:

- $2 \times 8 = 8 \times 2$
- $5 + 7 = 7 + 5$

Maar:

- $5 - 7 \neq 7 - 5$

Vermenigvuldigen en optellen zijn commutatief.

Aftrekken is niet commutatief.

De logische bewerkingen  $\wedge$  en  $\vee$  zijn commutatief:

$$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P \text{ en } P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$$

De logische bewerking  $\Rightarrow$  is niet commutatief:

$$(P \Rightarrow Q) \not\Leftrightarrow (Q \Rightarrow P) .$$

### Opgave 3.1

Laat met de waarheidstabel zien dat  $(P \Rightarrow Q) \not\Leftrightarrow (Q \Rightarrow P)$ , dat wil zeggen: de implicatie is niet commutatief:

| $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ | $Q \Rightarrow P$ | $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \Rightarrow P)$ |
|-----|-----|-------------------|-------------------|-------------------------------------------------------|
| 0   | 0   | 1                 | 1                 | 1                                                     |
| 0   | 1   | 1                 | 0                 | 0                                                     |
| 1   | 0   | 0                 | 1                 | 0                                                     |
| 1   | 1   | 1                 | 1                 | 1                                                     |

- Associatieve eigenschap (De schakeleigenschap)

Schakeleigenschap:

$$5 + (2 + 8) = (5 + 2) + 8$$

$$5 \times (2 \times 8) = (5 \times 2) \times 8$$

Maar:

$$5 - (2 - 8) \neq (5 - 2) - 8$$

Optellen en vermenigvuldigen zijn associatief

Aftrekken is niet associatief.

De samengestelde propositie  $P \wedge Q \wedge R$  kun je op twee manieren lezen.

Bij  $(P \wedge Q) \wedge R$  bereken je eerst  $(P \wedge Q)$  en daarna deze propositie in combinatie met  $R$ .

Bij  $P \wedge (Q \wedge R)$  bereken je eerst  $(Q \wedge R)$  en daarna deze propositie in combinatie met  $P$ .

In tabel:

| P | Q | R | $P \wedge Q$ | $Q \wedge R$ | $(P \wedge Q) \wedge R$ | $P \wedge (Q \wedge R)$ |
|---|---|---|--------------|--------------|-------------------------|-------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0            | 0            | 0                       | 0                       |
| 0 | 0 | 1 | 0            | 0            | 0                       | 0                       |
| 0 | 1 | 0 | 0            | 0            | 0                       | 0                       |
| 0 | 1 | 1 | 0            | 1            | 0                       | 0                       |
| 1 | 0 | 0 | 0            | 0            | 0                       | 0                       |
| 1 | 0 | 1 | 0            | 0            | 0                       | 0                       |
| 1 | 1 | 0 | 1            | 0            | 0                       | 0                       |
| 1 | 1 | 1 | 1            | 1            | 1                       | 1                       |

Uit de laatste twee kolommen van de tabel zie je de gelijkwaardigheid van de samengestelde propositie.

Samengevat:

De logische bewerking  $\wedge$  en  $\vee$  zijn associatief:

$$P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$$

en

$$P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$$

De logische bewerking  $\Rightarrow$  is niet associatief:

$$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \not\Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$$

- **Distributieve eigenschap**

Verdeel eigenschap:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

In dit geval is de vermenigvuldigen links distributief over optellen.

Maar:

$$a + (b \cdot c) \neq (a + b) \cdot (a + c)$$

Optellen is niet distributief over vermenigvuldigen.

De logische bewerkingen  $\wedge$  en  $\vee$  zijn distributief over elkaar.

De volgende paren proposities zijn gelijkwaardig:

-  $P \wedge (Q \vee R)$  en  $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

-  $(P \vee Q) \wedge R$  en  $(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$

-  $P \vee (Q \wedge R)$  en  $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

-  $(P \wedge Q) \vee R$  en  $(P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ .

Een voorbeeld:

$$x \text{ is priem} \wedge (x < 10 \text{ of } x > 15)$$

is equivalent met

$$(x \text{ is priem} \wedge x < 10) \vee (x \text{ is priem} \wedge x > 15).$$

Dit zijn alle priemgetallen met uitzondering van 11 en 13.

Tabel van distributieve eigenschap:

| $P$ | $Q$ | $R$ | $Q \vee R$ | $P \wedge Q$ | $P \wedge R$ | $P \wedge (Q \vee R)$ | $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ |
|-----|-----|-----|------------|--------------|--------------|-----------------------|----------------------------------|
| 0   | 0   | 0   | 0          | 0            | 0            | 0                     | 0                                |
| 0   | 0   | 1   | 1          | 0            | 0            | 0                     | 0                                |
| 0   | 1   | 0   | 1          | 0            | 0            | 0                     | 0                                |
| 1   | 1   | 1   | 1          | 0            | 0            | 0                     | 0                                |
| 1   | 0   | 0   | 0          | 0            | 0            | 0                     | 0                                |
| 1   | 0   | 1   | 1          | 0            | 1            | 1                     | 1                                |
| 1   | 1   | 0   | 1          | 1            | 0            | 1                     | 1                                |
| 1   | 1   | 1   | 1          | 1            | 1            | 1                     | 1                                |

Het bewijs van de tweede eigenschap ( $\wedge$  is rechts-distributief over  $\vee$ ):

$(P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow R \wedge (P \vee Q)$  ( $\wedge$  is commutatief),

$R \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow (R \wedge P) \vee (R \wedge Q)$  ( $\wedge$  is links-distributief over  $\vee$ ),

$(R \wedge P) \vee (R \wedge Q) \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$  ( $\wedge$  is commutatief).

Terzijde: Waarom 8 rijen in bovenstaande tabel?

2 getallen verdelen over 3 posities ( $P, Q$  en  $R$ ) met terugleggen en geordend.

Geordend: de volgorde doet ertoe,  $2^3$  mogelijkheden.

Zie Blok 1 – Les 1.

- De wetten van De Morgan

Haakjes wegwerken

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$$

met waarheidstabel

| $P$ | $Q$ | $\neg(P \wedge Q)$ | $\neg P \vee \neg Q$ |
|-----|-----|--------------------|----------------------|
| 0   | 0   | 1                  | 1                    |
| 0   | 1   | 1                  | 1                    |
| 1   | 0   | 1                  | 1                    |
| 1   | 1   | 0                  | 0                    |

en

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$$

met waarheidstabel

| $P$ | $Q$ | $\neg(P \vee Q)$ | $\neg P \wedge \neg Q$ |
|-----|-----|------------------|------------------------|
| 0   | 0   | 1                | 1                      |
| 0   | 1   | 0                | 0                      |
| 1   | 0   | 0                | 0                      |
| 1   | 1   | 0                | 0                      |

De wetten van de Morgan zijn vaak handig bij het ontkennen van proposities. Voorbeeld:

$R$  is de samengestelde propositie:  $x$  is een priemgetal ( $P$ ) en  $x > 30031$  ( $Q$ ).

De propositie  $R = P \wedge Q$ .

Bij de ontkenning van  $R$  kun je de wetten van de Morgan toepassen:

$$\neg R \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q.$$

In woorden luidt de ontkenning van  $R$ : “ $x$  is geen priemgetal of  $x \leq 30031$ .”

Bewijs dat

$$1. (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q),$$

en

$$2. (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q) \text{ met gebruik van } (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$$

ad 1) Bewijs  $(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$  met de waarheidstabel

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $\neg P \vee Q$ | $P \Rightarrow Q$ |
|-----|-----|----------|-----------------|-------------------|
| 0   | 0   | 1        | 1               | 1                 |
| 0   | 1   | 1        | 1               | 1                 |
| 1   | 0   | 0        | 0               | 0                 |
| 1   | 1   | 0        | 1               | 1                 |

ad 2) Gebruik  $(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$  om te bewijzen dat  $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$

Bewijs:

$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$ , waarbij gebruik is gemaakt van haakjes wegwerken.

## • Schakelingen

Tussen rekenregels van de logica bestaat een sterke overeenkomst met het rekenen van elektrische schakelingen.

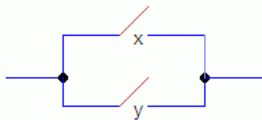
Er gaat stroom door de schakeling: AAN = 1

Er gaat geen stroom door de schakeling: UIT = 0

Serieschakeling:  $x \cdot y$



Parallelschakeling:  $x + y$



De beide schakelingen zijn weergegeven in onderstaande figuur

| stand van de schakelaar | weergave    |                                                     |
|-------------------------|-------------|-----------------------------------------------------|
|                         | 0           | want: geen stroom                                   |
|                         | 1           | want: wel stroom                                    |
| schakeling              | weergave    |                                                     |
|                         | $x \cdot y$ | want: beide moeten gesloten zijn<br>                |
|                         | $x + y$     | want: minstens één van beide moet gesloten zijn<br> |

Met tabellen kun je de werking van een schakeling aangeven.

Links de serie schakeling en rechts the parallellel schakeling.

| x | y | $x \cdot y$ |
|---|---|-------------|
| 0 | 0 | 0           |
| 0 | 1 | 0           |
| 1 | 0 | 0           |
| 1 | 1 | 1           |

| x | y | $x + y$ |
|---|---|---------|
| 0 | 0 | 0       |
| 0 | 1 | 1       |
| 1 | 0 | 1       |
| 1 | 1 | 1       |

Ook bestaan er schakelaars die het omgekeerde doen: als er stroom op de schakelaar staat, blokkeert de schakelaar en als er geen stroom op staat, laat die juist door. Denk aan de noodverlichting in een gebouw. Als de stroom uit valt gaat de noodverlichting aan en als de stroom weer terugkomt, gaat de noodverlichting uit.

Deze schakelaars geef je aan met de omkering:

Omkering:  $\bar{x}$ .

De schakeltabel:

| x | $\bar{x}$ |
|---|-----------|
| 0 | 1         |
| 1 | 0         |

Schakelalgebra.

Zoals opgemerkt, tussen de rekenregels van de logica bestaat een sterke overeenkomst met het rekenen van elektrische schakelingen.

Rekenregels als bij proposities:

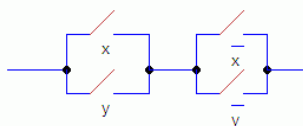
- commutatief:  $x + y = y + x$  en  $x \cdot y = y \cdot x$ ,
- associatief:  $x + (y + z) = (x + y) + z$  en  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ ,
- distributief:  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$  en  $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$ .

Aan de schakelingen voegen we nog twee bijzondere schakelingen toe: de 0 en de 1. De 0 is de schakeling die geen stroom doorlaat, de 1 is de schakeling die wel stroom doorlaat. In propositietaal: de 0 is de contradictie en de 1 is de tautologie.

Neutraal element:  $x + 0 = x$  en  $x \cdot 1 = x$

Ontkenning:  $x + \bar{x} = 1$  en  $x \cdot \bar{x} = 0$ .

### Opgave 3.10 Een voorbeeld



1. Welke formule past bij bovenstaande schakeling? Hierbij past de formule  $(x + y) \cdot (\bar{x} + \bar{y})$

Een tabel maakt dit inzichtelijk.

| x | y | $x + y$ | $\bar{x}$ | $\bar{y}$ | $\bar{x} + \bar{y}$ | $(x + y) \cdot (\bar{x} + \bar{y})$ |
|---|---|---------|-----------|-----------|---------------------|-------------------------------------|
| 0 | 0 | 0       | 1         | 1         | 1                   | 0                                   |
| 0 | 1 | 1       | 1         | 0         | 1                   | 1                                   |
| 1 | 0 | 1       | 0         | 1         | 1                   | 1                                   |
| 1 | 1 | 1       | 0         | 0         | 0                   | 0                                   |

De bovenstaande formule kun je uitwerken, met de schakelalgebra:

$$(x + y) \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = (x + y) \cdot \bar{x} + (x + y) \cdot \bar{y} = x \cdot \bar{x} + y \cdot \bar{x} + x \cdot \bar{y} + y \cdot \bar{y} = 0 + y \cdot \bar{x} + x \cdot \bar{y} + 0 = y \cdot \bar{x} + x \cdot \bar{y}.$$

De schakeltabel ziet er dan anders uit:

| x | y | $y \cdot \bar{x}$ | $x \cdot \bar{y}$ | $y \cdot \bar{x} + x \cdot \bar{y}$ |
|---|---|-------------------|-------------------|-------------------------------------|
| 0 | 0 | 0                 | 0                 | 0                                   |
| 0 | 1 | 1                 | 0                 | 1                                   |
| 1 | 0 | 0                 | 1                 | 1                                   |
| 1 | 1 | 0                 | 0                 | 0                                   |

2. Laat bovenstaande schakeling stroom door?

In de getekende stand niet. Het is een zogenaamde hotelschakeling: met de ene schakelaar kun je de lamp aan doen en met de andere kun je die uitdoen. De schakeling kan stroom doorlaten. Dit wordt in de tabel duidelijk in de laatste kolom, aangegeven met de "1".

Kijken we naar de schakeling dan zien we het volgende:

Of de enen schakelaar laat stroom door of de andere, maar niet beide tegelijk.

## Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.

### Opgave 3.2 van de syllabus Logica

De waarheidstabel van de bewerking  $\vee$ .

| P | Q | R | $P \vee Q$ | $Q \vee R$ | $(P \vee Q) \vee R$ | $P \vee (Q \vee R)$ |
|---|---|---|------------|------------|---------------------|---------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0          | 0          | 0                   | 0                   |
| 0 | 0 | 1 | 0          | 1          | 1                   | 1                   |
| 0 | 1 | 0 | 1          | 1          | 1                   | 1                   |
| 0 | 1 | 1 | 1          | 1          | 1                   | 1                   |
| 1 | 0 | 0 | 1          | 0          | 1                   | 1                   |
| 1 | 0 | 1 | 1          | 1          | 1                   | 1                   |
| 1 | 1 | 0 | 1          | 1          | 1                   | 1                   |
| 1 | 1 | 1 | 1          | 1          | 1                   | 1                   |

De bewerking is associatief.

### Opgave 3.3 van de syllabus Logica

De waarheidstabel van de implicatie.

| P | Q | R | $P \Rightarrow Q$ | $Q \Rightarrow R$ | $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ | $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ |
|---|---|---|-------------------|-------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 1                 | 1                 | 0                                 | 1                                 |
| 0 | 0 | 1 | 1                 | 1                 | 1                                 | 1                                 |
| 0 | 1 | 0 | 1                 | 0                 | 0                                 | 1                                 |
| 0 | 1 | 1 | 1                 | 1                 | 1                                 | 1                                 |
| 1 | 0 | 0 | 0                 | 1                 | 1                                 | 1                                 |
| 1 | 0 | 1 | 0                 | 1                 | 1                                 | 1                                 |
| 1 | 1 | 0 | 1                 | 0                 | 0                                 | 0                                 |
| 1 | 1 | 1 | 1                 | 1                 | 1                                 | 1                                 |

De implicatie is niet associatief.

### Opgave 3.4 van de syllabus Logica

De distributieve eigenschap.

$P(x \text{ is even})$ ,  $Q(x > 0)$  en  $R(x < 10)$ .

a)  $x$  is even of  $x > 0$  en  $x < 10$ :

Je kunt bovenstaande zin op twee manieren lezen:

-  $(x \text{ is even of } x > 0) \text{ en } x < 10 \rightarrow (P \vee Q) \wedge R \rightarrow$  herschrijven als  $(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$ ,

of

-  $x \text{ is even of } (x > 0 \text{ en } x < 10) \rightarrow P \vee (Q \wedge R) \rightarrow$  herschrijven als  $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ .

b)  $x$  is even en  $x > 0$  of  $x < 10$ . Je kunt deze zin weer op twee manieren lezen:

-  $(x \text{ is even en } x > 0) \text{ of } x < 10 \rightarrow (P \wedge Q) \vee R \rightarrow$  herschrijven als  $(P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ ,

of

-  $x$  is even en  $(x > 0 \text{ of } x < 10) \rightarrow P \wedge (Q \vee R) \rightarrow$  herschrijven als  $(P \wedge Q) \vee (P \vee R)$ .

### Opgave 3.5 De contradictie van de syllabus Logica

De propositie :  $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \wedge (P \wedge \neg R)$ .

| P | Q | R | $P \Rightarrow Q$ | $Q \Rightarrow R$ | $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$ | $P \wedge \neg R$ | $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \wedge (P \wedge \neg R)$ |
|---|---|---|-------------------|-------------------|----------------------------------------------|-------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 1                 | 1                 | 1                                            | 0                 | 0                                                                       |
| 0 | 0 | 1 | 1                 | 1                 | 1                                            | 0                 | 0                                                                       |
| 0 | 1 | 0 | 1                 | 0                 | 0                                            | 0                 | 0                                                                       |
| 0 | 1 | 1 | 1                 | 1                 | 1                                            | 0                 | 0                                                                       |
| 1 | 0 | 0 | 0                 | 1                 | 0                                            | 1                 | 0                                                                       |
| 1 | 0 | 1 | 0                 | 1                 | 0                                            | 0                 | 0                                                                       |
| 1 | 1 | 0 | 1                 | 0                 | 0                                            | 1                 | 0                                                                       |
| 1 | 1 | 1 | 1                 | 1                 | 1                                            | 0                 | 0                                                                       |

In woorden :

Als P waar is, dan is Q waar en dus ook R. Maar dan is  $P \wedge \neg R$  onwaar.

Als P onwaar is, dan is  $P \wedge \neg R$  onwaar. Conclusie: de propositie is een contradictie.

### Opgave 3.6 van de syllabus Logica:

Bij gebouwen wordt bij de ingang vaak gebruik gemaakt van een luchtsluis om tocht te voorkomen. Er zijn dan twee deuren: een buitendeur en een binnendeur. Het is de bedoeling dat de deuren niet gelijk open zijn. Soms moet je even wachten op het opengaan van de ene deur totdat de ander weer gesloten is.

A: de buitendeur is open

B: de binnendeur is open.

De deuren mogen niet tegelijk open staan:

$$\neg(A \wedge B)$$

a) Herschrijf deze samengestelde propositie volgens de wetten van de Morgan>

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

b) Bij a) is gebruik gemaakt van het  $\vee$  teken, dus inclusief OF. Is het juist dat hier gebruik is gemaakt van het inclusieve OF? Wat zou het betekenen als hier het exclusieve OF had gestaan?

Het inclusieve OF: dat is juist want beide deuren kunnen gesloten zijn.

Als het exclusieve OF,  $\Delta$ , was gebruikt, dan is de ene deur gesloten of de andere maar niet beide tegelijkertijd.

c) Het is mogelijk om een samenstelling te maken met  $\vee$ ,  $\wedge$  en  $\neg$  die dezelfde waarheidstabel oplevert als het exclusieve OF. Er zijn meerdere mogelijkheden. Twee voorbeelden:

$$\neg(A \wedge B) \wedge (A \vee B),$$

$$\neg(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \vee \neg B),$$

$$\neg(A \Delta \neg B).$$

Waarheidstabel van  $(\neg A \Delta \neg B)$

| $\neg A$ | $\neg B$ | $(\neg A \Delta \neg B)$ |
|----------|----------|--------------------------|
| 0        | 0        | 0                        |
| 0        | 1        | 1                        |
| 1        | 0        | 1                        |
| 1        | 1        | 0                        |

Waarheidstabel  $\neg(A \wedge B) \wedge (A \vee B)$

| A | B | $A \vee B$ | $A \wedge B$ | $\neg(A \wedge B)$ | $\neg(A \wedge B) \wedge (A \vee B)$ |
|---|---|------------|--------------|--------------------|--------------------------------------|
| 0 | 0 | 0          | 0            | 1                  | 0                                    |
| 0 | 1 | 1          | 0            | 1                  | 1                                    |
| 1 | 0 | 1          | 0            | 1                  | 1                                    |
| 1 | 1 | 1          | 1            | 0                  | 0                                    |

**Opgave 3.7** van de syllabus Logica:

Equivalentie  $P \wedge \neg Q$  met de ontkenning van  $P \Rightarrow Q$ .

We maken geen gebruik van waarheidstabellen.

Start met  $P \wedge \neg Q$ . De dubbele ontkenning hiervan is uiteraard equivalent met  $P \wedge \neg Q \Leftrightarrow \neg\neg(P \wedge \neg Q)$ .

Met de Morgan kan één van de dubbele ontkenningen tussen haken gebracht worden:

$$P \wedge \neg Q \Leftrightarrow \neg\neg(P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg\neg Q).$$

De dubbele ontkenning van  $Q$  kan worden weggelaten:

$$P \wedge \neg Q \Leftrightarrow \neg\neg(P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg\neg Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q).$$

Bovenstaand (pag. 58) is afgeleid:  $(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$ . Deze equivalentie gaan we gebruiken.

$$P \wedge \neg Q \Leftrightarrow \neg\neg(P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg\neg Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow \neg(P \Rightarrow Q).$$

Het resultaat dat we zochten: Equivalentie  $P \wedge \neg Q$  met de ontkenning van  $P \Rightarrow Q$ .

**Opgave 3.8** van de syllabus Logica:

de wet van de Morgan voor een gelijkwaardige zin als "Je vooropleiding (precollege) is niet havo of vwo".

De afzonderlijke uitspraken:

- h: je vooropleiding is havo,
- v: je vooropleiding is vwo.

De zin "Je vooropleiding is niet havo of vwo" kun je in de logica formuleren als:

$$\neg(h \vee v).$$

Toepassen van de Morgan geeft:

$$\neg(h \vee v) \Leftrightarrow \neg h \wedge \neg v.$$

In woorden: "Je vooropleiding is niet havo en je vooropleiding is niet vwo".

**Opgave 3.9** van de syllabus Logica

Dialoog (niet genderneutraal):

- Schande wordt ervan gesproken van hoog opgeleide vrouwen die met kinderen thuis niet meer een baan buitenshuis hebben.

- Ik ben het daar helemaal mee eens. Daarom stop ik met onmiddellijke ingang met studeren.

Twee proposities:

- H: ze is hoger opgeleid,
- T: ze blijft thuis.

Er wordt schande gesproken van  $H \wedge T$

Conclusie  $\neg(H \wedge T)$ .

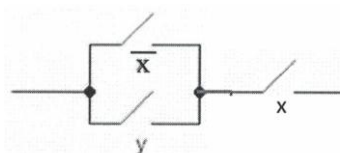
Met de Morgan kun je de conclusie omwerken tot  $\neg H \vee \neg T$ . Deze formulering in woorden: als  $\neg H$  waar is, en/of als  $\neg T$  waar is. Maar gelet op de bovenstaande conclusie wordt eigenlijk bedoeld  $\neg H$ . Er had ook voor  $\neg T$  gekozen kunnen worden, dus niet thuisblijven.

**Opgave 3.11** van de syllabus Logica

Schakelingen

De schakelformule:  $(\bar{x} + y) \cdot x$ .

De schakeling:

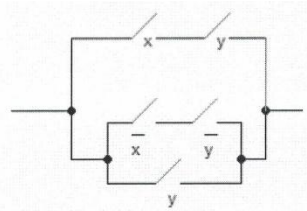


De schakeltabel: Zie volgende pagina.

| x | y | $\bar{x}$ | $\bar{x} + y$ | $(\bar{x} + y) \cdot x$ |
|---|---|-----------|---------------|-------------------------|
| 0 | 0 | 1         | 1             | 0                       |
| 0 | 1 | 1         | 1             | 0                       |
| 1 | 0 | 0         | 0             | 0                       |
| 1 | 1 | 0         | 1             | 1                       |

**Opgave 3.13** van de syllabus Logica

**a) De schakeling**



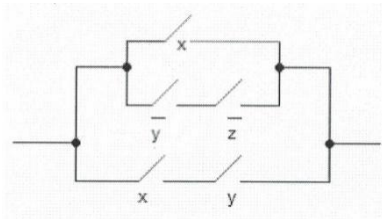
Formule:

$$(x \cdot y) + (\bar{x} \cdot \bar{y} + y).$$

Schakeltabel:

| x | y | $x \cdot y$ | $\bar{x}$ | $\bar{y}$ | $\bar{x} \cdot \bar{y}$ | $\bar{x} \cdot \bar{y} + y$ | $(x \cdot y) + (\bar{x} \cdot \bar{y} + y)$ |
|---|---|-------------|-----------|-----------|-------------------------|-----------------------------|---------------------------------------------|
| 0 | 0 | 0           | 1         | 1         | 1                       | 1                           | 1                                           |
| 0 | 1 | 0           | 1         | 0         | 0                       | 1                           | 1                                           |
| 1 | 0 | 0           | 0         | 1         | 0                       | 0                           | 0                                           |
| 1 | 1 | 1           | 0         | 0         | 0                       | 1                           | 1                                           |
|   |   |             |           |           |                         |                             |                                             |

**b) De schakeling:**



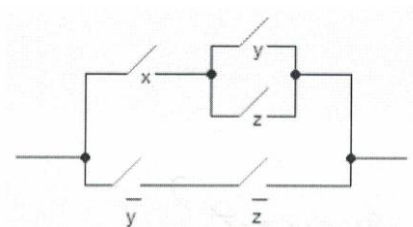
Formule:

$$(x + \bar{y} \cdot \bar{z}) + (x \cdot y).$$

Schakeltabel:

| x | y | z | $\bar{y}$ | $\bar{z}$ | $\bar{y} \cdot \bar{z}$ | $(x + \bar{y} \cdot \bar{z})$ | $x \cdot y$ | $(x + \bar{y} \cdot \bar{z}) + (x \cdot y)$ |
|---|---|---|-----------|-----------|-------------------------|-------------------------------|-------------|---------------------------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 1         | 1         | 1                       | 1                             | 0           | 1                                           |
| 0 | 0 | 1 | 1         | 0         | 0                       | 0                             | 0           | 0                                           |
| 0 | 1 | 0 | 0         | 1         | 0                       | 0                             | 0           | 0                                           |
| 0 | 1 | 1 | 0         | 0         | 0                       | 0                             | 0           | 0                                           |
| 1 | 0 | 0 | 1         | 1         | 1                       | 1                             | 0           | 1                                           |
| 1 | 0 | 1 | 1         | 0         | 0                       | 1                             | 0           | 1                                           |
| 1 | 1 | 0 | 0         | 1         | 0                       | 1                             | 1           | 1                                           |
| 1 | 1 | 1 | 0         | 0         | 0                       | 1                             | 1           | 1                                           |

**c) De schakeling:**



Formule:

$$x \cdot (y + z) + (\bar{y} \cdot z)$$

Schakeltabel:

| x | y | z | y + z | $x \cdot (y + z)$ | $\bar{y} \cdot \bar{z}$ | $x \cdot (y + z) + (\bar{y} \cdot \bar{z})$ |
|---|---|---|-------|-------------------|-------------------------|---------------------------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0     | 0                 | 1                       | 1                                           |
| 0 | 0 | 1 | 1     | 0                 | 0                       | 0                                           |
| 0 | 1 | 0 | 1     | 0                 | 0                       | 0                                           |
| 0 | 1 | 1 | 1     | 0                 | 0                       | 0                                           |
| 1 | 0 | 0 | 0     | 0                 | 1                       | 1                                           |
| 1 | 0 | 1 | 1     | 1                 | 0                       | 1                                           |
| 1 | 1 | 0 | 1     | 1                 | 0                       | 1                                           |
| 1 | 1 | 1 | 1     | 1                 | 0                       | 1                                           |

Oefenen

Lezen: Logica Les 3

## Blok 2 Les 4 Predicatenlogica

Deze les sluit aan bij Les 4 van de Syllabus Logica WD\_online

- Verzamelingen

Natuurlijke getallen:  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Gehele getallen:  $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Rationale getallen (breuken):  $\mathbb{Q}$

Voorbeelden:  $-\frac{2}{3}, 0, \frac{5}{7}, 1\frac{2}{3}$

Reële getallen:  $\mathbb{R}$

Voorbeelden:  $-\pi, 0, -4, 4, \frac{5}{7}, \sqrt{2}$

Complexe getallen:  $\mathbb{C}$

- Predicaten ofwel open beweringen

In de voorgaande lessen hebben we gewerkt met proposities. We gaan nu open beweringen of predicaten bespreken.

Voorbeeld

$$2x - 3 \geq 0$$

De ongelijkheid is niet waar en niet onwaar.

$x$  kun je vervangen door een getal. Dat getal maakt de ongelijkheid waar of onwaar.

De ongelijkheid is waar voor  $x = 5$ .

De ongelijkheid is onwaar voor  $x = 1$ .

De ongelijkheid is waar voor alle reële getallen  $x \geq 3/2$ .

Andere voorbeelden:

$$x^2 + 2x - 5 < 0,$$

$$y = 2x^2 + 1,$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Een predicaat is een open bewering (vergelijking of ongelijkheid), met één of meer variabelen (aangegeven door letters).

Een predicaat heeft geen vast te stellen waarheid.

Door waarden, getallen, voor de variabelen(de letters) te kiezen, gaat een predicaat over in een propositie die waar is of onwaar is.

Voorbeeld

$$P(x) \text{ is: } x + \frac{1}{x} = 2\frac{1}{2}$$

Neem  $x = 1 \rightarrow P(1)$  is onwaar.

Neem  $x = 2 \rightarrow P(2)$  is waar.

Er bestaat nog een waarde van  $x$  waarvoor  $P(x)$  waar is. Welke waarde is dat?

Daartoe herschrijf je  $x + \frac{1}{x} = 2\frac{1}{2} \rightarrow x^2 - 2\frac{1}{2}x + 1 = 0 \rightarrow (x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$ . Dus naast de waarde van  $x = 2$ , is er de andere waarde van  $x = \frac{1}{2}$ .

Van open beweringen kun je dus niet zeggen of ze waar of onwaar zijn. Het zijn geen proposities. Zodra je getallen hebt ingevuld, wordt de open bewering een propositie, die waar of onwaar is.

- De Al-kwantor, ook wel universele kwantor genoemd.

(kwantor: iets dat een hoeveelheid nader omschrijft)

Voorbeeld

$$P(n) \text{ is: "2} \cdot n \text{ is even"}$$

$P(n)$  is waar voor elk natuurlijk getal, dus voor elke  $n \in \mathbb{N}$ .

Notatie:  $\forall n \in \mathbb{N}: P(n)$ .

Van de voorbeelden:

$$x^2 + 2x - 5 < 0,$$

$$y = 2x^2 + 1,$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

geldt alleen het predicaat  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ , voor alle waarden van  $a$  en  $b$ .

de wiskunde heeft een speciaal symbool om dit aan te geven:

$\forall$  is de al-kwantor('voor alle waarden').

$\forall$  is altijd gekoppeld aan een verzameling.

Voorbeeld

$P(x)$  is de propositie  $x + 7 > 9$  en  $V$  de verzameling die bestaat uit vier elementen: 4, 7, 23, en 24, dus  $V = \{4, 7, 23, 24\}$ . Dan zijn de proposities  $P(4)$ ,  $P(7)$ ,  $P(23)$  en  $P(24)$  alle waar. In woorden: voor elke  $x$  uit  $V$  is het predicaat een ware propositie.

In symbolen:  $\forall_{x \in V} P(x)$  is waar.  $\forall_{x \in V} P(x)$  is een ware propositie.

**Opgave 4.1** Propositie en Predicaat:

De propositie "Alle zesvouden zijn deelbaar door 3", kun je als volgt formeel opschrijven:

$V$  is de verzameling van zesvouden.

$P(n)$  is het predicaat “ $n$  is deelbaar door 3”.

$\forall_{n \in V} P(n)$  is een ware bewering.

Je kunt bovenstaande propositie ook ander opschrijven.

Stel  $V(n)$  is het predicaat “ $n$  is een zesvoud”.

De formele notatie voor “Alle zesvouden zijn deelbaar door 3”, wordt met de implicatie en de al-kwantor:

$\forall_{n \in n} V(n) \Rightarrow P(n)$ .

- **De Existentiële-kwantor**

Voorbeeld:

$P(x)$  is:  $x^2 = 3$ .

$P\sqrt{3}$  is waar en  $P\sqrt{-3}$  is waar.

Notatie:  $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 = 3$ .

$\exists$  is de existentiële-kwantor (“er is een waarde”), dus er is een  $x$  waarvoor  $x^2 = 3$  waar is.

Lees: er is ‘een’  $x$  en lees niet er is ‘één’  $x$ .

$\exists$  is altijd gekoppeld aan een verzameling.

Nog een voorbeeld van het gebruik van de existentiële kwantor:

Neem de vergelijking  $2x^2 + 5 = 3x^2 - 7$  en de vergelijking  $3x + 5 = 3x - 5$  en noem ze respectievelijk  $P(x)$  en  $Q(x)$ . De eerste vergelijking heeft wel oplossingen en de tweede vergelijking niet.

De propositie  $P(x): \exists_{x \in \mathbb{R}} (2x^2 + 5 = 3x^2 - 7)$  lees je als: er is een (reële)  $x$  waarvoor geldt  $2x^2 + 5 = 3x^2 - 7$ .

$Q(x): \exists_{x \in \mathbb{R}} (3x + 5 = 3x - 5)$  is niet waar.

Er is geen enkele  $x$  waarvoor  $Q(x)$  waar is, met andere woorden voor alle  $x$  is  $Q(x)$  niet waar.

- **De ontkenning van kwantoren**

Voorbeeld:

“ $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 = 3$ ” is niet waar, want alleen waar voor  $x = \sqrt{3}$  en  $x = -\sqrt{3}$ .

Dus “ $\neg(\forall x \in \mathbb{R}: x^2 = 3)$ ” is waar.

Voorbeeld:

“ $\exists x \in \mathbb{Q}: x^2 = 3$ ” is niet waar, want  $\sqrt{3}$  is niet als breuk te schrijven.

Dus “ $\neg(\exists x \in \mathbb{Q}: x^2 = 3)$ ” is waar.

Notatie: “ $\nexists x \in \mathbb{Q}: x^2 = 3$ ” is waar.

In woorden: “Er bestaat geen rationaal getal  $x$  waarvoor  $x^2 = 3$ ”.

Voorbeeld :

$P$  is: “De boom is gezond”.

$V$  is de verzameling van bomen in een bos.

“Alle bomen in het bos zijn gezond” kun je schrijven als: “ $\forall_{x \in V} P(x)$  is waar”.

En “ $\neg \forall_{x \in V} P(x)$  is waar” betekent: “Er is een ongezonde boom in het bos”.

De laatste aangehaalde uitdrukking kun je ook schrijven als “ $\exists_{x \in V} (\neg P(x))$  is waar”.

**Opgave 4.2** van de syllabus Logica:

Laat door uitschrijven in woorden zien dat  $\neg(3x + 5 = 3x - 5)$  gelijkwaardig is met

$\forall_{x \in \mathbb{R}} \neg(3x + 5 = 3x - 5)$ , en deze laatste representatie weer gelijkwaardig is met

$\forall_{x \in \mathbb{R}} (3x + 5 \neq 3x - 5)$ .

$\neg(3x + 5 = 3x - 5)$ , betekent: Er is geen reëel getal als oplossing van de vergelijking  $3x + 5 = 3x - 5$ .

$\forall_{x \in \mathbb{R}} \neg(3x + 5 = 3x - 5)$ , betekent: Voor elk reëel getal  $x$ , is de vergelijking  $3x + 5 = 3x - 5$  onwaar.

$\forall_{x \in \mathbb{R}} (3x + 5 \neq 3x - 5)$ , betekent: Voor elk reëel getal  $x$ , is  $3x + 5 \neq 3x - 5$ .

#### Opgave 4.3 van de syllabus Logica

De ontkenning van de al-kwantor

Met betrekking tot  $P(x)$ ,  $2x^2 + 5 = 3x^2 - 7$ , merken we op dat niet alle dat niet alle waarden van  $x$  oplossingen zijn.

a) De formulering van dit predicaat met de ontkenning van de al-kwantor.

$$\neg \forall_{x \in \mathbb{R}} (2x^2 + 5 = 3x^2 - 7).$$

b) De formele formulering met een existentiële kwantor.

$$\exists_{x \in \mathbb{R}} (2x^2 + 5 \neq 3x^2 - 7).$$

- De ontkenning van Kwantoren en de Morgan

Neem de verzameling:  $V = \{1, 2, 3, 4\}$ .

$V$  is een eindige verzameling.  $P(x)$  is een predicaat over getallen.

In dit geval kun je kwantoren uitschrijven met  $\wedge$  en  $\vee$ .

Je kunt de propositie  $\forall_{x \in V} P(x)$  ook uitschrijven als  $P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$ .

Dus  $\forall_{x \in V} P(x) \Leftrightarrow P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$ .

De propositie  $\exists_{x \in V} P(x) \Leftrightarrow P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$ .

De ontkenning van de propositie  $\forall_{x \in V} P(x)$  met de Morgan:

$$\begin{aligned} \neg[\forall_{x \in V} P(x)] &\Leftrightarrow \neg[P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \neg P(1) \vee \neg P(2) \vee \neg P(3) \vee \neg P(4) \Leftrightarrow \exists_{x \in V} [\neg P(x)]. \end{aligned}$$

In woorden: "Als  $P(x)$  niet waar is voor alle  $x \in V$ , dan is er een  $x \in V$  waarvoor  $\neg P(x)$  waar is."

Dus  $\neg[\forall_{x \in V} P(x)]$  is gelijkwaardig met  $\exists_{x \in V} [\neg P(x)]$ .

*Algemeen: de ontkenning van kwantoren:*

$$\neg[\forall_{x \in V} P(x)] \Leftrightarrow \exists_{x \in V} [\neg P(x)].$$

*En:*

$$\neg \exists_{x \in V} [P(x)] \Leftrightarrow \forall_{x \in V} [\neg P(x)].$$

#### Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven.

##### Opgave 4.4 van de syllabus Logica :

De Franse advocaat Pierre de Fermat, was een enthousiast wiskundige, die veel wiskunde in zijn vrije tijd bedreef.

Hij kwam omstreeks 1625 met het volgende vermoeden (conjecture):

$\forall_{n \in \mathbb{N}} (2^{2^n} + 1)$  is een priemgetal.

Een priemgetal heeft slechts twee delers, het getal 1 en het getal zelf.

a) Bereken welke uitkomst je krijgt voor  $n = 5$ .

$$2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4.294.967.279.$$

b) De wiskundige Euler ontdekte in 1732 dat voor  $n = 5$ , het vermoeden niet klopt. Hij ontdekt dat het getal dat ontstaat door  $n = 5$ , in te vullen, deelbaar is door 641.

Euler heeft gelijk:  $\frac{4.294.967.279}{641} = 6700417$ .

c) Het vermoeden van de Fermat was onjuist. Je kunt nu schrijven:  $\neg \forall_{n \in \mathbb{N}} (2^{2^n} + 1)$ . Deze propositie kan herschreven worden met  $\exists$ .

$$\neg \forall_{n \in \mathbb{N}} (2^{2^n} + 1) \Leftrightarrow \exists_{n \in \mathbb{N}} [(2^{2^n} + 1) \text{ is niet priem }].$$

**Opgave 4.5** van de syllabus Logica :

Priemgetallen.

De propositie  $\exists_{n \in P} \forall (m > n)$ . In woorden: voor alle priemgetallen (uit de verzameling van priemgetallen  $P$ )  $m$  bestaat een priemgetal  $n$  zodat  $m > n$ .

De propositie klopt niet. Want 2 is weliswaar een priemgetal maar 2 is niet groter dan 2.

**Opgave 4.6** van de syllabus Logica:

Een oefening in kwantoren met een aantal open beweringen.

- a) .....  $\sqrt{x^2} = |x|$ . Met kwantor:  $\forall_{x \in \mathbb{R}} (\sqrt{x^2} = |x|)$ .  
 b) .....  $y = 2x - 1$ . Met kwantoren:  $\forall_{x \in \mathbb{R}} \exists_{y \in \mathbb{R}} (y = 2x - 1)$ .  
 c) .....  $x^2 + y^2 = 25$ . Met kwantoren:  $\exists_{x \in \mathbb{R}} \exists_{y \in \mathbb{R}} (x^2 + y^2 = 25)$ .

**Opgave 4.7** van de syllabus Logica :

De waarheidswaarde van proposities. Indien niet anders aangeduid werken we in de verzameling  $\mathbb{R}$ .

- a)  $\forall_x \exists_y (xy = 1)$ .

Deze propositie is niet waar. Voor  $x = 0$ , is er geen  $y$  zodat  $xy = 1$ .

- b)  $\forall_x \forall_y [(x > y) \vee (x < y) \vee (x = y)]$ .

Deze propositie is waar. Je kunt alle reële getallen in grootte met elkaar vergelijken.

- c)  $\forall_{x \geq 0} \forall_{y \geq 0} \forall_{z \geq 0} (x^3 + y^3 = z^3 \Rightarrow xyz = 0)$ .

Deze propositie is niet waar. Neem  $x = 1, y = 1$ , en  $z = \sqrt[3]{2}$ . Dan is  $x^3 + y^3 = z^3$ , maar  $xyz \neq 0$ .

- d)  $\exists_x \forall_y (y + x = y)$ .

Deze propositie is waar voor  $x = 0$ .

**Opgave 4.8** van de syllabus Logica :

De waarheidswaarde van proposities.

- a)  $\exists_x \forall_y (y + x^2 > 0)$ .

Deze propositie is niet waar. Kies een willekeurige  $x$  en kies daarbij  $y = -x^2$ . Dan is  $y + x^2 = 0$ . Er bestaat dus geen  $x$  zodat voor alle waarden van  $y$  geldt  $y + x^2 > 0$ .

- b)  $\forall_y \exists_x (y + x^2 > 0)$ .

Deze propositie is waar. Kies  $y = x^2 + 1$ . Dan is  $y + x^2 = 2x^2 + 1 > 0$ . Je kunt ook  $y = x^2 + 2$  kiezen.

- Oefenen

Lezen: Logica les 4

## Blok 2 Toets Logica

**Opgave 1**

- a) Een bekende propositie in de meetkunde is: "Als een vierhoek drie rechte hoeken heeft, dan is de vierde hoek ook recht."

De propositie in de vorm van de implicatie.

$P$  is de propositie: Een vierhoek heeft drie rechte hoeken.

$Q$  is de propositie: Een vierhoek heeft vier rechte hoeken.

$P \Rightarrow Q$ .

- b) Van de meetkundige propositie  $P \Rightarrow Q$  is bekend dat die waar is.

De waarheidstabel waarin we ook  $\neg P \vee Q$  opnemen:

| P | Q | $P \Rightarrow Q$ | $\neg P$ | $\neg P \vee Q$ |
|---|---|-------------------|----------|-----------------|
| 0 | 0 | 1                 | 1        | 1               |
| 0 | 1 | 1                 | 1        | 1               |
| 1 | 0 | 0                 | 0        | 0               |
| 1 | 1 | 1                 | 0        | 1               |

Gegeven is dat  $P \Rightarrow Q$  in de derde kolom de waarde 1 heeft. Uit de tabel blijkt dat  $\neg P \vee Q$  dan ook de waarde 1 heeft.

c) De meetkundige propositie zoals geformuleerd onder a) luidt in de vorm van  $\neg P \vee Q$ :

“Een vierhoek heeft geen drie rechte hoeken of heeft vier rechte hoeken.”

d) Gegeven is een vierhoek  $ABCD$  met twee rechte hoeken.

Een redenering: “Omdat  $\neg P \vee Q$  waar is en in dit geval van  $ABCD$ ,  $\neg P$  waar is, kan de vierhoek geen vier rechte hoeken hebben.” Deze redenering is niet juist. Het  $\vee$ -teken symboliseert het niet-exclusieve ‘of’. Dat betekent dat  $\neg P$  en  $Q$  beide waar kunnen zijn.

### Opgave 2

Toepassingen van de Morgan.

a) We gaan de volgende formulering herschrijven met de Morgan:

$$\neg(\neg P) \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg P) \vee (\neg Q).$$

$$\neg(\neg P) \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg P) \vee (\neg Q) = P \vee (\neg Q).$$

b) Gebruik bovenstaande herschrijving om de bewering “P is niet geslaagd en Q wel” te ontkennen.

De ontkenning: “P is geslaagd of Q is niet geslaagd”.

c) Gebruik de bovenstaande herschrijving onder a) om  $0 < x < 10$  te ontkennen.

$0 < x < 10$  is samengesteld uit  $x > 0$  en  $x < 10$ .

De ontkenning wordt dan:  $x \leq 0$  of  $x \geq 10$ .

### Opgave 3

Negatie van proposities en het onderzoek of de propositie of de negatie van de propositie waar is.

a) Propositie: Alle kwadraten zijn positief.

De negatie van deze propositie: niet alle kwadraten zijn positief. Deze propositie is juist:  $0^2 = 0$ .

Nota Bene: met  $i = \sqrt{-1} \rightarrow i^2 = -1$ . Dit wordt in verdere lessen uitgelegd.

b) Propositie: Er bestaat geen kwadraat dat negatief is.

De negatie: Er bestaat een kwadraat dat negatief is. Of: Alle kwadraten zijn groter of gelijk aan 0. Deze uitspraak is waar.

c) Propositie: Twee lijnen in de ruimte hebben een punt gemeen of zijn evenwijdig.

De negatie: Twee lijnen hebben geen punt gemeen en zijn niet evenwijdig. De lijnen kruisen elkaar.

De propositie en de negatie van de propositie kunnen waar zijn.

d) Propositie: Er zijn waarden van  $x$  waarvoor  $\sin x > 0$ , en  $\cos x < 0$ .

De negatie: Er zijn geen waarden van  $x$  waarvoor  $\sin x > 0$ , en  $\cos x < 0$ .

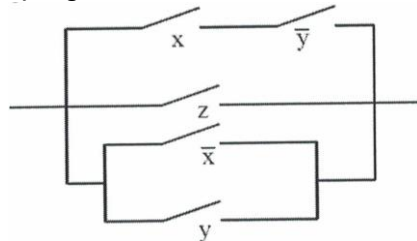
Of anders geformuleerd: voor alle waarden van  $x$  geldt  $\sin x \leq 0$ , en  $\cos x \geq 0$ .

De propositie is waar:  $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ , en  $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ .

### Opgave 4

Schakelingen

a) Gegeven de onderstaande schakeling



De bijbehorende formule:

$$(x \cdot \bar{y}) + z + \bar{x} + y.$$

De schakel tabel ( zie volgende bladzijde):

| x | y | z | $\bar{y}$ | $x \cdot \bar{y}$ | $(x \cdot \bar{y}) + z$ | $\bar{x}$ | $(x \cdot \bar{y}) + z + \bar{x}$ | $(x \cdot \bar{y}) + z + \bar{x} + y$ |
|---|---|---|-----------|-------------------|-------------------------|-----------|-----------------------------------|---------------------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 1         | 0                 | 0                       | 1         | 1                                 | 1                                     |
| 0 | 0 | 1 | 1         | 0                 | 1                       | 1         | 1                                 | 1                                     |
| 0 | 1 | 0 | 0         | 0                 | 0                       | 1         | 1                                 | 1                                     |
| 0 | 1 | 1 | 0         | 0                 | 1                       | 1         | 1                                 | 1                                     |
| 1 | 0 | 0 | 1         | 1                 | 1                       | 0         | 1                                 | 1                                     |
| 1 | 0 | 1 | 1         | 1                 | 1                       | 0         | 1                                 | 1                                     |
| 1 | 1 | 0 | 0         | 0                 | 0                       | 0         | 0                                 | 1                                     |
| 1 | 1 | 1 | 0         | 0                 | 1                       | 0         | 1                                 | 1                                     |

**b)** Toelichting bij de tabel met behulp van de standen van de schakelaars.  
Zie bovenstaande schakeling.

- Als  $x = 0$ , dan is  $\bar{x} = 1$  en gaat de stroom lopen via  $\bar{x}$ .
  - Als  $x = 1$  en  $y = 1$ , dan loopt er stroom door de onderste schakeling.
  - Als  $x = 1$  en  $y = 0$ , dan loopt er stroom door de bovenste schakeling.
- Er loopt altijd stroom. De stand van  $z$  heeft geen invloed.

### Opgave 5

**a)** Voor alle  $x$  en  $y$  is  $x^2 + y^2$  niet negatief.

Formeel geformuleerd:  $\forall x \forall y (x^2 + y^2 \geq 0)$ . De propositie is waar.

**b)** Bij alle  $x$  is er een  $y$  zodat  $\frac{x}{y} = 4$ .

Formeel geformuleerd:  $\forall x \exists y \left(\frac{x}{y} = 4\right)$ . De propositie is niet waar. Bij  $x = 0$  is er geen  $y$  die aan de vergelijking voldoet.

**c)** Er is geen  $x$  zodat voor alle  $y$ ,  $x + y = 3$ .

Formeel geformuleerd:  $\neg \exists x \forall y (x + y = 3)$ . De propositie is waar. Dus, als voorbeeld,  $x = 5$ : er is maar één  $y$ .

Opmerking:  $\neg \exists$  is gelijk aan  $\forall$ , maar  $\forall$  is geen formele taal.

## Blok 3 Binomiale verdelingen

### Blok 3 Les 1 Kans en combinatoriek

(Deze les sluit aan bij paragraaf 1 van Hoofdstuk 2 Binomiale en normale verdelingen van de Wageningse Methode, <http://www.wageninsemethode.nl/methode/het-lesmateriaal/?S=y456v-d> )

- **Kans (herhaling)**

$U$  is de verzameling van uitkomsten.

$\#U$  is het aantal elementen van  $U$ .

Een gebeurtenis  $V$  is een deelverzameling van  $U$ .

$P(V) = \frac{\#V}{\#U}$  is de kans op gebeurtenis  $V$ .

Gevolg:  $0 \leq P(V) \leq 1$ .

Voorbeeld 1

Werpen met twee zuivere munten.

$U = \{(K, K), (K, M), (M, K), (M, M)\}$

$V$  is de gebeurtenis: "Dubbel  $K$  of dubbel  $M$ "

$V = \{(K, K), (M, M)\}$

$P(V) = \frac{\#V}{\#U} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ .

### Opgave 3 van § 1

Voor een loket staan 8 mensen waaronder Anneke en Egon. Wat is de kans dat Egon(E) voor Anneke(A) staat?

$U$  is de verzameling van alle mogelijke volgordes in de rij.

$V$  is de verzameling van volgordes waarbij E voor A staat.

$W$  is de verzameling van volgordes waarbij A voor E staat.

Intuïtief zeg je dat de kansen gelijk zullen zijn en  $V \cup W = U$ .

In formule:

$$\#V = \#W \text{ dus } P(V) = P(W).$$

Je weet:  $V \cup W = \#V + \#W - \#(V \cap W)$ , Blok 1 Les 4.

$$V \cup W = U \text{ en } V \cap W = \emptyset \rightarrow P\left(\frac{V \cup W}{U}\right) = \frac{\#V}{\#U} + \frac{\#W}{\#U} = P(V) + P(W) = 1.$$

$$\text{Conclusie } P(V) = P(W) = \frac{1}{2}.$$

Nota bene :  $V \cap W = \emptyset$ , ten overvloede wordt opgemerkt dat E en A niet beiden voor elkaar kunnen staan.

**Kans definitie:** Als bij een experiment  $n$  even waarschijnlijke uitkomsten zijn, waarvan er  $k$  zijn van een bepaald type, dan is de kans op een uitkomst van dat type gelijk aan  $\frac{k}{n}$ .

Uitkomsten zijn even waarschijnlijk als ze als gelijkwaardig mogen worden beschouwd.

### Opgave 4 de kans definitie van § 1

Bij een verloting zijn er 100 verschillende loten, genummerd 1 t/m 100. De personen A, B, C, D krijgen ieder een willekeurig lot.

**a)** De kans dat het nummer dat A krijgt groter is dan de nummers die B, C, en D krijgen.

De kans dat A het grootste nummer heeft is even groot als de kans dat B het grootste nummer heeft en is ook gelijk aan de kans dat C of D het grootste nummer hebben. Immers, de loten zijn willekeurig verdeeld. Samenvat: A, B, C en D hebben allen een gelijke kans op het lot met het hoogste nummer. Samen zijn de kansen 1, dus ieder apart is de kans  $\frac{1}{4}$ .

**b)** De kans dat A een nummer krijgt groter dan 50, maar kleiner dan 70.

De kans op ieder van de nummers is  $\frac{1}{100}$ , want iedere uitkomst is even waarschijnlijk (dus gelijkwaardig).

Er zijn 19 nummers groter dan 50 en kleiner dan 70. De kans op een nummer tussen de 50 en de 70 is dus:  $\frac{19}{100}$ .

Samengevat: de nummers tussen de 50 en de 70 zijn de nummers 51 t/m 69  $\rightarrow \#V$ .

$$\text{Er zijn 100 nummers} \rightarrow \#U \rightarrow V \in U \rightarrow P(V) = \frac{\#V}{\#U} = \frac{19}{100}.$$

In Oefenopgave 10 van § 1 wordt een voorbeeld uitgewerkt waarbij de uitkomsten van een kans experiment niet even waarschijnlijk zijn:

### Opgave 10 van § 1

De uitkomsten van kans experimenten zijn vaak even waarschijnlijk. Maar dat is niet altijd zo.

E. heeft drie kaartjes: één met een blauwe en een rode kant, één met een witte en een rode kant en één met beide kanten rood. E. pakt een willekeurige kaart en legt deze op tafel. De kant die E. ziet blijkt rood te zijn.

**a)** De kans dat de andere kant van de kaart ook rood is.

In eerste instantie denk je dat de kans misschien  $\frac{1}{3}$  is, want als je een rode kant ziet, dan kan de andere kant van de kaart blauw, wit of rood zijn. Het zal blijken dat dit niet correct is.

**b)** Als je één van de kaarten op tafel legt, zijn er 5 uitkomsten:

- 1) wit boven, rood onder,
- 2) rood boven, wit onder,
- 3) blauw boven, rood onder,
- 4) rood boven, blauw onder,

5) rood boven, rood onder.

De uitkomsten zijn niet even waarschijnlijk. De kaart met beide kanten rood geeft in beide gevallen, boven en onder, rood.

c) Terug naar de kans genoemd onder a).

Er zijn twee mogelijkheden met rood boven, en rood onder. Samen met rood boven, wit onder en rood boven, blauw onder zijn er dus 4 mogelijkheden waarvan in twee gevallen de onderkant rood is. De kans is dus  $2/4=1/2$ .

Je wilt dus weten hoeveel mogelijke uitkomsten er zijn en die uitkomsten moeten even waarschijnlijk zijn. Ook wil je weten hoeveel speciale uitkomsten er zijn. Dan ken je de kans op zo'n speciale uitkomst. Hoeveel uitkomsten er zijn en hoeveel speciale uitkomsten, is vaak een kwestie van tellen. Dit is in Blok 1 in het hoofdstuk combinatoriek behandeld.

- Combinatoriek en kans(herhaling).

Toegelicht met voorbeeld van een vaas met 10 nummers van 1 tot en met 10.

- De uitkomsten van **geordende** grepen van  $k$  uit  $n$  **met** herhaling(permutaties) hebben gelijke kans:  $\frac{1}{n^k}$  (Denk aan het wegen diagram).

Je pakt 4 nummers **met** terugleggen en let op de volgorde. De kans op de uitkomst 3,4,3,7 is  $\frac{1}{10^4}$

- De uitkomsten van **geordende** grepen van  $k$  uit  $n$  **zonder** herhaling(permutaties) hebben gelijke kans:  $\frac{(n-k)!}{n!}$ , of kortweg  $\frac{1}{nPk}$ . (Denk aan de kansboom).

Weer 4 nummers trekken, maar nu **zonder** terugleggen en let op de volgorde. De kans op de uitkomst 3,4,7,5 is  $\frac{6!}{10!} = \frac{1}{10nPk4} = \frac{1}{5040}$ .

- De uitkomsten van **ongeordende** grepen van  $k$  uit  $n$  **zonder** herhaling(combinaties) hebben gelijke kans:  $\frac{(n-k)!k!}{n!} = \binom{k}{n}$ , of kortweg  $\frac{1}{nCk}$ .

Weer 4 nummers trekken, maar nu **zonder** terugleggen en let niet op de volgorde. De kans op de uitkomst 3,4,7,5 is  $\frac{(10-4)!4!}{10!} = \binom{4}{10} = \frac{1}{10nCk4} = \frac{1}{210}$ .

Opgelet: let niet op de volgorde, dus er wordt geen onderscheid gemaakt tussen, b.v., 3,4,7,5 en 3,5,7,4.

- De uitkomsten van **ongeordende** grepen van  $k$  uit  $n$  **met** herhaling(combinaties) hebben ongelijke kans. Dus de kans op de uitkomst 3,4,3,7 is ongelijk aan de kans op 3,4,5,7. In het eerste geval is het aantal mogelijkheden twee keer zo klein dan bij de tweede keer.

Voorbeeld:

- 7(n) wielrenners in de kopgroep, 3(r) daarvan zullen het podium bestijgen. Hoeveel mogelijke opstellingen zijn er?

Oplossing

Een greep van 3 uit 7 zonder herhaling. De volgorde is van belang. De kansboom. Voor plaats 1 zijn er 7 mogelijkheden, voor plaats 3 zijn er nog 6 mogelijkheden en voor plaats 3 resteren er nog 5 mogelijkheden. Totaal:  $7 \times 6 \times 5 = 210$  mogelijkheden.

Aantal mogelijkheden:  $7nPr3 = 210$ .

- 7 hardlopers in de kopgroep, 3 daarvan gaan naar de halve finale. Hoeveel mogelijke combinaties zijn er voor de halve finale?

Oplossing

Een greep van 3 uit 7 zonder herhaling.

Volgorde is niet van belang.

Aantal mogelijkheden:  $7 \text{ nCr } 3 = 35$ .

Oplossing met redeneren:

Voor plaats 1 zijn er 7 mogelijkheden, voor plaats 2 zijn er 6 mogelijkheden en voor plaats 3 zijn er 5 mogelijkheden. Totaal:  $7 \times 6 \times 5 = 210$  mogelijkheden. Maar de volgorde is niet van belang. Drie positie over drie personen verdelen zonder dat de volgorde ertoe doet kan op  $3! = 6$  manieren. Dus het totaal aantal mogelijkheden wordt minder  $210 : 6 = 35$ .

*Permutaties:*

$$nPr = n(n-1)(n-2) \dots (n-[r-1]) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

*Combinaties:*

$$nCr = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

*Hieruit volgt:*

$$nCr = \frac{nPr}{r!}, \text{ je deelt de dubbele tellingen eruit (r!).}$$

- De product – en de somregel

*U is de uitkomstenruimte.*

*V en W zijn onafhankelijke gebeurtenissen in U.*

*Dan geldt:  $P(V \cap W) = P(V) \cdot P(W)$ , (zie Blok 1 Les 4).*

*Sluiten V en W elkaar uit, dus  $V \cap W = \emptyset$  dan geldt:*

$$P(V \cap W) = P(V) + P(W).$$

*Deze eigenschappen kun je gebruiken om rechtstreeks kansen uit te rekenen als je de kansen van V en W kent.*

- De productregel

Voorbeeld:

In een vaas zitten 6 ballen, 2 witte(W) en 4 rode(R) ballen.

Je trekt drie keer zonder terugleggen een bal. Wat is de kans op twee witte ballen?

Er zijn drie mogelijkheden: je trekt WWR, WRW, of RWW.

- Bij WWR: de eerste bal is wit. Er zijn 2 W's van de 6 ballen. De kans is:  $\frac{2}{6}$ . De tweede bal is wit. Er is er nog maar 1 van de 5 wit. De kans op de tweede wit is  $\frac{1}{5}$ . Totaal:  $\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$ .  
(De overige 4 zijn rood. De kans op 1 rode bal is 1.)

- WRW: de eerste bal wit. De kans is:  $\frac{2}{6}$ . De tweede bal is rood. Er zijn er 4 van de 5 rood. De kans op de tweede rood is  $\frac{4}{5}$ . De derde bal wit. Er is nog 1 van de 4 resterende ballen wit. De kans is:  $\frac{1}{4}$ . Totaal:  $\frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{15}$ .

- RWW: de eerste bal is rood. De kans is:  $\frac{4}{6}$ . De tweede bal is wit: Twee van de resterende 5 zijn wit. De kans is:  $\frac{2}{5}$ . De derde bal is wit. Er is nog 1 van de 4 resterende

ballen wit. De kans is:  $\frac{1}{4}$ . Totaal:  $\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{15}$ .

De kans op twee witte ballen is:  $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ . De drie kansen worden opgeteld, want de drie mogelijkheden sluiten elkaar uit.

- **Kansverdelingen**

- **Voorbeeld**

*Je werpt met een zuivere dobbelsteen.*

*Het aantal mogelijke ogen van de dobbelsteen is 1, 2, 3, 4, 5 of 6.*

*$X$  = het aantal ogen dat is gegooit.*

*$X$  wordt een toevalsgrootheid of stochast genoemd. De waarden van  $X$  zijn elementen van een gebeurtenis.*

*In de tabel staan de kansen bij de mogelijke waarden van  $X$ .*

| $k$      | 1             | 2             | 3             | 4             | 5             | 6             |
|----------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $P(X=k)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

*Een tabel met de kansen bij een stochast, heet een kansverdeling.*

- **Voorbeeld:**

*Je werpt met twee zuivere dobbelstenen.*

*$X$  = de som van het aantal ogen.*

*In de tabel staan de mogelijke waarden van  $X$ .*

|   |   |   |   |    |    |    |
|---|---|---|---|----|----|----|
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9  | 10 | 11 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7  | 8  | 9  |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6  | 7  | 8  |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  |
|   | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  |

De kansverdeling is, tellen in bovenstaande tabel,:

| $k$      | 2              | 3              | 4              | 5              | 6              | 7              | 8              | 9              | 10             | 11             | 12             |
|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $P(X=k)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

- **Voorbeeld:**

Stel dat de geboorte van een meisje(M) even waarschijnlijk is als de geboorte van een jongen(J).  $X$  = het aantal meisjes in een gezin van drie kinderen. Wat is de kansverdeling van  $X$ ?

De kansverdeling:

| $k$      | 0             | 1             | 2             | 3             |
|----------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $P(X=k)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

Het aantal gebeurtenissen is: 3 jongens en 3 meisjes is 8. Want

- 0, 1, 2, 3 meisjes,

- 0, 1, 2, 3 jongens.

Een wegendiagram, met twee mogelijkheden een jongen of een meisje en dat 3 keer.

Dus  $2^3$  mogelijkheden.

Alleen jongens 1 mogelijkheid, dus:  $P = \frac{1}{8}$ . (0 meisjes).

Alleen meisjes 1 mogelijkheid, dus:  $P = \frac{1}{8}$ . (0 jongens).

Voor 1 meisje zijn er 3 mogelijkheden: JMJ, JJM, MJJ. Kans is  $\frac{3}{8}$ . De resterende kans voor twee meisjes is:  $P(X = 2) = 1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ . Of ook: MMJ, MJM, JMM.

- **Voorbeeld:**

In een doos zitten 10(=  $n$ ) ballen, vier witte(w) en zes zwarte(z) ballen. Je trekt vijf(=  $r$ ) ballen zonder terugleggen.

$X$  is het aantal witte ballen in die greep

Bereken  $P(X = 2)$  en bereken daarna de kansverdeling van  $X$ .

Een ongeordend (e volgorde doet er niet toe) greep zonder herhaling.

Voor 2 witte ballen heb je  $\binom{4}{2}$  mogelijkheden. Voor de resterende 3(=  $5 - 2$ ) zwarte

ballen heb je  $\binom{6}{3}$  mogelijkheden. Totaal aantal mogelijkheden voor deze greep:

$\binom{4}{2} \times \binom{6}{3}$  mogelijkheden. Om 5 ballen uit 10 ballen te kiezen heb je  $\binom{10}{5}$

mogelijkheden. De kans op de greep van 2 witte balen is:  $P(X = 2) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{3}}{\binom{10}{5}} = 0,47$ .

- **De hypergeometrische verdeling**

*In een doos zitten  $n$  ballen,*

*$w$  witte en  $z$  zwarte ballen,  $w + z = n$ .*

*Je trekt  $r$  ballen **zonder terugleggen**.*

*$X$  is het aantal witte ballen in die greep*

*De kansverdeling bij  $X$ : heet de hypergeometrische verdeling.*

*In formule vorm:  $P(X = k) = \frac{\binom{w}{k} \cdot \binom{z}{r-k}}{\binom{n}{r}}$ .*

In het bovenstaande voorbeeld van 10 ballen, worden er 5( $r$ ) ballen worden getrokken:  
 $k = 0, 1, 2, 3, 4$ .

## Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven.

### Opgave 6 van § 1

Je hebt drie brieven (a, b, en c) geschreven aan vrienden en hun adressen op enveloppen (A, B, en C) gezet. Je pakt envelop A en zonder ergens op te letten stop je een brief in de envelop. Daarna doe je hetzelfde met de andere twee enveloppen. Zie ook vraagstuk 13, Blok 1, Les 1.

**a)** Op hoeveel verschillende manieren kunnen de drie brieven aan de drie enveloppen worden gekoppeld?

Tellen: de brieven a, b, en c kunnen we op 6 manieren op een rijtje leggen: abc, acb, bac, bca, cba, cab. Als de brieven in deze volgorde in de enveloppen worden gestopt kan dat dus op 6 manieren. Permutaties zonder terugleggen:  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ .

**b)**  $X$  is het aantal brieven dat in de juiste envelop zit.  $X$  heet de toevalsgrootte of stochast. Welke waarden kan  $X$  aannemen?

Als we de 6 bovenstaande rijtjes, dan zien we dat alle drie brieven goed kunnen zitten, of geen brief zit goed, of er zit er 1 goed en de andere twee niet. De stochast  $X$ , kan dus 0, 1, of 3 zijn. Zoals je ziet is  $X=2$  gelijk aan

$X=3$ .

**c)** Wat is de kans op elk van deze waarden?

$X=0$ : Door te tellen vind je twee manieren van de zes manieren. Dat is logisch, bij elke envelop horen twee verkeerde brieven.

$$P(X=0)=2/6.$$

$X=1$ : Er komt 1 brief in de juiste envelop. Dat kan op 3 manieren van de zes: bij elke envelop hoort 1 juiste brief.

$$P(X=1)=3/6.$$

$X=3$ : Dat kan maar op 1 manier.

$$P(X=3)=1/6.$$

### **Opgave 8** van § 1

Een telefoonnummer bestaat uit de cijfers 1, 2, 3, 5, 7, en 9. Je weet deze cijfers nog, maar de volgorde ben je vergeten.

**a)** Aantal mogelijke telefoonnummers met bovenstaande cijfers:

Je moet de 6 cijfers op een rij zetten. Voor de eerste positie kun je kiezen uit 6 cijfers, dus 6 mogelijkheden.

Heb je het eerste cijfer gekozen dan zijn er voor de tweede positie 5 cijfers en dus 5 mogelijkheden. Voor de eerste twee posities zijn er  $6 \cdot 5$  mogelijkheden. Voor de derde positie zijn er 4 mogelijkheden, etc.

In totaal  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ , mogelijkheden.

Samengevat: Permutaties, geordende grepen zonder terugleggen  $\rightarrow 6!$ .

**b)** Je gokt en toets het nummer "325197" in.

Alle nummers zijn even waarschijnlijk. De kans dat je het goede nummer hebt: gelet op het aantal mogelijkheden dat je onder a) berekend hebt, is de kans dat je goed gokt  $\frac{1}{720}$ , want het gekozen getal is 1 van de 720.

**c)** Dezelfde vraag als onder b), maar met de kennis dat het eerste getal een 3 is. Er resteren 5 cijfers die je moet gokken. Er resteren  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 (= 5!)$  mogelijkheden. De kans om het goede telefoonnummer te kiezen is  $\frac{1}{120}$ .

### **Opgave 9** van paragraaf 1:

Een tennistoernooi telt 64 deelnemers, waarvan zes Nederlanders en acht Duitsers. Er wordt gespeeld volgens het knock-out systeem: wie verliest ligt eruit. Voor de finale houden we twee spelers over. Omdat voor elke ronde tussen de overgebleven spelers geloot wordt, kan elke speler tegen elke andere speler in de finale komen.

**a)** Hoeveel finales zijn er mogelijk?

De finale wordt gespeeld tussen 2 spelers. Voor de keuze van de eerste speler heb je 64 mogelijkheden. Voor de tweede speler zijn er 63 mogelijkheden. Het lijkt erop dat er  $64 \cdot 63$  mogelijkheden zijn. Let op. De volgorde is niet van belang. We hebben dus een factor 2 te veel mogelijkheden uitgerekend. Het aantal mogelijkheden is:

$$64 \cdot \frac{63}{2} = 2016 \text{ of anders weergegeven: } \binom{n}{k} = \frac{64!}{2!62!} = 2016.$$

**b)** Hoeveel finales zijn er mogelijk waarbij een Nederlander tegen een Duitser speelt?

Er zijn 6 Nederlanders, dus 6 mogelijkheden om een Nederlander te kiezen. Elke Nederlander heeft 8 mogelijkheden om tegen een Duitser te spelen. Totaal:  $6 \cdot 8 = 48$  mogelijkheden.

**c)** Veronderstel dat alle spelers even sterk zijn en dus een even grote kans hebben de volgende ronde te bereiken. Bereken de kans dat de finale gespeeld wordt tussen een Duitser en een Nederlander.

Het totale aantal mogelijkheden is  $\#U = 2016$ . De subset  $\#V$  van het totale aantal mogelijkheden voor een finale Duitser-Nederlander is  $6 \cdot 8 = 48$ . De kans op een finale Duitser en een Nederlander is:

$$P\left(\frac{\#V}{\#U}\right) = \frac{48}{2016} = \frac{1}{42}.$$

**Opgave 11(en 7) van § 1**

Een delegatie van 3 MP's (parlementariërs) maakt een buitenlandse reis. In aanmerking komen 3 MP's van partij A, vier MP's van Partij B, en twee MP's van Partij C. Wie mee mag, wordt door het lot aangewezen. Er zijn totaal 84 drietallen mogelijk.

**a)** De kans dat alle drie MP's van één en dezelfde partij zijn.

We gaan tellen voor de mogelijkheid dat alle drie van dezelfde partij zijn.

- Er is 1 mogelijkheid dat de MP's van A zijn.

- Er zijn 4 mogelijkheden dat de MP's van B zijn, want er kunnen vier MP's van B afvallen.

- Het is niet mogelijk dat de delegatie uit alleen leden van C bestaat. Er zijn slechts 2 MP's.

In totaal zijn er 5 mogelijkheden voor drietallen uit 1 partij. De kans daarop is  $\frac{5}{84}$ .

**b)** De kans dat er van elke partij een MP mee gaat.

- Het aantal mogelijkheden om één MP uit A te kiezen is 3.

- Bij ieder van de voorgaande mogelijkheden zijn er 4 mogelijkheden om een MP uit partij B te kiezen. Dit resulteert al in  $3 \cdot 4$  mogelijkheden.

- Bij deze 12 mogelijkheden zijn er weer twee mogelijkheden om een MP van C te kiezen.

Resultaat:  $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24 [= \binom{3}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{2}{1}]$ , even waarschijnlijke mogelijkheden. De kans daarop is  $\frac{24}{84} = \frac{2}{7}$ .

**c)** Het aantal MP's van B noemen we X.

De waarden van X : 0, 1, 2, 3.

**Overzichtsvraag 3 § 1 Dobbelstenen.**

We werpen met twee "dobbelstenen, een gewone (met 1 t/m 6 ogen) en een ongewone met een regelmatig viervlak (met 1 t/m 4 ogen).

De kans dat het viervlak een hoger aantal ogen heeft dan de gewone dobbelsteen.

We kunnen de uitkomsten van het gooien met een gewone dobbelsteen ( $d$ ) en een viervlaks dobbelsteen ( $v$ ) noteren met het paar  $(d, v)$ . Dan kan  $d$  gelijk zijn aan 1, 2, 3, 4, 5, en 6, en  $v$  kan 1, 2, 3 en 4 zijn. Met deze waarden zijn er  $6 \cdot 4 = 24$  mogelijke paren en dus ook 24 mogelijke uitkomsten die even waarschijnlijk zijn.

We schrijven de paren  $(d, v)$  waarvoor geldt  $d < v$  op een rij. Dat geeft:

$(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)$ .

Er zijn dus 6 paren waarvoor het aantal ogen op het viervlak hoger is dan het aantal ogen op de gewone dobbelsteen. De kans daarop is:

$$P(d < v) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$$

**Opgave 6 van paragraaf 2:**

Een zaalkorfbalteam bestaat uit 4 dames en 4 heren. De coach wijst voor de wedstrijd uit de twaalf beschikbare spelers ( zes dames en zes heren) een team aan.

**a)** Hoeveel verschillende teams kan hij samenstellen?

De volgorde doet er niet toe:  $\binom{n}{k}$  mogelijkheden per set dames en heren. Je kunt vier dames uit zes kiezen:

$\binom{6}{4} = 15$  manieren. Ook vier heren kun je op deze manier kiezen. Totaal  $15 \cdot 15 = 225$  manieren (teams).

**b)** De opstelling bij korfbal: korfbal wordt gespeeld in twee vakken. Een verdedigingsvak en een aanvalsvak. In ieder vak staan van een team twee dames en twee heren. (Waar in het vak de spelers staan, doet er niet toe). Op hoeveel manieren kan de coach uit de aangewezen vier dames en vier heren een beginopstelling vormen?

Er moet voor het verdedigingsvak twee van de vier dames gekozen worden:  $\binom{4}{2} = 6$  manieren. Dit geldt ook voor de vier heren. Totaal  $6 \cdot 6 = 36$  manieren.

**c)** Op hoeveel manieren kan de coach de beginopstelling kiezen uit de beschikbare twaalf spelers?

Combineer de resultaten van a) en b). Samengevat: kies de vier dames en de vier heren en verdeel ze over de vakken:

$$225 \cdot 36 = 8100.$$

**Opgave 9** van § 2 De lotto

Als je met de Lotto meedoet, mag je tegen betaling kiezen uit de getallen 1 tot en met 45. Heb je alle cijfers goed dan win je de hoofdprijs.

Per lottoformulier kun je 10 keer je geluk beproeven. Daarvoor betaal je een bedrag.

**a)** Het aantal formulieren om zeker te zijn van de hoofdprijs.

6 keer trekken zonder terugleggen. De volgorde doet er niet toe. Je moet alle mogelijke keuzes maken. Dat kan op  $\binom{45}{6} = 8145060$  manieren. Per formulier maak je 10 keuzes. Je moet dus 814506 formulieren invullen.

**b)** De kans op alle zes goed als je maar 1 formulier invult.

Op één van de formulieren staat het goede zetal. De kans op zes goed is:  $\frac{1}{814506}$ .

**Opgave 10** van § 2

In een doos zitten dertig ballen: 20 witte en 10 zwarte. Pak 8 ballen uit de doos (zonder terugleggen).

**a)** Het aantal grepen van acht ballen uit een doos van 30 ballen.

Uit 30 ballen 8 ballen kiezen kan op  $\binom{30}{8}$  manieren.

**b)** Het aantal grepen met vijf witte ballen en drie zwarte ballen.

Uit 20 witte ballen pak je er 5 en uit 10 zwarte ballen pak je er 3.

Het totaal aantal grepen is:  $\binom{20}{5} \cdot \binom{10}{3}$ .

**c)** De kans dat je 5 witte ballen en 3 zwarte ballen trekt.

De kans  $P$  is het aantal mogelijkheden gedeeld door het totaal aantal mogelijkheden.

$$P = \frac{\binom{20}{5} \cdot \binom{10}{3}}{\binom{30}{8}} = 0.317.$$

**Opgave 13** van § 2

Kaarten.

Bij het trekken zonder terugleggen van drie kaarten uit een volledig spel kaarten is  $Y$  het aantal getrokken schoppen kaarten.

**a)** Waarden van  $Y$ .

Er kennen 0, 1, 2, 3 schoppen worden getrokken, dus  $Y$  kan de waarden 0, 1, 2, 3 aannemen.

**b)**  $P(Y = 1)$ .

Het totaal aantal mogelijkheden om 3 kaarten uit een volledig spel te trekken is  $\binom{52}{3} = 22100$ .

Het aantal mogelijkheden om 1 schoppen uit 13 en 2 andere uit 39 te trekken is:  $\binom{13}{1} \cdot \binom{39}{2} = 9633$ .

De kans is het aantal mogelijkheden gedeeld door het totaal aantal mogelijkheden:

$$P(Y = 1) = \frac{\binom{13}{1} \cdot \binom{39}{2}}{\binom{52}{3}} = 0.436.$$

Een andere manier om deze kans uit te rekenen voor 1 schoppen  $S$  en twee andere,  $A$ , kaarten.

Drie mogelijkheden met de kans:

$$\text{- SAA: } \frac{13}{52} \cdot \frac{39}{51} \cdot \frac{38}{50},$$

$$\text{- ASA: } \frac{39}{52} \cdot \frac{13}{51} \cdot \frac{38}{50}, \text{ en}$$

$$\text{- AAS: } \frac{39}{52} \cdot \frac{38}{51} \cdot \frac{13}{50}.$$

Je ziet aan de getallen dat de drie kansen gelijk zijn. De totale kans  $P(Y = 1) = 3 \cdot 0.14529 = 0.436$ .

**c)** De kansverdeling van  $Y$  (0, 1, 2, 3): als onder b)

| K          | 0                                                                 | 1                                                                 | 2                                                                 | 3                                                                 |
|------------|-------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| $P(Y = k)$ | $\frac{\binom{13}{0} \cdot \binom{39}{3}}{\binom{52}{3}} = 0,413$ | $\frac{\binom{13}{1} \cdot \binom{39}{2}}{\binom{52}{3}} = 0,436$ | $\frac{\binom{13}{2} \cdot \binom{39}{1}}{\binom{52}{3}} = 0,138$ | $\frac{\binom{13}{3} \cdot \binom{39}{0}}{\binom{52}{3}} = 0,013$ |

**Opgave 15** van § 2

Huiswerkcontrole.

Van vijftientig leerlingen hebben er vijf hun huiswerk niet gemaakt. De leraar neemt een aselechte steekproef van vier leerlingen. Van deze vier leerlingen hebben er  $X$  (de Stochast) hun huiswerk niet gemaakt.

a)  $P(X=4)$  en  $P(X=3)$ .

Het totale aantal mogelijkheden om 4 leerlingen uit 25 te kiezen is  $\binom{25}{4}$ . Een ongeordende greep zonder terugleggen.

Van de 25 leerlingen hebben er 20 wel en 5 niet hun huiswerk gemaakt. Het aantal mogelijkheden om 4 leerlingen uit 5 en (dus 0 uit 20) te kiezen die hun huiswerk niet hebben gemaakt is  $\binom{5}{4}$ .

$$P(X=4): \frac{\binom{5}{4} \cdot \binom{20}{0}}{\binom{25}{4}} = \frac{\binom{5}{4}}{\binom{25}{4}} = \frac{5}{12650} = 0.000395.$$

Het aantal mogelijkheden om 3 leerlingen uit de 5 te kiezen die hun huiswerk niet hebben gemaakt en 1 die het huiswerk niet heeft gemaakt uit de groep van 20 leerlingen die hun huiswerk wel hebben gemaakt is

$$\binom{5}{3} \cdot \binom{20}{1}.$$

$$P(X=3): \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{20}{1}}{\binom{25}{4}} = \frac{10 \cdot 20}{12650} = 0.016.$$

b) Als je bovenstaande berekening hebt uitgevoerd en je krijgt te horen dat van de steekproef van 4 leerlingen er 3 het huiswerk niet hebben gemaakt, zou de steekproef dan wel aselekt zijn geweest? Gelet op de kans  $P(X=3)=0.016$ , is de kans op de aselechte steekproef wel erg klein.

Opmerking: bij vraagstukken zoals bovenstaand is het vaasmodel met bijvoorbeeld rode en witte ballen handig om te gebruiken.

**Overzichtsvraag 2** van § 2

Bridge

A. speelt samen met drie anderen bridge. Ieder krijgt 13 kaarten uit een spel van 52.

Het kaartspel heeft vier azen. We letten op het aantal azen dat A. krijgt.

a)  $P(A = 3)$ . Het totale aantal mogelijke combinaties van 13 kaarten uit het totale aantal van 52 kaarten is  $\binom{52}{13}$ .

Als A. 3 azen moet krijgen van de 4 azen. Dat kan op  $\binom{4}{3}$  manieren. De 10 andere kaarten die A. krijgt, moeten gekozen worden uit de 48 kaarten die geen aas zijn. Dat kan op  $\binom{48}{10}$  manieren. Er zijn dus  $\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{10}$  mogelijkheden waarop A. 3 azen kan krijgen. De kans hierop:

$$P(A = 3) = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{10}}{\binom{52}{13}} = 0.0412.$$

b) Het kaartspel heeft 13 klaveren, 13 ruiten, 13 harten en 13 schoppen.

De kans dat A. van elke soort ten minste 3 kaarten krijgt.

Als A. van elke soort tenminste 3 kaarten moet krijgen, dan krijgt A. er van één soort 4 en van de andere 3. Als bijvoorbeeld die soort van 4, klaveren is dan kan dat op  $\binom{13}{4} \cdot \binom{13}{3} \cdot \binom{13}{3} \cdot \binom{13}{3}$  manieren. Datzelfde aantal mogelijkheden, manieren, is er ook als A. er van een andere soort 4 krijgt. Het totaal is dan:

$4 \cdot \binom{13}{4} \cdot \binom{13}{3} \cdot \binom{13}{3} \cdot \binom{13}{3}$ . De kans dat A. van iedere soort tenminste 3 kaarten krijgt is dus:

$$\frac{4 \cdot \binom{13}{4} \cdot \binom{13}{3}^3}{\binom{52}{13}} = 0.1054.$$

- Oefenen

Maak de opgeven van Hoofdstuk 2 van de Wageningse methode, paragraaf 1 en 2.

### Blok 3 Les 2 Verwachting

(Deze les sluit aan bij paragraaf 4 van Hoofdstuk 2 Binomiale en normale verdelingen van de Wageningse Methode, <http://www.wageninsemethode.nl/methode/het-lesmateriaal/?S=y456v-d> )

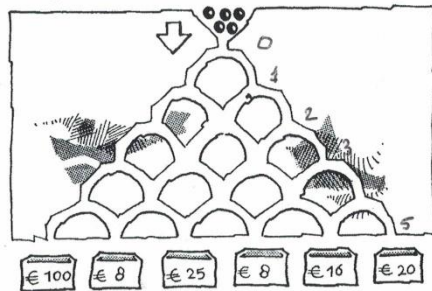
- De verwachtingswaarde  $E(\text{Expectatio})$

De verwachtingswaarde is de 'opbrengst' die je kunt verwachten bij het spelen van een kansspel.

Als "warming up, Opgaven 1, 2 en 3 van bladzijde 17 en 18.

**Opgave 1** van § 4

Hieronder staat schematisch het inwendige van een spel automaat. Bovenaan wordt in de trechter een balletje losgelaten, dat vervolgens naar beneden rolt en in één van de bakjes terecht komt. De speler ontvangt het bedrag dat bij het bakje geschreven staat. We gaan ervanuit dat een balletje bij elke splitsing met gelijke kans naar links of naar rechts gaat.



Stel dit spel wordt 40000 keer per jaar gespeeld.

**a)** Aantal keren dat het balletje in het €100 bakje terecht komt?

Bij iedere splitsing is er een kans van  $\frac{1}{2}$  dat het balletje naar links gaat. De kans dat het balletje bij 5 splitsingen naar links gaat is  $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$ . Na 40000 keer spelen kun je verwachten dat het balletje  $\frac{1}{32} \cdot 40000 = 1250$  in het bakje met €100 is gekomen.

Aantal keren dat het balletje in elk van de andere bakjes terecht komt?

€8: Er zijn 5 routes om in het bakje met €8 te komen, immers in vijf stappen moet je één keer naar rechts gaan. Dat kan op  $\binom{5}{1} = 5$  manieren, iedere route heeft een kans van  $1/32$ . De verwachting van het aantal keren dat je in het bakje van €8 komt:  $5 \cdot \frac{1}{32} \cdot 40000 = 6250$ .

€25: Volgen we bovenstaande redenering, dan kun je op  $\binom{5}{2} = 10$  manieren in het bakje van €25 komen. De verwachting van het aantal keren dat je in het bakje van €25 komt:  $10 \cdot \frac{1}{32} \cdot 40000 = 12500$ .

€8, rechterbakje. De verwachting van het aantal keren om in dit bakje terecht te komen is gelijk aan het aantal keren voor het bakje van €25: dus 12500.

€16: de verwachting is gelijk aan het aantal keren van het linker €8 bakje en wel 6250.

€20: de verwachting is gelijk aan het aantal keren van het €100 bakje en wel 1250.

**b)** Uitbetaling per jaar aan de hand van de bovenstaande verwachtingen?

Vermenigvuldig de aantallen keren dat een balletje in een bakje komt met de bedragen die uitgekeerd

worden:

$$1250 \cdot 100 + 6250 \cdot 8 + 12500 \cdot 25 + 12500 \cdot 8 + 6250 \cdot 16 + 1250 \cdot 20 = €712500.$$

c) Natuurlijk zal niet precies bovenstaand bedrag worden uitgekeerd. Het maximumbedrag wordt bereikt als het balletje altijd in het bakje €100 komt. Dan moet  $40000 \cdot 100 = €4000000$  uitbetaald worden. Het minimumbedrag dat uitbetaald moet worden is  $40000 \cdot 8 = €320000$ .

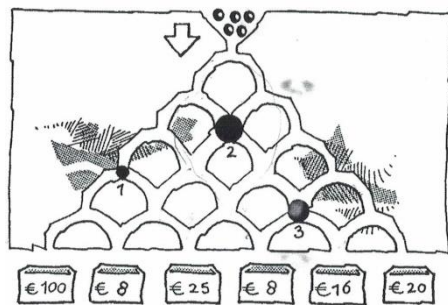
Het theoretische bedrag dat uitbetaald moet worden is €712500.

d) Je mag meespelen bij een inleg van €15. Met de theoretische verwachting van €712500 uitbetaling, theoretisch gemiddeld dus  $\frac{€712500}{40000} = €17.8125 \cong €18$ , is het aantrekkelijk om mee te spelen.

#### Opgave 2 van § 4

Spelautomaat vervolg.

Na enige tijd verandert de eigenaar het spel. Op enkele plaatsen zet de eigenaar een “stop”. Zie onderstaande Figuur. Rolt het balletje daarin dan stopt het spel en wordt niets uitbetaald.



a) Verwachte uitbetaling per jaar?

Het is niet mogelijk dat het balletje in het bakje van €100 uitkomt.

Linker €8: met de splitsing links/rechts zie je dat er maar één route is. De verwachting van het aantal balletjes dat daar komt is:  $\frac{1}{2^5} \cdot 40000 = 1250$ .

€25: Er zijn twee routes  $\rightarrow 2 \cdot \frac{1}{32} \cdot 40000 = 2500$  verwachte balletjes.

Rechter €8: Er zijn twee routes  $\rightarrow 2 \cdot \frac{1}{32} \cdot 40000 = 2500$  verwachte balletjes.

€16: Er is één route  $\rightarrow \frac{1}{32} \cdot 40000 = 1250$  verwachte balletjes.

€20: Er is één route  $\rightarrow \frac{1}{32} \cdot 40000 = 1250$  verwachte balletjes.

Naar verwachting moet nu worden uitbetaald:

$$0 \cdot 100 + 1250 \cdot 8 + 2500 \cdot 25 + 2500 \cdot 8 + 1250 \cdot 16 + 1250 \cdot 20 = €137500.$$

b) De inzet waarbij het niet meer aantrekkelijk is om te spelen.

Bij de verwachte uitbetaling per balletje van  $\frac{€137500}{40000} = €3.4375 \cong €3.5$ : bij dit bedrag als inleg of hoger is het niet meer aantrekkelijk om mee te spelen.

c) Je kunt nu zelf een spel ontwerpen met 3 stoppen waarbij het mogelijk is om wel €100 te winnen. Bepaal ook hoeveel een speler moet betalen om te spelen: niet te hoog en niet te laag. Bereken de winst die je mag verwachten als het spel 100 keer wordt gespeeld.

#### Opgave 3 van § 4

Chuck-a-luck is een spelletje op Amerikaanse kermissen. Tegen een inzet van 1 dollar mag je met drie dobbelstenen gooien. Valt geen van de dobbelstenen op 6 dan ben je je inzet kwijt. In de andere gevallen krijg je de inzet terug plus een dollar voor elke 6 die je gooide.

De exploitant van dit spelletje op de kermis is natuurlijk geïnteresseerd hoeveel hij kan verdienen met dit spel. De inkomsten zijn duidelijk: \$1 per spel. De uitgaven liggen minder vast. Die variëren: \$0, \$2, \$3, of \$4. De exploitant maakt een tabel met de kansen op de verschillende uitgaven per spel.

a) De kansen.

Met drie dobbelstenen zijn er  $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$  mogelijke rijtjes van 3 uitkomsten.

Bij  $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$  komt er geen 6 voor. De kans hierop is  $\frac{125}{216}$ .

Er zijn  $1 \cdot 5 \cdot 5 = 25$  rijtjes met één 6 die op de eerste positie staat. Maar de 6 kan ook op de tweede of derde positie staan. Het aantal mogelijkheden voor de positie van de 6 is  $\binom{3}{1} = 3$ . Het aantal

mogelijkheden voor de rijtjes met één 6 is dus:  $\binom{3}{1} \cdot 1 \cdot 5 \cdot 5 = 75$ . De kans hierop is dus  $\frac{75}{216}$ . Twee

zessen kunnen op  $\binom{3}{2} = 3$  posities staan. Het aantal mogelijkheden met een ander getal op de derde positie is:  $\binom{3}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 = 15$ . De kans daarop is  $\frac{15}{216}$ .

In één geval is er een rijtje met 3 zessen. De kans hierop is  $\frac{1}{216}$ .

b) De verwachte winst voor de exploitant voor de exploitant is de inzet minus de uitbetaling, vermenigvuldigd met de kansen:

$$(1 - 0) \cdot \frac{125}{216} + (1 - 2) \cdot \frac{75}{216} + (1 - 3) \cdot \frac{15}{216} + (1 - 4) \cdot \frac{1}{216} = \frac{17}{216} = 0.079.$$

Tabel

|             |                   |                  |                  |                 |
|-------------|-------------------|------------------|------------------|-----------------|
| uitbetaling | \$0               | \$2              | \$3              | \$4             |
| kans        | $\frac{125}{216}$ | $\frac{75}{216}$ | $\frac{15}{216}$ | $\frac{1}{216}$ |

+= 1

Opgave 3(en 2) introduceert het binomium van Newton.

- Het gemiddelde

Je gooit 1000 keer met twee dobbelstenen. De resultaten staan in onderstaande tabel. In de tweede rij staat de frequentie, dat is het getelde aantal keren dat een som van de ogen voorkomt. In de derde rij staat de relatieve frequentie, dat is het getelde aantal keren gedeeld door het totale aantal worpen(keren).

|                      |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| som                  | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    | 11    | 12    |
| Frequentie           | 24    | 57    | 76    | 121   | 131   | 168   | 137   | 104   | 102   | 51    | 29    |
| Relatieve Frequentie | 0,024 | 0,057 | 0,076 | 0,121 | 0,131 | 0,168 | 0,137 | 0,104 | 0,102 | 0,051 | 0,029 |

Wat is het gemiddelde van de som van de ogen?

Daarvoor bereken je:

$$\frac{24 \times 2 + 57 \times 3 + 76 \times 4 + \dots + 51 \times 11 + 29 \times 12}{1000} = 0,024 \times 2 + 0,057 \times 3 + 0,076 \times 4 + \dots + 0,051 \times 11 + 0,029 \times 12 = 7,051$$

Algemeen:

|                      |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          |          |
|----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|
| $X$                  | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $x_{10}$ | $x_{11}$ |
| Frequentie           | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ | $f_7$ | $f_8$ | $f_9$ | $f_{10}$ | $f_{11}$ |
| Relatieve Frequentie | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | $p_5$ | $p_6$ | $p_7$ | $p_8$ | $p_9$ | $p_{10}$ | $p_{11}$ |

Een grootte  $X$  heeft  $n$  uitkomsten  $x_i$ , elk met frequentie  $f_i$  en relatieve frequentie

$$p_i = \frac{f_i}{n}.$$

Het gemiddelde bereken je met:

$$\bar{x} = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \dots + p_n \cdot x_n = \sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i.$$

- De verwachtingswaarde

Voorbeeld:

Je werpt met twee zuivere dobbelstenen. De toevalsvariable  $X$  = de som van het aantal ogen. In onderstaande tabel staat de kansverdeling bij  $X$ .

|            |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |
|------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $X = k$    | 2              | 3              | 4              | 5              | 6              | 7              | 8              | 9              | 10             | 11             | 12             |
| $P(X = k)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |
| $P(X = k)$ | 0,028          | 0,056          | 0,083          | 0,111          | 0,139          | 0,167          | 0,139          | 0,111          | 0,083          | 0,056          | 0,028          |

Het theoretische gemiddelde van de bovenstaande uitkomsten, wordt de verwachtingswaarde  $E(X)$  genoemd. Dit getal geeft aan wat je als gemiddelde kunt verwachten als je het experiment daad werkelijk uitvoert.

$$p_k = P(X = k).$$

In dit geval, met de twee zuivere dobbelstenen, is  $E(X) = \sum_{k=1}^n p_k \cdot x_k = 7$ ,

de eerste, 2, plus de laatste, 12, gedeeld door 2:  $\frac{2+12}{2} = 7$  (bovenstaande tabel)

Het  $\Sigma$ -teken betekent 'som', van optellen. Je vult in  $k = 1, k = 2, \dots, k = n$  en telt alles bij elkaar op.

*Algemeen*

|            |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          |          |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|
| $X$        | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $x_{10}$ | $x_{11}$ |
| $P(X = k)$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | $p_5$ | $p_6$ | $p_7$ | $p_8$ | $p_9$ | $p_{10}$ | $p_{11}$ |

Een stochast  $X$  heeft  $n$  uitkomsten  $x_i$  elk met een kans  $p_i = P(X = x_i)$ .

De verwachtingswaarde  $E(X)$  bereken je met:

$$E(X) = \sum_{k=1}^n p_k \cdot x_k.$$

*In woorden: De verwachtingswaarde vind je door elk van de uitkomsten te vermenigvuldigen met de kans op die uitkomst en de producten op te tellen.*

**Opgave 11** van Hoofdstuk 2 § 4 met keuze.

In een doos zitten 6 ballen: 2 witte(W) en 4 zwarte(Z) ballen. Je mag 3 keer een bal trekken. Het aantal getrokken witte ballen krijg je uitbetaald in euro's. Je mag kiezen:

- Een inzet van € 1,10 bij trekken zonder terugleggen.

- Een inzet van € 1,25 bij trekken met terugleggen.

Wat kies je?

- Je kiest eerst aselekt 3 ballen met terugleggen. Denk aan het wegendiagram en het binomium van Newton.

$X$  = het aantal witte ballen. Bereken  $E(X)$ .

Als er wordt teruggelegd dan kan 0, 1, 2, of 3 keer een witte bal worden getrokken. De kans op een witte bal is  $2/6$ , de kans op een zwarte bal is  $4/6$ .

De kans bij drieballen trekken op nul keer een witte is  $\left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{8}{27}$ .

Als er 1 keer een witte wordt getrokken, dan kan dat de eerste, de tweede of de derde bal zijn. Dus 3

mogelijkheden. De overige twee zijn zwarte ballen. De kans op 1 keer een witte bal is dan:  $3 \cdot \frac{2}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{12}{27}$ .

Er zijn 3 mogelijkheden om twee witte(W) ballen en 1 zwarte(Z) bal te trekken. De kans daarop is:  $3 \cdot \frac{4}{6} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{6}{27}$ .

De kans op 3 witte ballen is:  $\left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{1}{27}$ .

De kansverdeling:

$$P(X = 0) = \left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{8}{27}, (ZZZ).$$

$$P(X = 1) = 3 \cdot \frac{2}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{12}{27}, (WZZ, ZWZ, ZZW).$$

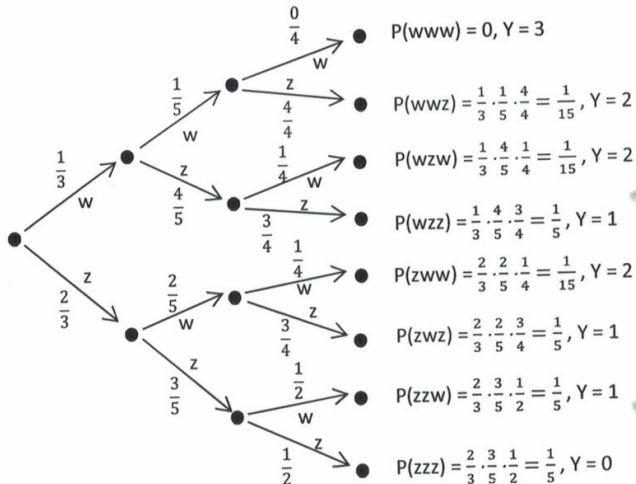
$$P(X = 2) = 3 \cdot \frac{4}{6} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{6}{27}, (WWZ, WZW, ZWW).$$

$$P(X = 3) = \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{1}{27}, (WWW).$$

$$E(X) = \frac{8}{27} \times 0 + \frac{12}{27} \times 1 + \frac{6}{27} \times 2 + \frac{1}{27} \times 3 = 1.$$

En dit resultaat mocht je ook verwachten. De kans dat je een witte bal pakt is  $\frac{1}{3} (= \frac{2}{6})$ , en je mocht 3 keer trekken.

- Je kiest aselekt 3 ballen nu zonder terugleggen, permutaties. Als je dit wil visualiseren maak je een boomdiagram.



$Y$  = het aantal witte ballen. Bereken ook  $E(Y)$ .

De kansverdeling:

$$P(Y = 0) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}, (ZZZ).$$

$$P(Y = 1) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{72}{120} = \frac{3}{5}, (WZZ, ZWZ, ZZW).$$

$$P(Y = 2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}, (WWZ, WZW, ZWW).$$

Nota Bene:  $P(Y = 3) = 0$ , het is zonder terugleggen!

$$E(Y) = \frac{1}{5} \times 0 + \frac{3}{5} \times 1 + \frac{1}{5} \times 2 = 1.$$

De vraag was: wat zou je kiezen?

In beide gevallen krijg je € 2 uitbetaald. Je kiest dus de laagste inzet.

Voorbeeld:

In vaas 1 zitten 4 briefjes met de getallen 1, 2, 3, 4.

In vaas 2 zitten 3 briefjes met de getallen 10, 20, 30.

Je trekt telkens met terugleggen een briefje uit beide vazen.

$X$  = de uitkomst van vaas 1.

$Y$  = de uitkomst van vaas 2.

De kansverdelingen zijn:

Vaas 1

|            |               |               |               |               |
|------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $k$        | 1             | 2             | 3             | 4             |
| $P(X = k)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

Vaas 2:

|            |               |               |               |
|------------|---------------|---------------|---------------|
| $k$        | 10            | 20            | 30            |
| $P(Y = k)$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

De uitkomsten tel je op. Dus  $10 + 1, 10 + 2, 10 + 3, 10 + 4, 20 + 1, \dots$ . Op deze wijze krijg je de nieuwe stochast:  $X + Y$ .

De kansen per vaas zijn onafhankelijk. De totale kans is het product van de kans per vaas:

$$P(X + Y = k_{tot}) = P(X = k) \times P(Y = k)$$

|                      |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |
|----------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $k_{tot}$            | 11             | 12             | 13             | 14             | 21             | 22             | 23             | 24             | 31             | 32             | 33             | 34             |
| $P(X + Y = k_{tot})$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ |

$$E(X) = \frac{1}{4}(1 + 2 + 3 + 4) = 2,5$$

$$E(Y) = \frac{1}{3}(10 + 20 + 30) = 20$$

$$E(X + Y) = 22,5 = E(X) + E(Y) = \frac{1}{12}(50 + 90 + 130).$$

*Algemeen geldt dat de verwachtingswaarde van  $X + Y$ , de som van twee stochasten, gelijk is aan de som van de verwachtingswaarden van  $X$  en van  $Y$ . In formule:*

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

*Dat geldt ook voor meer dan twee stochasten:*

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n).$$

$$\text{Dus: } E(X) = \sum_{i=1}^m X_i.$$

### Oefenen en uitgewerkte Oefenopgave.

**Opgave 7** van Hoofdstuk 2, paragraaf 4:

In warenhuizen is gedurende een doordeweekse dag bijgehouden hoelang de mensen met hun boodschappen voor de kassa moesten wachten.

|                       |    |     |    |     |    |
|-----------------------|----|-----|----|-----|----|
| Wachttijden (min)     | 0  | 0.5 | 1  | 1.5 | 2  |
| % klanten in winkel A | 20 | 10  | 20 | 25  | 25 |
| winkel B              | 0  | 40  | 40 | 20  | 0  |

Je leest bijvoorbeeld in de tabel dat in winkel A 20% van de klanten 1 minuut moest wachten. De wachttijden zijn afgerond op halve en hele minuten. Met deze gegevens maken we een model: we nemen aan dat de tabel voor iedere doordeweekse dag geldt. Voor iedere klant geldt nu dat de kans dat hij/zij 1 minuut in winkel A moet wachten 0.20 is. Voor andere wachttijden en voor winkel B worden op dezelfde wijze kansen gedefinieerd.

**a)** Bereken de verwachtingswaarde van de wachttijd voor winkel A en voor winkel B.

De verwachtingswaarde  $E(X)$  voor winkel A:

$$0.2 \cdot 0 + 0.1 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 1 + 0.25 \cdot 1.5 + 0.25 \cdot 2 = 1.125$$

De verwachtingswaarde  $E(Y)$  voor winkel B:

$$0.0 \cdot 0 + 0.4 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 1 + 0.2 \cdot 1.5 + 0 \cdot 2 = 0.9.$$

**b)** Een klant bezoekt beide winkels. Bereken de kans dat de klant in de winkels even lang moet wachten.

De wachttijd in winkel A is onafhankelijk van de wachttijd in winkel B. Het gaat dus om het product van de kansen per wachttijd, opgeteld over alle wachttijden.

$$\text{De kans: } 0.2 \cdot 0 + 0.1 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.4 + 0.25 \cdot 0.2 + 0.25 \cdot 0 = 0.17.$$

**c)** de totale wachttijd voor iemand die beide winkels bezoekt, varieert van 0.5 tot 3.5 minuut.

Maak een tabel van de kansverdeling van  $W$ .

De kans dat iemand die beide winkels bezoekt in totaal 2 minuten moet wachten, is de kans dat de klant in de ene winkel 0 minuten moet wachten en in de andere winkel 2 minuten, plus de kans dat de klant in de ene winkel 0.5 en in de andere winkel 1.5 minuten moet wachten, in de ene winkel 1 minuut en in de andere 1 minuut, etc. Dus, met bovenstaande tabel en de totale wachttijd van 2 minuten:

$$P(W = 2) = 0.25 \cdot 0 + 0.25 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.4 + 0.1 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0 = 0.2 .$$

Tabel

|            |      |      |      |      |      |      |      |
|------------|------|------|------|------|------|------|------|
| $k$        | 0.5  | 1.0  | 1.5  | 2.0  | 2.5  | 3.0  | 3.5  |
| $P(W = k)$ | 0.08 | 0.12 | 0.16 | 0.20 | 0.24 | 0.15 | 0.05 |

d) Bereken voor de situatie onder c) de verwachtingswaarde van  $W$ .

Zie tabel:

$$E(W) = \sum_{i=1}^7 P_i(k) \cdot k_i = 0.5 \cdot 0.08 + 1.0 \cdot 0.12 + 1.5 \cdot 0.16 + 2.0 \cdot 0.2 + 2.5 \cdot 0.24 + 3.0 \cdot 0.15 + 3.5 \cdot 0.05 = 2.025 .$$

e) Vergelijk de antwoorden van a) en d). Wat valt op?

$$2.025 = 0.9 + 1.125 , \text{ of}$$

$$E(A + B) = E(X) + E(Y) .$$

In woorden: de som van de wachttijden in a) is gelijk aan de som van de wachttijden in d).

#### Opgave 9 Hoofdstuk 2 § 4

Naast de lotto en de toto kun je ook meedoen aan het zogenaamde cijferspel. Je krijgt als deelnemer een getal van 6 cijfers. Bij de trekking wordt het winnende getal van 6 cijfers bekend gemaakt.

Zijn 6 cijfers (dus alle cijfers) van het getal van de deelnemer goed, dan krijgt de deelnemer €100000.

Zijn de laatste 5 cijfers goed, dan €10000.

Zijn de laatste 4 cijfers goed, dan €1000.

Zijn de laatste 3 cijfers goed, dan €100.

Zijn de laatste 2 cijfers goed, dan €10.

Ieder formulier bevat één getal van 6 cijfers en deelname met het formulier kost €1.50.

De verwachtingswaarde van de winst voor de organisatie van het cijferspel per formulier?

6 cijfers uit de cijfers 0 tot en met 9. Trekken met terugleggen.  $10^6$  Mogelijkheden. Er is één getal met 6 cijfers goed. De kans daarop is  $\frac{1}{10^6}$ .

Als de laatste 5 cijfers goed zijn en het eerste niet, dan zijn er 9 mogelijkheden voor het eerste cijfer. De kans is  $\frac{9}{10^6}$ .

Als de laatste 4 cijfers goed zijn, wat dan? Nu kan het eerste cijfer nog wel goed zijn, maar dan is de tweede fout.

Het gaat om de laatste 4 cijfers. De kans daarop is  $\frac{90}{10^6}$ .

De laatste 3 cijfers goed. Met gelijkwaardige redenering als voor de laatste 4 cijfers wordt de kans voor de laatste 3 cijfers goed  $\frac{900}{10^6}$ .

Voor de laatste twee cijfers goed wordt de kans  $\frac{9000}{10^6}$ .

De verwachtingswaarde van het bedrag dat uitgekeerd moet worden is:

$$\frac{1}{10^6} (100000 + 9 \cdot 10000 + 90 \cdot 1000 + 900 \cdot 100 + 9000 \cdot 10) = €0.46 .$$

De verwachte winst per formulier is  $€(1.50 - 0.46) = €1.04$ .

#### Opgave 12 van Hoofdstuk 2 § 4 Dobbelstenen

Bij een worp met een dobbelsteen is  $X$  het aantal ogen dat boven komt en  $Y$  het aantal ogen dat onder ligt.

a) Wat wordt  $Y$  bij  $X=2$ ?

De som van het aantal ogen van tegenover elkaar liggende vlakken van een dobbelsteen is altijd 7.

$$X=2 \Rightarrow Y=5 .$$

b) De waarden van  $X$ , van  $Y$  en van  $X+Y$ .

$X$  kan de waarden 1, 2, 3, 4, 5, of 6 aannemen. Het zelfde geldt voor  $Y$ .

De som van  $X+Y$  is altijd gelijk aan 7.

c)  $E(X)$ ,  $E(Y)$ , en  $E(X+Y)$ .

De kans op ieder aantal ogen is even groot, dus  $P(X=k)=1/6$ , voor  $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$ .

De definitie van de verwachtingswaarde:  $E(X) = \sum_{k=1}^n p_k \cdot x_k$ .

$$\text{Dus, } E(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3.5.$$

$$\text{Voor } E(Y) \text{ geldt hetzelfde: } E(Y) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3.5.$$

De som van  $X+Y$  is altijd  $7 \Rightarrow P(X+Y=7)=1 \Rightarrow E(X+Y) = 7$ .

d) We vinden dan:  $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ .

### Opgave 13 van Hoofdstuk 2 § 4

Bij een worp met twee dobbelstenen is  $X_1$  het aantal ogen met de ene dobbelsteen en  $X_2$  het aantal ogen met de andere dobbelsteen.  $S = X_1 + X_2$ , de som van de aantallen ogen.

a)  $E(X_1)$  en  $E(X_2)$ .

In de bovenstaande Opgave 12 hebben we  $E(X_1) = E(X_2) = 3.5$  berekend.

b) Kansverdeling van  $S$ .

$S$  kan de waarden 2, 3, 4, ..., 12 aannemen. Als je met twee dobbelstenen gooit en de ogen per dobbelsteen apart noteert, dan zijn er  $6 \cdot 6 = 36$  mogelijke uitkomsten. Dat zijn (1,1), (1,2), ..., (1,6), (2,1), ..., (6,6). Alle uitkomsten zijn even waarschijnlijk, dus iedere uitkomst heeft een kans  $\frac{1}{36}$ .

Er is één uitkomst met  $S=2$ , namelijk (1,1). Hieruit volgt  $P(S=2) = \frac{1}{36}$ .

Er zijn twee uitkomsten met  $S=3$ , namelijk (1,2) en (2,1). Dus  $P(S=3) = \frac{2}{36}$ .

Tot  $P(S=7) = \frac{6}{36}$ .

Daarna nemen de kansen af tot  $P(S=12) = \frac{1}{36}$ .

In tabelvorm:

| k        | 2              | 3              | 4              | 5              | 6              | 7              | 8              | 9              | 10             | 11             | 12             |
|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $P(S=k)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

De verwachtingswaarde:

$$E(S) = \frac{1}{36} \cdot 2 + \frac{2}{36} \cdot 3 + \frac{3}{36} \cdot 4 + \frac{4}{36} \cdot 5 + \frac{5}{36} \cdot 6 + \frac{6}{36} \cdot 7 + \frac{5}{36} \cdot 8 + \frac{4}{36} \cdot 9 + \frac{3}{36} \cdot 10 + \frac{2}{36} \cdot 11 + \frac{1}{36} \cdot 12 = 7.$$

c) We hebben berekend  $E(X_1) = E(X_2) = 3.5$ , en  $E(S) = 7 \Rightarrow E(S) = E(X_1) + E(X_2)$ .

### Overzichtsvraag 3 van Hoofdstuk 2 § 4

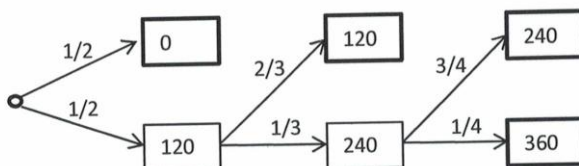
Een spel gaat over drie ronden. In elke ronde kan er €120 worden verdiend. Dat lukt in de eerste ronde met de kans  $1/2$ ; dan kom je in de tweede ronde. Lukt het niet dan ben je uitgeschakeld. In de tweede ronde verdien je €120 met een kans van  $1/3$ ; dan kom je in de derde ronde. Lukt het niet dan ben je uitgeschakeld. In de derde ronde verdien je €120 met kans  $1/4$ .

$X$  is het totale bedrag dat je met het spel verdient.

a) de kans tabel voor  $X$  en  $E(X)$ ?

$X_1, X_2$  en  $X_3$  zijn de bedragen die je in de eerste, tweede en derde ronde verdient.

Het verloop van het spel kan in een boomdiagram worden getekend:



Bij de pijlen staan de kansen en in de rechthoeken de totale verdienste als de toestand wordt bereikt. De mogelijke verdiensten zijn 0, 120, 240, 360 aangegeven in de dik omrande rechthoeken. Er geldt dus:  $X \in \{0, 120, 240, 360\}$ .

$$P(X = 0) = \frac{1}{2},$$

$$P(X = 120) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

$$P(X = 240) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{8},$$

$$P(X = 360) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}.$$

In tabel:

| Verdiens | 0             | 120           | 240           | 360            |
|----------|---------------|---------------|---------------|----------------|
| Kans     | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{24}$ |

De verwachtingswaarde:

$$E(X) = P(X = 0) \cdot 0 + P(X = 120) \cdot 120 + P(X = 240) \cdot 240 + P(X = 360) \cdot 360 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 120 + \frac{1}{8} \cdot 240 + \frac{1}{24} \cdot 360 = 85.$$

b)  $X_1, X_2$ , en  $X_3$  zijn de bedragen die je in de eerste, tweede en derde ronde verdient. Zie bovenstaand bomendiagram.

De verwachtingswaarde

$$E(X_1) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 120 = 60,$$

$$E(X_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 120 = 20,$$

$$E(X_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 120 = 5.$$

Dus:  $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 85.$

- Oefenen  
Maak de opgaven van Hoofdstuk 2, paragraaf 4.

### Blok 3 Les 3 The Binomial Distribution

(Deze les sluit aan bij de paragrafen 3 en 5 van Hoofdstuk 2 Binomiale en normale verdelingen van de Wageningse Methode, <http://www.wageninsemethode.nl/methode/het-lesmateriaal/?S=y456v-d> )

- De driehoek van Pascal(herhaling)

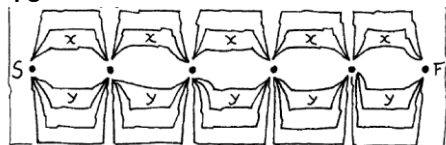
|                     |
|---------------------|
| 1                   |
| 1 1                 |
| 1 2 1               |
| 1 3 3 1             |
| 1 4 6 4 1           |
| 1 5 10 10 5 1       |
| 1 6 15 20 15 6 1    |
| 1 7 21 35 35 21 7 1 |

Het getal 15 staat op plaats 2 in de 6<sup>e</sup> rij. De bovenste rij is de 0<sup>e</sup> rij. De “linker enen, 1” vormen de 0<sup>e</sup> positie (plaats in de rij).

$15 = \binom{6}{2} = {}^6C_2$ , dat is het aantal mogelijkheden om 2 elementen uit een verzameling van 6 elementen te kiezen. Je let niet op de volgorde.

- Het binomium van Newton

### Opgave 1 Hoofdstuk 2 § 3



a) Van S naar F in 5 stappen via de noordelijke routes, boven de knooppunten, of de zuidelijke routes, onder de knooppunten in bovenstaand wegendiagram. In bovenstaand wegendiagram:

$x = 3$  = het aantal noordelijke wegen,  $y = 4$  = het aantal zuidelijke wegen.

Deze waarden van  $x = 3$  en  $y = 4$  worden niet gebruikt. We werken met  $x$  en  $y$ .

Totaal aantal:  $(x + y)^5$ . Zie ook Blok 1 Les 1.

b) Je kunt ook het aantal mogelijkheden(keren) apart uitschrijven en tellen:

- 0 keer noord, 5 keer zuid:  $y^5 = 1 \cdot y^5$

- 1 keer noord, 4 keer zuid:  $\binom{5}{1} xy^4 = 5 \cdot xy^4$

- 2 keer noord, 3 keer zuid:  $\binom{5}{2} x^2 y^3 = 10 \cdot x^2 y^3$

- 3 keer noord, 2 keer zuid:  $\binom{5}{3} x^3 y^2 = 10 \cdot x^3 y^2$

- 4 keer noord, 1 keer zuid:  $\binom{5}{4} x^4 y = 5 \cdot x^4 y$

- 5 keer noord, 0 keer zuid:  $x^5 = 1 \cdot x^5$ .

c) Alles bij elkaar geteld:

$$(x + y)^5 = x^5 + \binom{5}{4} x^4 y + \binom{5}{3} x^3 y^2 + \binom{5}{2} x^2 y^3 + \binom{5}{1} xy^4 + y^5 = \\ = 1 \cdot x^5 + 5 \cdot x^4 y + 10 \cdot x^3 y^2 + 10 \cdot x^2 y^3 + 5 \cdot xy^4 + 1 \cdot y^5.$$

d) Voor de waarden  $x = 1$  en  $y = 1$ , zijn er  $2^5 = 32 = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1$  mogelijkheden om van S naar F te komen.

Note: De coëfficiënten in de formule onder c) staan in regel 5 van de driehoek van Pascal. Zie hieronder.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

e) Je kunt de zesde regel van Pascal gebruiken om een formule voor  $(x + y)^6$  te vinden:

$$(x + y)^6 = x^6 + 6x^5 y + 15x^4 y^2 + 20x^3 y^3 + 15x^2 y^4 + 6xy^5 + y^6.$$

f)  $x + y$ : de eerste regel "1 1", de coëfficiënten van  $x$  en  $y$ .

Dus volgens de driehoek van Pascal geldt:  $(x + y)^1 = 1 \cdot x + 1 \cdot y = x + y$ .

De tweede regel van de driehoek is "1 2 1":  $(x + y)^2 = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x^1 y^1 + 1 \cdot y^2 = x^2 + 2xy + y^2$ .

De derde regel van de driehoek is "1 3 3 1":  $(x + y)^3 = 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 y^1 + 3 \cdot x^1 y^2 + 1 \cdot y^3 = x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3$ .

Deze resultaten vind je ook door:

Algemeen:

$$(x + y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + y^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Het  $\sum$ -teken betekent 'som' van optellen. Je vult in:  $k = 0, k = 1, \dots, k = n$ , en telt alles bij elkaar op.

Voorbeeld:

Je gooit 5 keer met een dobbelsteen.

$X$  = het aantal keren dat je een 6 gooit.

$P(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^5$ , dus 0-keer een 6 enzovoort,

$$P(X = 1) = \binom{5}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

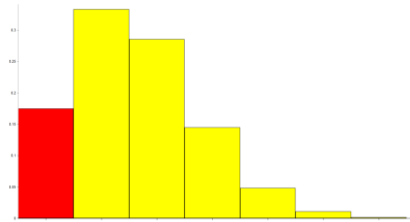
$$P(X = 4) = \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \frac{5}{6}$$

$$P(X = 5) = \left(\frac{1}{6}\right)^5$$

Opgeteld:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{5}{6}\right)^5 + 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \frac{5}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^5 = \\ & = \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\right)^5 = 1. \end{aligned}$$

Kans histogram



De resultaten van bovenstaand experiment zijn weergegeven in het Kans histogram.

*Algemeen:*

*Een experiment heeft twee mogelijke uitkomsten: succes of mislukking.*

*$p$  is de kans op succes,  $(1 - p)(= q)$  is de kans op mislukking.*

*Het experiment wordt  $n$  keer uitgevoerd.*

*$X$  = het aantal successen.*

*Dan geldt:*

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

*De stochast  $X$  heet binomiaal verdeeld.*

*Voor  $(1 - p)^{n-k}$  wordt ook wel  $q^{n-k}$  geschreven.*

Een voorbeeld.

Met de Grafische Rekenmachine, bijv. TI-84 Plus CE-T.

Trekken met terugleggen van vijf ballen uit een doos met vier witte en zes zwarte ballen. De stochast  $X$  is het aantal getrokken witte ballen. Met terugleggen: de kans dat de tweede bal wit is hangt niet af van de kleur van de eerste bal. De kans om een witte bal te trekken is  $\frac{4}{10}$ .

Bij 5 herhalingen, steeds met de kans op succes 0.4, is de kans op twee successen:

$$\binom{5}{2} \cdot 0.4^2 \cdot (1 - 0.4)^{5-2} = P(X = 2 | n = 5, p = 0.4),$$

dan vind je met DISTR 0: binompdf(5, 0.4, 2)=0.3456.

Een voorbeeld: kruis of munt met een zuivere munt.

We gaan 4 keer opgooien, dus  $n = 4$ .

Met een munt weten we dat  $p = 1/2$  en  $q = 1/2$ ;  $p + q = 1$ .

We hebben 2 mogelijkheden (kruis of munt) en we werpen 4 keer (met teruglegging!) dus totaal zijn er  $2^4$  mogelijkheden

4 keer kruis: de kans daarop is  $1/2^4$ . Hetzelfde geldt voor 4 keer munt. Je kan dit nog eens visualiseren met een wegendiagram. Tussen deze kansen liggen nog meer kansen, namelijk 3 keer munt en één keer kruis: de verdeling is binomiaal.

We pakken een voorbeeld: stel 1 keer  $p$  en dus 3 keer  $q$ . Je hebt 4 keer de munt opgegooid. In het wegendiagram zijn er 4 mogelijkheden om de wegen te doorlopen.

We schrijven voor de 4 manieren  $\binom{4}{1}$ . De kans op deze uitkomst wordt:

$$P(X = k = 1) = \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

Dus algemeen  $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$ , de binomiaalverdeling

Voor ditzelfde voorbeeld bekijken we de cumulatieve kans, de kansen opgeteld, bijvoorbeeld voor het kruis of munt experiment met  $n = 4$ :

$$P(X \leq 2) = P(k = 0) + P(k = 1) + P(k = 2) = \sum_{k=0}^2 \binom{4}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-k}.$$

Voorbeeld:

$X$  = het aantal keren dat je dubbel 6 gooit met twee dobbelstenen.

De kans op dubbel 6 is  $\frac{1}{36}$ . Je werpt  $n$  keer.

$X_k$  = het aantal dubbel 6 bij de worp  $k$ .

$$X_k = 0 \text{ of } X_k = 1 \text{ en } E(X_k) = \frac{35}{36} \cdot 0 + \frac{1}{36} \cdot 1 = \frac{1}{36}$$

Dan is  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

$$\text{en } E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) = n \cdot \frac{1}{36}.$$

*Algemeen*

$X$  = het aantal keren succes in een binomiaal kans experiment.

$p$  = de kans op succes.

Het experiment wordt  $n$  keer herhaald.

$X_k$  = het aantal successen bij herhaling  $k$ .

$$X_k = 0 \text{ of } X_k = 1 \text{ en } E(X_k) = (1 - p) \cdot 0 + p \cdot 1 = p.$$

Dan is  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

$$\text{en } E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) = n \cdot p.$$

## Oefenen en uitgewerkte Oefenopgave.

### Opgave 5 van Hoofdstuk 2 § 3

De driehoek van Pascal

|   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |   |   |
|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|---|---|
|   |   |   |    |    |    | 1  |    |    |    |   |   |
|   |   |   |    |    | 1  |    | 1  |    |    |   |   |
|   |   |   |    | 1  |    | 2  |    | 1  |    |   |   |
|   |   |   | 1  |    | 3  |    | 3  |    | 1  |   |   |
|   |   | 1 |    | 4  |    | 6  |    | 4  |    | 1 |   |
|   | 1 |   | 5  |    | 10 |    | 10 |    | 5  |   | 1 |
| 1 |   | 6 |    | 15 |    | 20 |    | 15 |    | 6 | 1 |
| 1 | 7 |   | 21 |    | 35 |    | 35 |    | 21 |   | 1 |

a)  $11^4$  met de driehoek van Pascal.

$$11^4 = (10 + 1)^4 = 1 \cdot 10^4 \cdot 1^0 + 4 \cdot 10^3 \cdot 1^1 + 6 \cdot 10^2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 10^1 \cdot 1^3 + 1 \cdot 10^0 \cdot 1^4 =$$

$$= 10000 + 4000 + 600 + 4 + 1 = 14641. \text{ Zoals je ziet, komt de driehoek van Pascal weer in het antwoord terug.}$$

b)  $101^2 = (100 + 1)^2 = 1 \cdot 100^2 \cdot 1^0 + 2 \cdot 100^1 \cdot 1^1 + 1 \cdot 100^0 \cdot 1 = 10000 + 200 + 1 = 10201.$

Wat valt op? Er verschijnt een "0" tussen de getallen uit de driehoek van Pascal.

Dit wetend:

$$101^3 = (100 + 1)^3, \text{ vind je dus: } 101^3 = 1030301. \text{ Controleer het maar door het weer uit te schrijven.}$$

$$101^4 = (100 + 1)^4 \Rightarrow 104060401.$$

c)  $9^3 = (10 - 1)^3 = 1 \cdot 10^3 \cdot (-1)^0 + 3 \cdot 10^2 \cdot (-1)^1 + 3 \cdot 10^1 \cdot (-1)^2 + 1 \cdot 10^0 \cdot (-1)^3 =$   
 $= 1000 - 300 + 30 - 1 = 729.$

### Overzichtsvraag 1 Hoofdstuk 2 § 3

a)  $(x + x^{-1})^6 = x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 20 + 15x^{-2} + 6x^{-4} + x^{-6} = (x^2 + 1)^6 x^{-6}.$

Het aantal termen is 7, wanneer uitgeschreven met de driehoek van Pascal.

b) De exponenten van de 7 termen zijn: 6,4,2,0,-2,-4,-6.

c) De constante term is 20.

### Opgave 5 Hoofdstuk 2 § 5

Bij een spel heb je een kans van  $\frac{1}{3}$  om twee euro te winnen en een kans van  $\frac{2}{3}$  om één euro te verliezen. Iemand besluit om dit spel drie keer te spelen. De stochast X is het bedrag dat hij na drie spelletjes gewonnen heeft.

a) De waarden van X.

Bij drie keer winnen is de winst 6 euro.

Bij twee keer winst en één keer verlies is het resultaat 3 euro.

Bij één keer winst en twee keer verlies is het resultaat 0 euro.

Bij drie keer verlies is het resultaat -3 euro.

Dus X kan de waarden -3, 0, 3 en 6 aannemen.

b) De kansverdeling van X.

$$\text{De kans op 3 keer winst is } \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

$$\text{De kans op twee keer winst en één keer verlies kan op } \binom{3}{2} \text{ manieren: } \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

$$\text{De kans op één keer winst en twee keer verlies kan op } \binom{3}{1} \text{ manieren: } \binom{3}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

$$\text{De kans op driekeer verlies is: } \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}.$$

De tabel voor de kansverdeling van X:

|        |                |               |               |                |
|--------|----------------|---------------|---------------|----------------|
| k      | -3             | 0             | 3             | 6              |
| P(X=k) | $\frac{8}{27}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{27}$ |

c) De eerlijkheid van het spel.

De verwachtingswaarde:

$$E(x) = \frac{8}{27} \cdot -3 + \frac{4}{9} \cdot 0 + \frac{2}{9} \cdot 3 + \frac{1}{27} \cdot 6 = 0.$$

De verwachtingswaarde is 0, de kans op verlies is even groot als de kans op winst.

d) Een eerlijk spel is een spel als de kans op winst even groot is als de kans op verlies.

Opmerking: uit psychologisch onderzoek is gebleken dat veel mensen dit niet zo ervaren. De afkeer van verlies overheerst de blijdschap bij winst.

### Opgave 6 van Hoofdstuk 2 § 5

In een doos zitten zeven ballen, waarvan er vijf rood zijn. Uit die doos nemen we blindelings met terugleggen drie keer een bal. De stochast X is het aantal rode ballen in de trekking bij deze steekproef.

a) De kans dat de tweede bal rood is.

Vijf van de zeven ballen zijn rood, dus de kans op een rode bal is  $5/7$ . De kans op een niet rode bal is dan  $2/7$ . We hebben hier weer te maken met een binomiale verdeling: succes of mislukking.

b) Een tabel van de kansverdeling van X.

We trekken drie keer een bal met terugleggen.

De kans op 0 rode ballen:  $\left(\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{8}{343}$ .

De kans op 1 rode bal is:  $\binom{3}{1} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{60}{343}$ .

De kans op 2 rode ballen is:  $\binom{3}{2} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^1 = \frac{150}{343}$ .

de kans op 3 rode ballen is:  $\left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{125}{343}$ . De tabel

|          |                 |                  |                   |                   |
|----------|-----------------|------------------|-------------------|-------------------|
| k        | 0               | 1                | 2                 | 3                 |
| P(X = k) | $\frac{8}{343}$ | $\frac{60}{343}$ | $\frac{150}{343}$ | $\frac{125}{343}$ |

c) De kansen opgeteld geeft weer precies 1.

Als je de breuken uitrekent en afrondt, kom je uit op: 0.999.

De kansen in bovenstaande opgaven 5 en 6 kun je ook berekenen met de Grafische Rekenmachine.

DISTR 0:  $\text{binompdf}(n,p,x)$ , waarbij n het aantal herhalingen is, p de succeskans en x het aantal successen.

Download *software\_kans\_en\_simulatie* van de website van de Wageningse Methode. Daar vind je het programma dat de kansen van een binomiaal verdeelde stochast uitrekent en het bij behorende kans histogram tekent.

### Opgave 10 van Hoofdstuk 2 § 5

We maken gebruik van de resultaten van opgave 12 Les 2 § 4, de voorgaande Les.

Bij een worp met 10 dobbelstenen is  $X_1$  het aantal ogen van de eerste steen,  $X_2$  het aantal ogen van de tweede steen, etc.  $X = \sum_{k=1}^{10} X_k$ .

a)  $E(X_1)$ .

In opgave 12 Les 2 van dit Blok hebben we gevonden dat  $E(X_1) = 3.5$ , en  $E(X_1) = E(X_2) = \dots = E(X_{10})$

b)  $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) \Rightarrow E(X) = \sum_{k=1}^{10} E(X_k) \Rightarrow E(X) = 10 \cdot E(X_1) = 35$ .

### Opgave 13 van Hoofdstuk 2, paragraaf 5:

N, C, P, en A spelen bridge. Ieder krijgt 13 kaarten. N heeft  $X_1$  azen in de hand, C heeft  $X_2$  azen, P heeft  $X_3$  azen, en A heeft  $X_4$  azen.

a) Welke waarden kan  $X_1$  aannemen?

Er zijn 4 azen  $\rightarrow X_1$  kan 0, 1, 2, 3, en 4 zijn.

b) Maak een tabel van de kansverdeling van  $X_1$ .

Het aantal azen voor  $N(X_1)$ :

In totaal zijn er  $\binom{52}{13}$  mogelijkheden waarop N 13 uit 52 kaarten krijgt.

Nu  $P(X_1=0)$ , de kans dat N, 0 azen krijgt. Als N geen azen krijgt, dan moeten de 13 kaarten uit 48 (=52-4) worden gekozen. Dat kan op  $\binom{48}{13}$  manieren. De kans dat N, 0 azen krijgt is:  $P(X_1 = 0) = \frac{\binom{48}{13}}{\binom{52}{13}} = \frac{48!}{35!} \cdot \frac{39!}{52!} = \frac{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} =$

0.303 .

$P(X_1=0)$ , de kans dat N, 1 aas krijgt. Als N, 1 aas krijgt wordt er 1 aas uit vier azen getrokken, en vervolgens nog een 12 kaarten uit de overige 48 kaarten. De kans dat N, 1 aas krijgt is:  $P(X_1 = 1) = \frac{\binom{4}{1} \binom{48}{12}}{\binom{52}{13}}$ . Deze uitdrukking weer

uitwerken, resulteert in:

$P(X_1 = 1) = \frac{4 \cdot 13 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} = 0.439$  . Op dezelfde wijze worden de overige kansen berekend:

$P(X_1=2)=0.213$ ,  $P(X_1=3)=0.041$  en  $P(X_1=4)=0.003$  .

Tabel:

| k          | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $P(X_1=k)$ | 0.303 | 0.439 | 0.213 | 0.041 | 0.003 |

c) Bereken met behulp van de tabel  $E(X_1)$ .

$E(X_1) = 0 \cdot 0.303 + 1 \cdot 0.439 + 2 \cdot 0.213 + 3 \cdot 0.041 + 4 \cdot 0.003 = 0.9998$  .

d) Welke waarden kan X aannemen?

$X=X_1+X_2+X_3+X_4$  is het totaal aantal azen van de vier spelers.

Er zijn 4 azen, dus  $X=4 \rightarrow E(X)=4$ .

e)  $E(X_1)$  kan ook handiger berekend worden. Op grond van symmetrie geldt:  $E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = E(X_4)$  .

Bereken met dit gegeven opnieuw  $E(X_1)$  .

$E(X_1) = \frac{1}{4} \cdot E(X) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$ .

#### Opgave 14 van Hoofdstuk 2 § 5

In een doos zitten zes ballen: twee witte(W) en vier zwarte(Z). Uit die doos nemen we aselect drie ballen. De stochast X is het aantal witte ballen als er getrokken wordt met terugleggen. Y is de stochast als er getrokken wordt zonder terugleggen.

$X_1$  stellen we gelijk aan 1 als de eerste bal wit is en gelijk aan 0 als de eerste bal zwart is. Op dezelfde manier worden  $Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3$ , vastgelegd.

a)  $P(X_3 = 1)$ , de kans dat de derde bal wit is als er met terugleggen getrokken wordt.

Als er getrokken wordt met terugleggen, is de kans bij iedere keer trekken dat er een witte bal getrokken wordt gelijk en wel  $\frac{2}{6}$  . Dus  $P(X_3 = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$  .

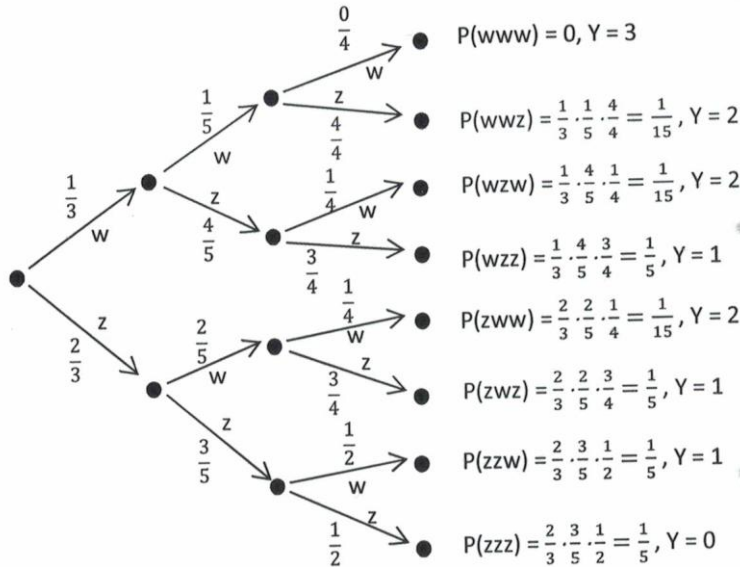
Hiermee vinden we de verwachtingswaarde:

$E(X_3) = P(X_3 = 1) \cdot 1 + P(X_3 = 0) \cdot 0 = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3}$  .

b) Zonder terugleggen.

$P(Y_3 = 1)$ , de kans dat de derde bal wit(W) is zonder terugleggen.

Nu moeten we bekijken welke mogelijkheden er zijn dat de derde bal een witte bal is. Dat kan op drie manieren en let op, er zijn maar twee witte ballen: ZZW, ZWW, WZW. De kans berekenen we nu met een boomdiagram. Zie ook Opgave 11 van Blok 3 Les 2:



$$P(ZZW) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}.$$

$$P(ZWW) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}.$$

$$P(WZW) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}.$$

Tellen we deze kansen bij elkaar op:  $P(Y_3 = 1) = \frac{1}{3}.$

Als we geen witte bal trekken, dan is het een zwarte, dus  $P(Y_3 = 0) = \frac{2}{3}.$

De verwachtingswaarde:

$$E(Y_3) = P(Y_3 = 1) \cdot 1 + P(Y_3 = 0) \cdot 0 = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3}.$$

c)  $E(X).$

Omdat we trekken met terugleggen, is de kans op een witte bal iedere keer even groot.

$$\text{Dus } E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = \frac{1}{3} \Rightarrow E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 1.$$

d)  $E(Y).$

$$\text{We hebben al } P(Y_3 = 1) = \frac{1}{3}.$$

Nu  $P(Y_1 = 1)$ , de kans dat de eerste bal een witte(W) is. Die kans is  $\frac{2}{6} \Rightarrow P(Y_1 = 1) = \frac{1}{3}$ . In het andere geval is de bal zwart(Z):  $P(Y_1 = 0) = \frac{2}{3} \Rightarrow E(Y_1) = P(Y_1 = 1) \cdot 1 + P(Y_1 = 0) \cdot 0 = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3}.$

De kans  $P(Y_2 = 1)$  is de kans dat de tweede bal een witte is, als we trekken zonder terugleggen. Dat kan op twee manieren: WW, ZW (Kijk weer even naar het boomdiagram).

De kansen op deze mogelijkheden:

$$P(WW) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}.$$

$$P(ZW) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}.$$

$$\text{Hieruit volgt: } P(Y_2 = 1) = P(WW) + P(ZW) = \frac{1}{15} + \frac{4}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \Rightarrow P(Y_2 = 0) = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Met deze gegevens vinden we: } E(Y_2) = P(Y_2 = 1) \cdot 1 + P(Y_2 = 0) \cdot 0 = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3}.$$

$$E(Y_3) \text{ hebben we onder b) berekend } \therefore E(Y_1) = E(Y_2) = E(Y_3) = \frac{1}{3}.$$

$$E(Y) = E(Y_1) + E(Y_2) + E(Y_3) = 1.$$

- Oefenen

Maak de opgaven van Hoofdstuk 2, paragraaf 3 en 5.

### Blok 3 les 4 Cumulatieve binomiale kans

(Deze les sluit aan bij de paragraaf 6 van Hoofdstuk 2 Binomiale en normale verdelingen van de Wageningse Methode, <http://www.wageningsemethode.nl/methode/het-lesmateriaal/?S=y456v-d> )

- Binomiale kansen en Cumulatief Binomiale Kansen

**Opgave 1** van Hoofdstuk 2 § 6

Een vierkeuze, Multiple Choice, test bestaat uit 20 vragen. Je kiest je antwoorden op de gok,  $p = \frac{1}{4}$ .

$X$  = het aantal goede antwoorden.

$X$  is binomiaal verdeeld.

Bij de cumulatieve verdeling bereken je:

$$P(X \leq k).$$

$n = 20$  en  $P(X \leq 3)$ .

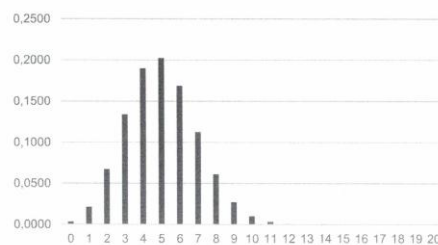
De formule voor  $P(X = k)$ :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}.$$

**a)** De kans op 4 of minder goede antwoorden. Dus 0,1,2,3 of 4 antwoorden goed.

$k = 0 \Rightarrow P(X = 0) = 0,0032$ , etc. Zo kun je een kansen tabel maken voor  $k = 0, 1, 2, \dots, 20$ . De waarden van  $P(X = k)$  kun je in een histogram weergeven.

Een vierkeuze test bestaat uit 20 vragen.  
Je kiest je antwoorden op de gok.  
 $X$  = het aantal goede antwoorden.  
 $X$  is binomiaal verdeeld.



| $k$ | $P(X = k)$ |
|-----|------------|
| 0   | 0,0032     |
| 1   | 0,0211     |
| 2   | 0,0669     |
| 3   | 0,1339     |
| 4   | 0,1897     |
| 5   | 0,2023     |
| 6   | 0,1686     |
| 7   | 0,1124     |
| 8   | 0,0609     |
| 9   | 0,0271     |
| 10  | 0,0099     |
| 11  | 0,0030     |
| 12  | 0,0008     |
| 13  | 0,0002     |
| 14  | 0,0000     |
| 15  | 0,0000     |
| 16  | 0,0000     |
| 17  | 0,0000     |
| 18  | 0,0000     |
| 19  | 0,0000     |
| 20  | 0,0000     |

Met de tabel van kansen

$$P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0.4148.$$

**b)** Ook kunnen de waarden van  $P(X \leq k)$  in een cumulatieve kansen tabel en histogram worden opgenomen. Een voorbeeld:

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0,2251.$$

**c)** De cumulatieve tabel op de volgende bladzijde kun je uit bovenstaande tabel maken.

Om de onderstaande tabel te maken, pak je steeds de eerste waarden uit de bovenstaande tabel en tel die bij elkaar op. Zoals onder a) en b). Een volgende waarde in de onderstaande tabel kun je ook vinden door uit die tabel een waarde te pakken en daar een element van bovenstaande tabel bij op te tellen.

$$P(X \leq 0) = P(X = 0) = 0.0032.$$

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.0032 + 0.0211 = 0.0243.$$

$$P(X \leq 2) = P(X \leq 1) + P(X = 2) = 0.0243 + 0.0670 = 0.0913.$$

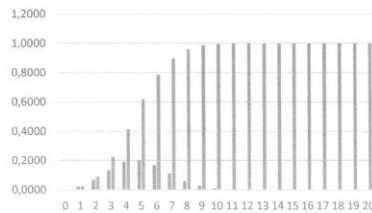
**d)** In de onderstaande tabel vind je dat de kans op 5 of minder goede antwoorden gelijk is aan 0.6172. Dit wordt weergegeven door de eerste 6 balken in bovenstaand histogram op te tellen. In onderstaand histogram is het dus de zesde balk.

**e)** In de onderstaande tabel vind je ook dat de kans op 6 of minder goede antwoorden gelijk is aan 0.7858. In het onderstaande cumulatieve histogram is dit de zevende balk.

f) Hoe vind je met de kansen onder d) en e), de kans op 6 goede antwoorden?

$$P(X \leq 6) = P(X \leq 5) + P(X = 6) \Rightarrow P(X = 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 5) = 0.7858 - 0.6172 = 0.1686. \text{ Zie bovenstaande kansen tabel.}$$

Een vierkeuze test bestaat uit 20 vragen.  
Je kiest je antwoorden op de gok.  
 $X$  = het aantal goede antwoorden.  
 $X$  is binomiaal verdeeld.  
Bij de cumulatieve verdeling bereken je  $P(X \leq k)$



| $k$ | $P(X=k)$ | $P(X \leq k)$ |
|-----|----------|---------------|
| 0   | 0,0032   | 0,0032        |
| 1   | 0,0211   | 0,0243        |
| 2   | 0,0669   | 0,0913        |
| 3   | 0,1339   | 0,2252        |
| 4   | 0,1897   | 0,4148        |
| 5   | 0,2023   | 0,6172        |
| 6   | 0,1686   | 0,7858        |
| 7   | 0,1124   | 0,8982        |
| 8   | 0,0609   | 0,9591        |
| 9   | 0,0271   | 0,9861        |
| 10  | 0,0099   | 0,9961        |
| 11  | 0,0030   | 0,9991        |
| 12  | 0,0008   | 0,9998        |
| 13  | 0,0002   | 1,0000        |
| 14  | 0,0000   | 1,0000        |
| 15  | 0,0000   | 1,0000        |
| 16  | 0,0000   | 1,0000        |
| 17  | 0,0000   | 1,0000        |
| 18  | 0,0000   | 1,0000        |
| 19  | 0,0000   | 1,0000        |
| 20  | 0,0000   | 1,0000        |

Een aanvulling (Opgave 13 van Hoofdstuk 2, § 6).

- Stel dat bij deze multiple-choice test de docent voor elke goed beantwoorde vraag een half punt geeft.

$$n = 20, p = 0.25.$$

De kans dat iemand die alle antwoorden gokt als cijfer een 4 of hoger krijgt. Dit betekent dat er minimaal 8 vragen van de 20 goed moeten worden gegokt:

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - 0.8982 = 0.1018.$$

- De docent vindt dat met alleen maar gokken de kans ten hoogste 1% mag zijn om een cijfer 4 te behalen.

Het aantal goede antwoorden voor een 4:

$$- P(X \geq 9) = 1 - P(X \leq 8) = 1 - 0.9591 = 0.0409.$$

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - 0.9861 = 0.0139.$$

$$P(X \geq 11) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - 0.9961 = 0.0039.$$

Bij 11 goede antwoorden is de kans kleiner dan 1%. De docent zal 11 goede antwoorden eisen.

**Opgave 2** van Hoofdstuk 2 § 6

Vervolg multiple choice, opgave 1.

We willen weten wat de kans is op meer dan 4, maar minder dan 10 goede antwoorden. Dus 5, 6, 7, 8, 9, goede antwoorden.

a) Met de kansen tabel:

$$P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) = 0.5713.$$

b) Met de cumulatieve tabel:

$$P(X \leq 9) - P(X \leq 4) = 0.5713.$$

c) Werken met de cumulatieve tabel gaat sneller.

d) De kans op 3 of meer goede antwoorden:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq [3 - 1]) = 1 - P(X \leq 2) = 0.9087.$$

e) Om een voldoende te halen bij de multiple choice test moet je minstens 15 vragen goed beantwoorden.

$$P(X \geq 15) = 1 - P(X \leq 14) \approx 0.$$

f) De cumulatieve kans berekenen met de Grafische Rekenmachine, bijvoorbeeld  $P(X \leq 3)$ :

$$\text{DISTR A:binomcdf}(20,0.25,3).$$

- **Hypergeometrisch  $\approx$  Binomiaal**

**Opgave 8** Hoofdstuk 3 § 6

Een vaas heeft 100 witte(W) en 200 rode ballen(R).

Je trekt 3 ballen, **met terugleggen**. Wat is de kans op 2 witte ballen?

$X$  = het aantal witte ballen,  $n = 3$ .

$X$  is binomiaal verdeeld.

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \text{binompdf}(3, \frac{1}{3}, 2) = 0.222222.$$

Of met de GR:  $P(S = 2) = P(S \leq 2) - P(S \leq 1) = 0.9630 - 0.7407 = 0.2223$ .

Je trekt nu 3 ballen **zonder terugleggen**. Wat is de kans op twee witte ballen?

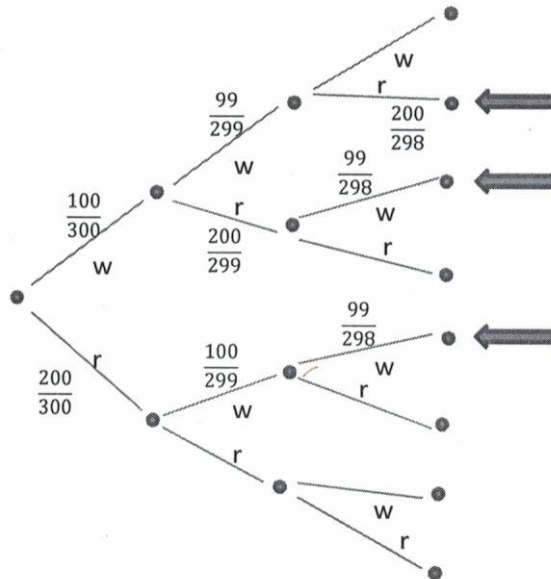
$X$  = het aantal witte ballen.

$X$  is hypergeometrisch verdeeld (Blok 3 Les 1).

$$P(X = 2) = \frac{\binom{100}{2} \cdot \binom{200}{3-2}}{\binom{300}{3}} = \frac{(100nCr2) \cdot 200}{300nCr3} = 0.222217.$$

We kunnen dit ook in een boomdiagram weergeven.

Dus bij de eerste vertakking:  $P(W) = 1/3$ ,  $2n P(R) = 2/3$ .



Dus de kans bij de bovenste pijl is:  $\frac{100}{300} \cdot \frac{99}{299} \cdot \frac{200}{298}$ ,

de kans bij de middelste pijl:  $\frac{100}{300} \cdot \frac{200}{299} \cdot \frac{99}{298}$ ,

en de kans bij de onderste pijl:  $\frac{200}{300} \cdot \frac{100}{299} \cdot \frac{99}{298}$ .

De kansen zijn gelijk. De totale kans is de som:  $3 \cdot \frac{100}{300} \cdot \frac{99}{299} \cdot \frac{200}{298} = \frac{99}{299} \cdot \frac{200}{298} \cong \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$ .

**Conclusie:**

*Is het aantal trekkingen klein ten opzichte van de totale populatie, dan kun je de hypergeometrische verdeling benaderen door een binomiale verdeling. Door een gering aantal trekkingen verandert de populatie nauwelijks.*

Opmerkingen bij Les 4:

De cumulatieve verdeling.

$$\text{Algemeen: } P(X \leq c) = \sum_{k=0}^c \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Ik gebruik  $1 - p$  en  $q$  door elkaar.

We weten dat  $P = 1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ .

Deze som kunnen we opsplitsen in twee sommen:

$$1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^c \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} + \sum_{k=c+1}^n \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Of

$$\sum_{k=c+1}^n \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = 1 - \sum_{k=0}^c \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

In verkorte notatie:

$$P(X \geq c+1) = 1 - P(X \leq c) \text{ of nog korter } P(X > c) = 1 - P(X \leq c).$$

Met  $P(X \leq c)$  kunnen we nog wat spelen:

$$P(X \leq c) = \sum_{k=0}^{c-1} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} + \binom{n}{c} \cdot p^c \cdot (1-p)^{n-c}.$$

In deze uitdrukking zien we een cumulatieve verdeling plus een kans:

$$P(X \leq c) = P(X \leq c-1) + P(X = c).$$

- Een lastig onderwerp was om de ene cumulatieve kans tabel in de andere cumulatieve kans tabel om te zetten. Maar toch valt het mee. Ook is het een aardige exercitie om nog eens goed naar de cumulatieve verdeling te kijken. Het gaat er om op een logische wijze met indices waarover wordt opgeteld te manipuleren, eigenlijk optellen en aftrekken. De Overzichtsvraag 2 van les 4.

Een binomiaal kans experiment heeft  $n = 10$  herhalingen.  $X$  is het aantal successen en  $Y$  is het aantal mislukkingen.

**a.** Stel dat je de cumulatieve kans tabel van  $X$  kent. Hoe vind je daaruit de cumulatieve kans tabel van  $Y$ ?

Nu nemen we voor  $0 \leq l \leq k$  het aantal mislukkingen:

$$P(Y \leq k) = P(Y = 1) + \dots + P(Y = k) = \sum_{l=0}^k \binom{10}{l} \cdot p^l \cdot (1-p)^{10-l}. \text{ Hiervoor schrijven we kortheidshalve: } \sum_{l=0}^k P(Y = l).$$

We weten dat voor iedere  $l$  mislukkingen er  $10 - l$  successen zijn. Dan is de kans op  $l$  mislukkingen gelijk aan de kans op  $10 - l$  successen. Of in de verkorte notatie  $P(Y = l) = P(X = 10 - l)$ .

En hier gaat het om.

Wat volgt hieruit voor de grenzen van de sommatie  $\sum$  ?

$$\sum_{l=0}^k P(Y = l) = \sum_{l=0}^k P(X = 10 - l). \text{ In de sommatie zien we dat } 0 \leq l \leq k.$$

Niet vergeten:  $\sum_{l=0}^k P(Y = l) = P(Y \leq K)$ .

Laten we  $\sum_{l=0}^k P(X = 10 - l)$  eens uitschrijven:

$$\sum_{l=0}^k P(X = 10 - l) = P(X = 10) + P(X = 9) + P(X = 8) + \dots + P(X = k). \text{ Wat staat hier eigenlijk? Wel, } P(X \geq k). \text{ En dan zijn we bijna klaar, want}$$

$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq 10 - k - 1)$ . En zoals je weet is  $P(X \leq 10 - k - 1)$  de cumulatieve kansverdeling van  $X$  en deze cumulatieve verdeling is gegeven.

$$\text{Dus } P(Y \leq K) = P(X \leq 10 - k - 1).$$

Nota bene: voor  $P(X \geq k)$  kan je nog schrijven:  $\sum_{l=10-k}^{10} P(X = l)$ .

Maar dit is eigenlijk alleen maar handig in te zien als je de cumulatieve verdeling van  $Y$  schetst. De verdeling van  $X$  kan je er in spiegelbeeld tegen aan plakken. Want:

$$P(Y = l) = P(X = 10 - l).$$

Ook kan je dit bereiken door manipulatie van de indices waarover wordt geteld. Ik vind echter ook, met jou, dat deze manipulatie niet direct te begrijpen is. Vandaar dat ik het gewoon maar uitgeschreven heb.

**b.** Stel dat je de cumulatieve kans tabel van  $X$  kent. Hoe vind je daaruit de gewone kans tabel van  $X$ ? Dat heb je al vaker gedaan:

$$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1).$$

**c.** Stel dat je de kleinste kans in de cumulatieve kans tabel van  $X$  kent. Hoe vind je daaruit de kans op succes? Dus hoe vind je de "kleine"  $p$  uit de binomiaalverdeling?

$$\text{We weten in het algemeen: } P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}.$$

De kleinste kans in de cumulatieve kans tabel noemen we gemakshalve  $P_0$ . Dit is slechts een naam voor het gemak. De kleinste kans is  $P(X \leq 0)$ . Kleiner dan nul kan niet. Dat wil zeggen  $P(X \leq 0) = P(X = 0)$  en die hebben we  $P_0$  genoemd.

$$\text{Dus: } P_0 = P(X = 0) = \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1 - p)^{n-0}.$$

$$\binom{n}{0} = 1 \text{ en } p^0 = 1, \text{ we houden over } P_0 = (1 - p)^n.$$

$$\text{Nota bene: } p^0 = 1, \text{ bijvoorbeeld } \frac{p^1}{p^1} = p^{1-1} = p^0.$$

We hebben:  $P_0 = (1 - p)^n$ . Als  $P_0$  en  $n$  gegeven zijn, kan je  $p$  uitrekenen.

Ik schrijf het wat anders op:

$$P_0^{1/n} = 1 - p, \text{ hieruit volgt } p = 1 - P_0^{1/n}.$$

Denk bij bovenstaande notatie maar aan, bijv.,  $n = 2$ .

### Oefenen en uitgewerkte Oefenopgave.

#### **Opgave 4** van Hoofdstuk 2, § 6

Een binomiaal kansexperiment bestaat uit 14 herhalingen.  $S$  is het aantal successen,  $p$  is de succeskans.

Gebruik van de Grafische rekenmachine.

**a)**  $P(S < 7)$  en  $p=0.15$ .

$$P(S < 7) = P(S \leq 6).$$

Met GR: DISTR B (14, 0.15, 6)=0.9978.

**b)**  $P(1 < S < 4)$  en  $p=0.25$ .

$$P(S < 4) = P(S \leq 3).$$

$$P(1 < S < 4) = P(S \leq 3) - P(S \leq 1) \Rightarrow \text{DISTR B}(14, 0.25, 3) - \text{DISTR B}(14, 0.25, 1) = 0.4204$$

Zie ook opgave 2 in de samenvattende tekst hierboven.

**c)**  $P(S < 8)$  en  $p=0.15$ . Zie onder a).

$$P(S < 8) = P(S \leq 7).$$

Met GR: DISTR B (14, 0.15, 7)=0.9997.

**d)**  $P(3 < S < 8)$  en  $p=0.3$ .

$$P(3 < S < 8) = P(S \leq 7) - P(S \leq 3) \Rightarrow \text{DISTR B}(14, 0.25, 7) - \text{DISTR B}(14, 0.25, 3) = 0.6134.$$

Opmerking bij b), een bewijs met de verzamelingen leer, de verzameling van kansen:

$$P(1 < S < 4) \stackrel{\text{def}}{=} P(S > 1) \cap P(S < 4) \Rightarrow P(S > 1) \cap P(S < 4) = [1 - P(S \leq 1)] \cap P(S < 4) = \\ = 1 \cap P(S \leq 3) - P(S \leq 1) \cap P(S \leq 3) = P(S \leq 3) - P(S \leq 1).$$

Opgelet:

$$1 \cap P(S \leq 3) = P(S \leq 3),$$

en

$$P(S \leq 1) \cap P(S \leq 3) = P(S \leq 1).$$

**Opgave 6** van Hoofdstuk 2 § 6 Dobbelstenen.

We werpen 10 keer met een dobbelsteen en letten op het aantal zessen in die tien worpen. De kans dat er minstens drie zessen bij zijn.

Met de GR.

$$P(S \geq 3) = 1 - P(S \leq 2) = 1 - 0.7752 = 0.2248.$$

**Opgave 7** van Hoofdstuk 2 § 6

Zo'n 10% van de auto's die over de Nederlandse wegen rijden, vertoont technische gebreken. Regelmatig worden door de politie uitgebreide technische keuringen uitgevoerd langs de kant van de autoweg.

**a)** Er worden 100 auto's gecontroleerd.

De kans dat er bij dertien auto's gebreken worden geconstateerd.

$n=100$ ,  $p=0.1$ .

Met de GR.

$$P(S > 13) = 1 - P(S \leq 13) = 1 - 0.8761 = 0.1239.$$

**b)** Gemiddeld 1 op de 100 auto's is zo gammel dat de auto van de weg wordt gehaald en naar de sloper gaat.

Kans bij 100 controles dat minstens één auto rijp is voor de sloop. Let op:  $p=0.01$ .

Met de GR.

$$P(S \geq 1) = 1 - P(S = 0) = 1 - 0.3660 = 0.6340.$$

**Opgave 9** van Hoofdstuk 2, § 6

Uit een vaas met 30 witte en 20 rode ballen wordt een aantal keren met teruglegging een bal getrokken.

**a)** De kans dat bij 15 trekkingen de meerderheid van de getrokken ballen rood is.

We weten dat  $n = 15$  en de kans op een rode bal  $p = \frac{2}{3+2} = 0.4$ .

De meerderheid is rood:  $X \geq 8$ .

Met de GR.

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - 0.7869 = 0.2131.$$

**b)** De kans bij  $n=12$  trekkingen op vijf, zes, zeven witte ballen,  $p = \frac{3}{3+2} = 0.6$

$$P(4 < X < 8) = P(X \leq 7) - P(X \leq 4) = 0.9427 - 0.4382 = 0.5045.$$

**Opgave 10** van Hoofdstuk 2, § 6

Bij een eerlijke munt zijn de kansen op kop of munt gelijk. Je mag dus verwachten dat in ongeveer 50% van de worpen kop zal worden gegooid. De kans is groot dat het aantal keren kop tenminste 40% en ten hoogste 60% van het aantal worpen is.

**a)** 10 Worpen.

De kans dat het aantal keren kop tenminste 40%(4 worpen) en ten hoogste 60%(6 worpen) van het aantal worpen is.

Met de GR.

$$n = 10 \text{ en } p = 0.5..$$

$$P(4 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 3) = 0.8281 - 0.1719 = 0.6562.$$

**b)** Dezelfde vraag bij 20, 50, en 100 worpen.

- 20 worpen:  $P(8 \leq X \leq 12) = P(X \leq 12) - P(X \leq 7) = 0.8684 - 0.1316 = 0.7368$ .

- 50 worpen:  $P(20 \leq X \leq 30) = P(X \leq 30) - P(X \leq 19) = 0.9405 - 0.0595 = 0.8810$ .

- 100 worpen:  $P(40 \leq X \leq 60) = P(X \leq 60) - P(X \leq 39) = 0.9824 - 0.0176 = 0.9648$ .

**c)** Hoe groter het aantal worpen, des te groter de kans dat het aantal keren kop tussen de 40% en de 60% ligt. Iedere keer dat je de munt opgooit is de kans op kop of munt gelijk aan  $\frac{1}{2}$ . Maar als je de munt meerdere keren opgooit, dan wordt de kans dat ze allemaal hetzelfde resultaat opleveren steeds kleiner. De kans dat je dichterbij het gemiddelde blijft wordt steeds groter naarmate je vaker opgooit.

#### **Opgave 11** van Hoofdstuk 2, § 6

Bij een landelijk onderzoek is gebleken dat 15% van alle middelbare scholieren regelmatig spijbelt.

**a)** De kans dat in een havo5-klas van twintig leerlingen er meer dan 4 leerlingen zijn die regelmatig spijbelen.  
 $n = 20, p = 0.15$ .

Met de GR.

$$P(S > 4) = 1 - P(\leq 4) = 1 - 0.8298 = 0.1702.$$

**b)** Onder a) hebben we een binomiaalverdeling voor de GR of bij gebruik van een kanstabel. Daarbij ga je er in ieder geval vanuit dat de kansen onafhankelijk zijn. Deze veronderstelling is twijfelachtig, want de mogelijkheid bestaat dat een leerling andere leerlingenaanzet tot spijbelen.

#### **Opgave 12** van Hoofdstuk 2, paragraaf 6

In een bedrijf worden schroeven geproduceerd. Volgens de bedrijfsleider is 5% van de productie niet bruikbaar. De slechte exemplaren worden niet verwijderd omdat de controle daarop teveel geld kost. De schroeven worden in doosjes van 50 stuks verkocht aan de winkeliers.

**a)** Hoe groot is de kans dat een doosje meer dan vier onbruikbare schroeven levert?

$$n = 50, p = 0.05.$$

$$P(x > 4) = 1 - P(x \leq 4).$$

Met de grafische rekenmachine:  $P(x \leq 4)$ .

$$\text{DISTR A: binomcdf}(50, 0.05, 4) = 0.8961 \rightarrow P(x > 4) = 1 - 0.8961 = 0.1039.$$

**b)** Een winkelier heeft een partij van 500 doosjes schroeven besteld bij de fabriek.

Hoeveel doosjes met 50 bruikbare schroeven kan hij verwachten te ontvangen?

De kans dat hij een doosje ontvangt met alleen maar bruikbare schroeven:

1 schroef is bruikbaar in een doosje: de kans is 0.95.

De kans op 50 bruikbare schroeven in een doosje is:

$$P(x = 0) = (.95)^{50}.$$

De winkelier kan dan  $500 \cdot (.95)^{50}$  doosjes met bruikbare schroeven verwachten.

Met de GR:  $500 \cdot \text{Binompdf}(50, 0.95, 50) = 38.47 \rightarrow 38$  doosjes.

#### **Opgave 14** Van Hoofdstuk 2 § 6

Griepepidemie.

Bij een griepepidemie wordt 20% van de bevolking ziek.

**a)** Aanname: iedereen heeft dezelfde kans om ziek te worden. Deze aanname is aanvechtbaar. Griep is weliswaar een besmettelijke ziekte, maar niet iedereen is even bevattelijk voor de griep.

**b)** Op een school werken 25 docenten.  $X$  is het aantal docenten dat griep krijgt.

$$E(X) = n \cdot p = 25 \cdot 0.2 = 5.$$

**c)** De kans dat minstens 5 docenten griep krijgen.

$n = 25, p = 0.2$ , met de GR:

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0.4207 = 0.5793.$$

**d)** De kans dat minstens vijf docenten geen griep krijgen.

$$P(X \leq 20) = 1.000.$$

**e)** De kans dat 5 docenten griep krijgen.

$$P(X = 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 4) = 0.6167 - 0.4207 = 0.1960.$$

**f)** Neem aan dat op een dag vijf docentendoor de griep geveld zijn.

De kans dat van de elf docenten die een bepaalde leerling heeft er die dag drie met griep niet aanwezig zijn.

We berekenen hiervoor het totaal aantal mogelijkheden om 11 docenten uit 25 te kiezen. En vervolgens berekenen we het aantal mogelijkheden om 3 uit 5 zieke docenten te kiezen en 8 uit 20 niet-zieke docenten. Het product van deze laatste twee mogelijkheden delen we door het totaal aantal mogelijkheden:

$$\frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{20}{8}}{\binom{25}{11}} = 0.2826.$$

**Overzichtsvraag 1** van Hoofdstuk 2 § 6

$X$  is een bepaalde binomiale verdeeld stochast.

**a)**  $P(X \leq 10)$ .

$X$  kan 0,1,2,... zijn en de kans dat  $X$  hooguit 10 is, is 1 min de kans dat  $X$  minstens 11 is.

In formule vorm:  $P(X \leq 10) = 1 - P(X \geq 11)$ .

**b)**  $P(X = 15)$ , of  $P(X = 16)$  of  $P(X = 17)$ . Dit kan op drie verschillende manieren worden weergegeven:

$P(14 < X < 18)$ ,  $P(15 \leq X \leq 17)$  of  $P(X \leq 17) - P(X \leq 14)$ .

**Overzichtsvraag 2** van Hoofdstuk 2 § 4

Een binomiaal kansexperiment heeft 10 herhalingen.  $X$  is het aantal successen en  $Y$  is het aantal mislukkingen.

**a)** De cumulatieve kanstabel van  $X$  is bekend.

De cumulatieve kanstabel van  $Y$ :

Er geldt voor iedere  $k$ :  $P(Y = k) = P(X = 10 - k)$ . Als er 10 herhalingen zijn, dan is de kans op  $k$  mislukkingen even groot als de kans op  $10 - k$  successen. Nu kunnen we de cumulatieve kans  $P(Y \leq k)$  als volgt berekenen:

$$P(Y \leq k) = \sum_{n=0}^k P(Y = n) = \sum_{n=0}^k P(X = 10 - n) = \sum_{n=10-k}^{10} P(X = n) = 1 - \sum_{n=0}^{10-k-1} P(X = n) = 1 - P(X \leq 10 - k - 1).$$

De cumulatieve kanstabel van  $Y$  kun je dus vinden door de cumulatieve kanstabel van  $X$  te nemen, om daar voor een zekere  $k$  de kans  $P(X \leq 10 - k - 1)$  uit af te lezen en die waarde van 1 af te trekken.

**b)** De cumulatieve kanstabel van  $X$  is bekend.

De kanstabel  $X$ :

Door twee opeenvolgende waarden uit de cumulatieve kanstabel van elkaar af te trekken vind je de gewone kanstabel:

$$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq (k - 1)).$$

**c)** Je kent de kleinste kans in de cumulatieve kanstabel van  $X$ .

De succeskans:

Noem de kleinste kans in de cumulatieve kanstabel  $P_0$ . Dan kunnen we schrijven:

$$P_0 = P(X \leq 0) = P(X = 0) = \binom{n}{0} p^0 (1 - p)^n.$$

Dus met  $P_0$  bekend:

$$P_0 = (1 - p)^n \rightarrow \sqrt[n]{P_0} = 1 - p \therefore p = 1 - \sqrt[n]{P_0}.$$

• **Oefenen**

Maak de opgaven van Hoofdstuk 2, paragraaf 6.

Blok 3 Toets Binomial Distributions

**Opgave 1**

- In een vaas zitten 24 rode en 16 witte knikkers. In één greep worden 5 knikkers gepakt.

**a)** De kans dat er 3 rode en 2 witte knikkers gepakt worden. Met GR Math- PROB-nCr.

Totaal aantal mogelijkheden:  $\binom{40}{5}$ .

3 rode knikkers:  $\binom{24}{3}$ ; 2 witte knikkers:  $\binom{16}{2}$ .

De kans:  $\frac{\binom{24}{3} \binom{16}{2}}{\binom{40}{5}} = 0.3691$ .

**b)** De kans dat de greep van 5 knikkers uit één kleur bestaat.

Gebruik set theory:  $P(\text{rood}) \cup P(\text{wit}) = P(\text{rood}) + P(\text{wit}) \rightarrow$  de som van de kansen.

De kans:  $\frac{\binom{24}{5} + \binom{16}{5}}{\binom{40}{5}} = 0.0712$ .

- Met een gewone dobbelsteen wordt 4 keer geworpen.

**c)** De kansverdeling van het aantal enen in de worp.

De kansverdeling van 0, 1, 2, 3, en 4 keer een 1.

De kans op één keer een 1 is  $\frac{1}{6}$ ; de kans op nul keer een 1 is  $\frac{5}{6}$ .

De kansverdeling:

$$P(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.4823,$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.3858,$$

$$P(X = 2) = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 0.1157,$$

$$P(X = 3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \frac{5}{6} = 0.0154,$$

$$P(X = 4) = \left(\frac{1}{6}\right)^4 = 0.0008.$$

$$\sum_{i=0}^4 P(X = i) = 0.4823 + 0.3858 + 0.1157 + 0.0154 + 0.0008 = 1$$

**d)** De verwachtingswaarde van het aantal enen in de worp.

$$E(X) = n \cdot p = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

**e)** Stochast  $Y$  is de som van de ogen van de worp.

De verwachtingswaarde van een worp met een dobbelsteen:

$$E(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3.5.$$

Er wordt 4 keer geworpen:

Totale verwachtingswaarde  $E(Y) = 4 \cdot 3.5 = 14$ .

## Opgave 2.

Gegeven:  $X$  is een binomiaal verdeelde stochast met  $n = 20$ , en  $p = 0.6$ .

**a)**  $P(X < 7) = P(X \leq 6 | n = 20, p = 0.6) = 0.0065$

**b)** De kans op minstens 12 successen.

$$P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11 | n = 20, p = 0.6) = 1 - 0.4044 = 0.5956.$$

**c)**  $P(X \geq a) < 0.10$ , bereken  $a$ .

$P(X \geq a) = 1 - \{P(X \leq a - 1) > 0.9\} < 0.10$ . Met de GR uitproberen. Waar te beginnen? Je neemt bijvoorbeeld aan dat  $a - 1$  dicht bij 20 ligt dan bij 10. Kies  $a - 1 = 15$ . Met de GR vind je dan:  $P = 0.9490$ . Nu kies je  $a - 1 = 14 \rightarrow P = 0.8744$ .

Conclusie; we kiezen  $a - 1 = 15 \rightarrow a = 16$ .

Opgelet: we hebben  $a$  als integer beschouwd. Dat is niet geëist. De volgende stap had dus ook kunnen zijn:

$$a - 1 = 14.5.$$

## Opgave 3.

| $k$ | $P(X = k)$ | $P(X \leq k)$ |
|-----|------------|---------------|
| ... | ...        | ...           |
| ... | ...        | ...           |
| 29  | 0,0185     | ... (a)       |
| 30  | 0,0294     | 0,0704        |
| 31  | ...        | 0,1140        |
| 32  | ... (b)    | 0,1744        |
| ... | ...        | ...           |

Gegeven een deel van een binomiale tabel voor bepaalde  $n$  en  $p$  (zie hierboven).

**a)** De waarden van  $a$  en  $b$  in de tabel.

Eerst  $b : P(X = 32) = b$ .

$$P(X = 32) = P(X \leq 32) - P(X \leq 31) = 0.1744 - 0.1140 = 0.0604 = b.$$

Nu  $a : P(X \leq 29) = a$ .

$$P(X = 30) = P(X \leq 30) - P(X \leq 29) \rightarrow P(X \leq 29) = P(X \leq 30) - P(X = 30) = 0.0704 - 0.0294 = 0.041 = a.$$

**b)**  $P(X < 31)$ .

$$P(X < 31) = P(X \leq 30) = 0.0704.$$

**c)**  $P(X > 32) = 1 - P(X \leq 32) = 1 - 0.1744 = 0.8256$ .

#### Opgave 4 Bean Boozled

Een spel waarbij je aan een rad draait om te bepalen welke kleur Jellybean je moet eten. De Jellybean kan lekker zijn, maar kan ook vies smaken. De fabrikant van het spel zorgt ervoor dat 70% van de beans een normale smaak hebben.

**a)** Je eet 10 Jellybeans achter elkaar op.

De kans dat Je meer normale dan vieze Jellybeans eet.

$n = 10$ ,  $p = 0.7$ , en  $X$  is de stochast.

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5 | n = 10, p = 0.7).$$

**b)** De kans dat J. minsten 3 vieze Jellybeans eet.

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 2 | n = 10, p = 0.3) = 1 - 0.3828 = 0.6172.$$

**c)** In een spel-verpakking zitten in totaal 100 Jellybeans in vijf kleuren. Van elke kleur zitten er evenveel beans in de verpakking. Ook bevat de verpakking een rad met daarop de vijf kleuren. Elk kleurvak van het rad is even groot. Ook voor deze verpakking geldt dat 70% van de snoepjes een normale smaak heeft.

Jo draait 5 keer aan het rad.

De kans dat bij vijf keer draaien elke kleur 1 keer komt.

Vijf keer draaien en vijf kleuren:  $5^5$  mogelijkheden.

Maar nu elke kleur 1 keer (dus zonder terugleggen): permutaties  $5!$  mogelijkheden.

$$\text{De kans: } \frac{5!}{5^5} = \frac{4!}{5^4} = \frac{24}{625}.$$

**d)** Ma. draait 2 keer achter elkaar de kleur rood.

De kans dat Ma. 1 normale en 1 vieze Jellybean moet eten.

- de kans op een vieze of een normale Jellybean:  $0.7 \cdot 0.3$ ,

- de kans op een normale of een vieze Jellybean:  $0.3 \cdot 0.7$ .

De totale kans is 0.42.

**e)** M. en J. kopen zo'n set en M. eet de eerste Jellybean, dat blijkt tot M's opluchting een lekkere te zijn. De volgende is voor J.

De kans dat de laatste Jellybean die J. eet een vieze Jellybean is.

Een set bevat drie normale en drie vieze Jellybeans. M. en J. eten om de beurt een Jellybean. J. eet de laatste Jellybean. Als J. de eerste Jellybean eet dan zijn er nog 5 Jellybeans, waarvan 3 vieze en 2 normale.

Drie van de vijf nog vies. De kans daarop is  $\frac{3}{5} = 0.6$ .

#### Opgave 5 Kerstballen

In vaas I zitten 20 kerstballen. Daarvan zijn er  $a$  rood en 2 zilverkleurig. De rest is groen.

In vaas II zitten  $a$  kerstballen. Daarvan zijn er 4 rood. De rest is zilverkleurig.

**a)** C. pakt uit elk van de vazen aselekt één kerstbal.

Toon aan:  $P(C. \text{ pakt twee rode kerstballen}) = 0.2$ , ongeacht wat  $a$  is.

Vaas I: 20 kerstballen waarvan  $a$  rood. Kans I op een rode kerstbal:  $\frac{a}{20}$ .

Vaas II:  $a$  kerstballen waarvan 4 rood. Kans II op een rode kerstbal:  $\frac{4}{a}$ .

De kansen zijn onafhankelijk. De kans op twee rode kerstballen: Kans I  $\cdot$  Kans II =  $\frac{a}{20} \cdot \frac{4}{a} = 0.2$ .

**b)** Toon aan dat  $P(\text{rode en een zilverkleurige}) = \frac{a^2 - 4a + 8}{20a}$ .

Kans Vaas I rood en Vaas II zilverkleurig:  $\frac{a}{20} \cdot \frac{a-4}{a}$ ,

Kans Vaas I zilverkleurig en Vaas II rood:  $\frac{2}{20} \cdot \frac{4}{a}$ .

De totale kans is beide kansen opgeteld:  $\frac{a}{20} \cdot \frac{a-4}{a} + \frac{2}{20} \cdot \frac{4}{a} = \frac{a^2-4a+8}{20a}$ .

c) Aantal groene kerstballen in Vaas I als:  $P(\text{rode en zilverkleurige}) = 0.25$ .

Met het resultaat onder b):

$$\frac{a^2-4a+8}{20a} = \frac{1}{4} \Rightarrow a^2 - 9a + 8 = 0 \Rightarrow (a-8)(a-1) = 0.$$

$(a-1) = 0$  is niet van toepassing. Strijdig met de inhoud van Vaas II. Dus  $(a-8) = 0 \Rightarrow a = 8$ .

Het aantal groene kerstballen in Vaas I is dus  $20 - 8 - 2 = 10$ .

d) J. pakt uit Vaas I twee kerstballen.

De formule van de kans dat J. een rode en een groene kerstbal pakt. Toon aan dat deze kans het grootst is als er in Vaas I negen rode kerstballen zitten.

Twee kerstballen trekken: Rood/Groen en Groen/Rood.

- Rood/Groen.

Kans op de rode bal is  $\frac{a}{20}$ .

Kans op de groene bal. Er is 1 rode bal uit. Er resteren nog  $(a-1)$  rode ballen. Van de totaal 19 ballen zijn er dan:

$19 - 2 - (a-1)$  groen. Kans op een groene bal:  $\frac{19-2-(a-1)}{19}$ .

De kans Rood/Groen is:  $\frac{a}{20} \cdot \frac{19-2-(a-1)}{19}$ .

- Groen/Rood. De kans op Groen/Rood is gelijk aan de kans Rood/Groen.

Controle:

Kans op een groene bal is  $\frac{20-a-2}{20}$ . Er is 1 groene bal uit. De kans op een rode bal is dan  $\frac{a}{19}$ .

De kans Groen/Rood is:  $\frac{a}{19} \cdot \frac{20-a-2}{20} = \frac{a}{20} \cdot \frac{19-2-(a-1)}{19}$ .

De totale kans op een groene en een rode bal:  $2 \cdot \frac{18a-a^2}{19 \cdot 20}$ .

Voor welke waarde van  $a$  is deze kans het grootst?

De factor  $\frac{2}{380}$  speelt geen rol. We moeten het maximum van  $18a - a^2$  bepalen. Je weet dat  $a$  een geheel getal moet zijn. Door de grafiek te tekenen van de functie  $18a - a^2$ , vind je dat  $a = 9$ .

## Blok 4 Analytische meetkunde, Analytical Geometry

### Blok 4 Les 1 Introductie analytische meetkunde

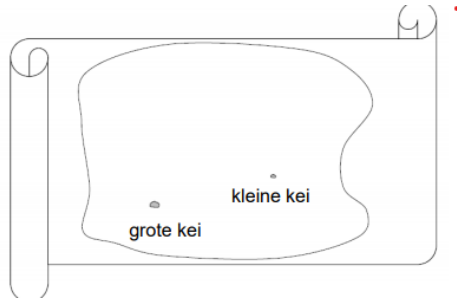
Deze les sluit aan bij hoofdstuk 1 van Analytische Meetkunde van de Wageningse Methode(2010).

- Waar ligt de schat?

Je gaat op zoek naar de schat aan de hand van een oude kaart. Op de kaart staan twee zwerfkeien en een oude eik.

De twee zwerfkeien zijn goed herkenbaar.

En waar is de grote eik?



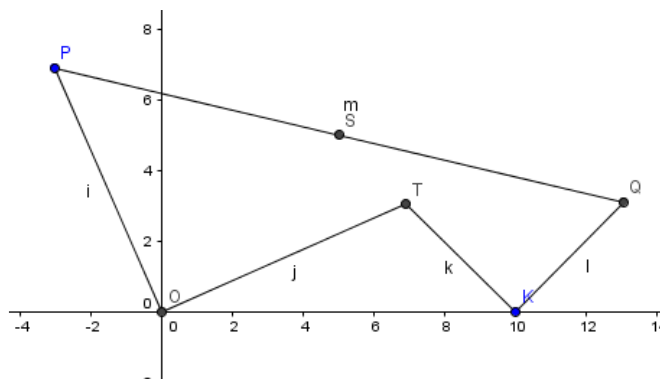
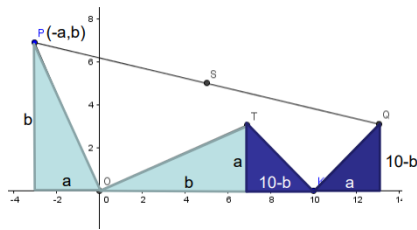
De grote eik staat er al lang niet meer.

Dus:

Probeer maar wat en kies een coördinatenstelsel. Zie hieronder.

Werk met coördinaten (Geogebra); met grote kei als oorsprong-O.

- Loop in een rechte lijn van de grote eik  $\{P(-a, b)\}$ , willekeurig gekozen want je weet niet waar die stond, naar de grote kei(O).
- Sla bij de grote kei linksaf(rechte hoek).
- Leg dezelfde afstand(PO, i) nog eens af(OT, i=j).
- Loop naar de kleine kei, van T(b, a) naar K.
- Sla bij de kleine kei linksaf(rechte hoek)
- Leg dezelfde afstand(TK) nog eens af.
- De schat ligt midden(S) tussen waar je nu staat  $\{Q(10+a, 10-b)\}$  en de grote eik.



De coördinaten van S:

$$\frac{1}{2}[(-a, b) + (10 + a, 10 - b)] = \frac{1}{2}(10, 10) = (5, 5).$$

Zoals je ziet: de coördinaten van S zijn onafhankelijk van  $a$  en  $b$ ; de oude eik.

Het invoeren van een assenstelsel helpt bij het vinden van een oplossing. Een

dergelijke combinatie van meetkunde en een assenstelsel wordt analytical geometry genoemd.

- Werken met coördinaten:

Afstand tussen  $P$  en  $Q$ :  $d(P, Q)$ .

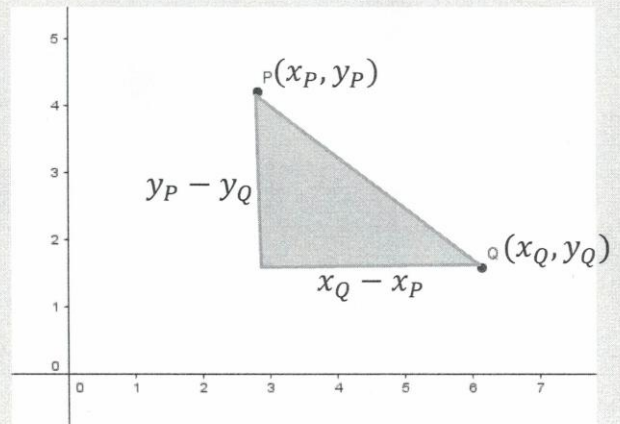
Coördinaten  $P$  en  $Q$ :

$P(x_P, y_P)$  en  $Q(x_Q, y_Q)$ .

Afstand tussen  $P$  en  $Q$ :

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_P - y_Q)^2}$$

(met de stelling van Pythagoras)

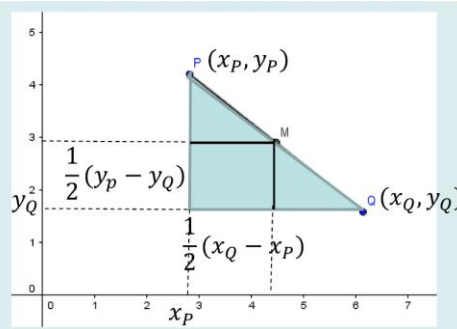


- Werken met coördinaten: midden

Het midden tussen  $P$  en  $Q$

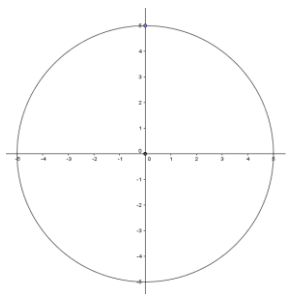
De coördinaten van  $M$  zijn:

$$\begin{aligned} \left(x_P + \frac{1}{2}(x_Q - x_P), y_Q + \frac{1}{2}(y_P - y_Q)\right) &= \\ &= \frac{1}{2}(x_P + x_Q, y_P + y_Q) \end{aligned}$$



- Werken met coördinaten: de vergelijking

De vergelijking van de cirkel met  $O$  als middelpunt en straal 5:



Het punt  $(x, y)$  ligt op de cirkel met straal 5.

De vergelijking:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 5, \text{ dus } x^2 + y^2 = 25.$$

De cirkel is de verzameling van punten  $(x, y)$  die voldoen aan bovenstaande vergelijking. Bijvoorbeeld:  $(3,4)$ ;  $(4,3)$ ;  $(-3,4)$ ;  $(-\sqrt{21}, 2)$ ;...

Willekeurig gekozen waarden voldoen in het algemeen niet aan deze vergelijking.

$x^2 = 25$  is een vergelijking in 1 variabele.

De oplossingsverzameling is  $\{5, -5\}$ .

$x^2 + y^2 = 25$  is een vergelijking in twee variabelen.

De oplossingsverzameling is de cirkel met O als middelpunt en straal 5.

Voor bijvoorbeeld de vergelijking:

$$2x^2 + 3xy + 5y^2 = 7$$

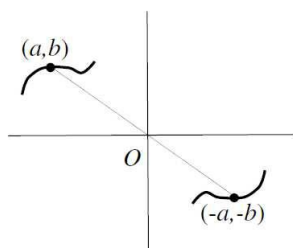
ligt het punt  $(\frac{1}{2}, 1)$  op de oplossingskromme gerepresenteerd door bovenstaande

vergelijking. Gelet op de kwadraten en het product  $xy$ , ligt ook het punt  $(-\frac{1}{2}, -1)$  op de oplossingskromme.

*Een vergelijking in twee variabelen kunnen je schrijven als:*

$$f(x, y) = 0.$$

*De oplossingsverzameling is een kromme in het vlak.*



*De punten  $(a, b)$  en  $(-a, -b)$  liggen gespiegeld ten opzichte van de oorsprong. De kromme is puntsymmetrisch in de oorsprong O als bij elk punt  $(a, b)$  op de kromme ook het punt  $(-a, -b)$  op de kromme ligt.*

Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven.

**Opgave 3** van Hoofdstuk 1, § 1.2

Gegeven de punten  $A(2,17)$  en  $M(3,13)$ .  $M$  is het midden van lijnstuk  $AB$ .

De coördinaten van  $B$ ? Het midden van het lijnstuk  $AB$  is dus gegeven.

Algemeen:

$$(x_M, y_M) = \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) \rightarrow (3, 13) = \left( \frac{2 + x_B}{2}, \frac{17 + y_B}{2} \right).$$

$$\frac{2 + x_B}{2} = 3 \Rightarrow x_B = 4,$$

$$\frac{17 + y_B}{2} = 13 \Rightarrow y_B = 9.$$

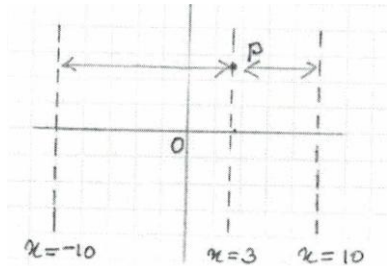
De coördinaten van  $B$ :  $(4, 9)$ .

#### Opgave 4 van Hoofdstuk 1, § 1.2

a)  $P$  is het punt  $(3, 5)$ .

De afstand van  $P$  tot de lijn  $x = 10$  en de afstand tot de lijn  $x = -10$ .

Zie onderstaande schets.



De afstand tot de lijn  $x = 10$ :  $10 - 3 = 7$ .

De afstand tot de lijn  $x = -10$ :  $10 + 3 = 13$ .

b) Het punt  $Q(-8, -3)$ .

De afstand tot de lijnen  $y = 25$  en  $y = -8$ . Nota bene: niet aangegeven in bovenstaande schets.

De afstand tot de lijn  $y = 25$ :  $25 + 3 = 28$ .

De afstand tot de lijn  $y = -8$ :  $8 - 3 = 5$ .

#### Opgave 5 van Hoofdstuk 1, § 1.2

$P$  is het punt  $(x_P, y_P)$ .

De afstand van  $P$  tot de lijn  $l: x = 4$ , uitgedrukt in de coördinaten van  $P$ . De afstand noemen we  $d(P, l)$ .

a)  $P = (3, 7) \rightarrow d(P, l) = 4 - 3 = 1$ ,

$P = (7, 3) \rightarrow d(P, l) = 7 - 4 = 3$ ,

$P = (-3, 17) \rightarrow d(P, l) = 4 - (-3) = 7$ .

b)  $y_P$  speelt geen rol. De afstand van  $P$  tot  $l$  is gelijk aan de afstand tussen de lijnen  $l$  en de lijn  $x = x_P$ .

c)  $d(P, l)$  voor

-  $x_P > 4 \rightarrow d(P, l) = x_P - 4$ ,

-  $x_P = 4 \rightarrow d(P, l) = 0$ ,

-  $x_P < 4 \rightarrow d(P, l) = 4 - x_P$ .

#### Opgave 6 van Hoofdstuk 1, § 1.2

Een formule voor de afstand  $P(x_P, y_P)$  tot de lijn  $k: y = 3$ .

De afstand is altijd een getal  $\geq 0$ . We gebruiken dus de modulus. De afstand noemen we  $d(P, k)$ .

$$d(P, k) = |y_P - 3|.$$

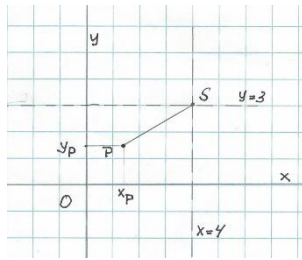
#### Opgave 7 van Hoofdstuk 1, § 1.2

In een Cartesiaans assenstelsel: Noem  $S$  het snijpunt van de lijnen  $y = 3$  en  $x = 4$ . Kies een punt  $P$  met coördinaten  $(x_P, y_P)$ , niet liggend op  $y = 3$  en  $x = 4$ . Voor de afstand  $d(P, S)$  geldt:

$$d(P, S) = \sqrt{(x_P - 4)^2 + (y_P - 3)^2}.$$

Verklaar deze formule.

Maak een schets:



Met de stelling van Pythagoras, zie schets, volgt dat  $d(P, S) = \sqrt{d^2(P, x = 4) + d^2(P, y = 3)} = \sqrt{|x_P - 4|^2 + |y_P - 3|^2}$ .

#### Opgave 9 van Hoofdstuk 1, § 1.2

Gegeven de coördinaten  $(x_P, y_P)$  en  $(x_Q, y_Q)$ .

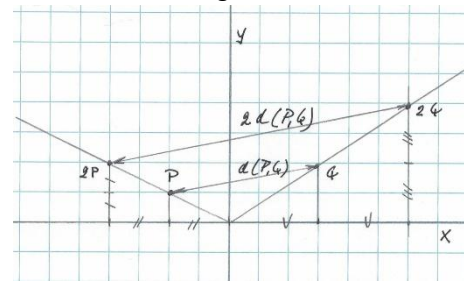
We verdubbelen de coördinaten. Wat gebeurt er met de afstand  $d(P, Q)$ ?

- Zonder coördinaten verdubbeling  $d(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$ .

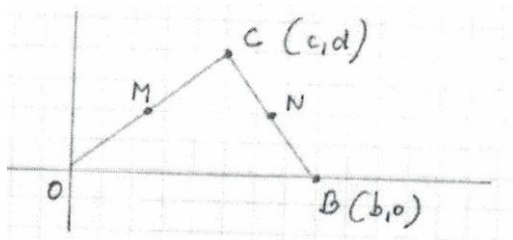
- Met coördinaten verdubbeling:  $d(2P, 2Q) = \sqrt{(2x_P - 2x_Q)^2 + (2y_P - 2y_Q)^2} = 2\sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$ .

Conclusie: de afstand verdubbelt.

Zie onderstaande figuur.



#### Opgave 2 van Hoofdstuk 1 § 1.3



In een driehoek  $OBC$  zijn  $M$  en  $N$  de middens van de zijden van  $OC$  en  $BC$ . Een hoekpunt van de driehoek hebben we in de oorsprong van het assenstelsel geplaatst. Een ander hoekpunt,  $B$ , ligt op het positieve gedeelte van de  $x$ -as.  $MN$  is evenwijdig  $OB$  en is half zo lang als  $OB$ .  $MN$  wordt de midden parallel van de  $\triangle OBC$  genoemd.

Dit is een stelling uit de meetkunde. Door de plaatsing van de driehoek in het assenstelsel kan de stelling worden bewezen.

**a)** De coördinaten van  $M$ , het midden van  $OC$  en de coördinaten van  $N$ , het midden van  $BC$ .

De coördinaten van  $O$ :  $(0,0)$ ,

De coördinaten van  $B$ :  $(b,0)$ ,

De coördinaten van  $C$ :  $(c,d)$ .

Dan vinden we voor de coördinaten van  $M$ :  $\left(\frac{c+0}{2}, \frac{d+0}{2}\right) = \left(\frac{c}{2}, \frac{d}{2}\right)$ .

Voor de coördinaten van  $N$  hebben we:  $\left(\frac{c+b}{2}, \frac{d+0}{2}\right) = \left(\frac{c+b}{2}, \frac{d}{2}\right)$ .

**b)**  $MN$  is evenwijdig aan  $OB$  want de  $y$ -coördinaat van  $M$ ,  $\frac{d}{2}$ , is gelijk aan de  $y$ -coördinaat van  $N$ ,  $\frac{d}{2}$ .

c) De lengte van  $MN$ ,  $d(M, N)$ .

$$\text{Algemeen: } d(M, N) = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{2} - \frac{c+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2} - \frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{b}{2}\right)^2 + 0} = \frac{1}{2}|b|.$$

$$\text{We weten } d(O, B) = |b| \Rightarrow |MN| = \frac{1}{2}|OB|.$$

#### Opgave 2 van Hoofdstuk 1, § 1.4

Zoek de kromme bij elk van de volgende vergelijkingen:

-  $2x + 3y = 12 \rightarrow 3y = 12 - 2x \rightarrow y = 4 - \frac{2}{3}x \rightarrow$  rechte lijn met richtingscoëfficiënt  $-\frac{2}{3}$ , die de  $y$ -as snijdt in het punt  $(0,4)$

-  $2x + 7 = 0 \rightarrow 2x = -7 \rightarrow x = -\frac{7}{2} \rightarrow$  verticale rechte lijn in een cartesiaans assenstelsel, die de  $x$ -as snijdt in  $(-\frac{7}{2}, 0)$

-  $x^2 = y^2 \rightarrow y = \pm x \rightarrow$  twee rechte lijnen door oorsprong met richtingscoëfficiënt  $\pm 1$ .

-  $(x+3)(y-2) = 0 \rightarrow x = -3$ , of  $y = 2 \rightarrow$  twee rechte lijnen, een horizontale door  $(0,2)$  een verticale door  $(-3,0)$ .

-  $x^2 + (y-2)^2 = 0 \rightarrow x = 0$ , en  $y = 2 \rightarrow$  een punt en wel  $(0,2)$ . Dat zie je ook door  $y$  te verschuiven  $\rightarrow y_1 = y - 2 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + (y_1)^2 = 0$  : dit kan alleen maar als  $x = 0$  en  $y_1 = 0$ .

-  $\sqrt{x} = \sqrt{y} \rightarrow y = x \rightarrow$  een rechte lijn met richtingscoëfficiënt 1, vanuit de oorsprong in het eerste kwadrant.

-  $(y-x)^2 = 1 \rightarrow (y-x) = \pm 1 \rightarrow$  twee rechte lijnen met richtingscoëfficiënt 1, door de punten  $(0,1)$ , en respectievelijk  $(0,-1)$ .

-  $\frac{y}{x} = 4 \rightarrow y = 4x \rightarrow$  rechte lijn met richtingscoëfficiënt 4, door  $(1,4)$  en  $(-1,-4)$ , het punt  $(0,0)$  uitgezonderd.

#### Opgave 4 van Hoofdstuk 1, § 1.4

Gegeven de kromme  $K$  met vergelijking  $2x^2 + 5y^2 = 13$ . Door substitutie vind je dat het punt  $(2,1)$  op de kromme  $K$  ligt.

a) Wetend dat  $(2,1)$  op  $K$  ligt zijn er nog 3 punten op te sommen, te weten:  $(-2,1)$ ,  $(2,-1)$  en  $(-2,-1)$ . De mintekens van de coördinaten van de punten verdwijnen bij substitutie in de vergelijking.

b) Als je een punt  $(a,b)$  van  $K$  kent, ken je er ook meer.

Dus  $2a^2 + 5b^2 = 13 \Rightarrow (-a,b), (a,-b)$  en  $(-a,-b)$  voldoen aan de vergelijking.

c)  $K$  is puntsymmetrisch.  $(a,b)$  ligt op  $K$  evenals  $(-a,-b)$ .

#### Opgave 6 van Hoofdstuk 1, § 1.4

Het punt  $(a,b)$  ligt op  $x^2 - xy + 1 = 0$ . Dus ook  $(\frac{1}{a}, b)$ ?

Het punt  $(a,b)$  ligt op  $x^2 - xy + 1 = 0 \Leftrightarrow a^2 - ab + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^2 - \frac{1}{a} \cdot b + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - ab + a^2 = 0$ .

$(\frac{1}{a}, b)$  ligt ook op  $x^2 - xy + 1 = 0$ .

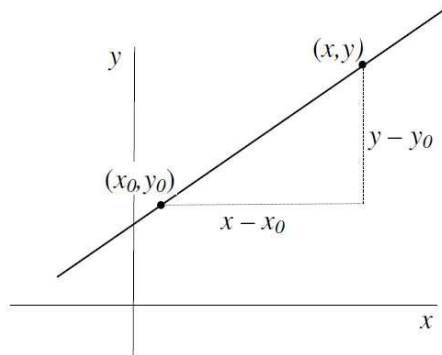
- Oefenen

De opgaven van hoofdstuk 1.

#### Blok 4 Les 2 Lijnen

Deze les sluit aan bij de paragrafen 2.1; 2.2 en 2.3 Van de Analytische Meetkunde van de Wageningse methode.

- Vergelijking van een lijn



$y = mx + q$ , de vergelijking van een lijn,

$m$  is de richtingscoëfficiënt (rc) en  $(0, q)$  is het snijpunt met de  $y$ -as.

Gegeven het punt  $P(x_0, y_0)$  ligt op de lijn  $y = mx + q \rightarrow y_0 = mx_0 + q$ .

Elimineer  $q$  uit beide vergelijkingen voor  $y$  en  $y_0$ : je vindt voor de rc:  $m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$ .

Dus  $y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y = m(x - x_0) + y_0$ .

De vergelijking van een lijn door een punt  $P(x_0, y_0)$  en met rc  $m$ , ook wel helling genoemd:

$$y = m(x - x_0) + y_0 = mx + (y_0 - mx_0).$$

Kiezen we nu voor  $(x, y)$  een bepaald punt  $Q(x_1, y_1)$  en we nemen weer  $P(x_0, y_0)$ , dan liggen beide punten op de lijn met rc:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Op deze manier kan je de rc uitrekenen als twee punten van een lijn gegeven zijn.

Voor de vergelijking van de lijn  $y - y_0 = m(x - x_0)$  kunnen we dus schrijven:

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0).$$

Voorbeeld:

Lijn door  $(5, 2)$  en  $(7, 10)$

Met bovenstaande vergelijking:

$$y - 2 = \frac{10 - 2}{7 - 5} (x - 5) = 4(x - 5)$$

$$\text{Dus: } y = 4(x - 5) + 2 = 4x - 18$$

Eén type vergelijking voor alle lijnen:  $ax + by = c$ ,

$a = 0$  en  $b \neq 0 \rightarrow y = \frac{c}{b} = \text{constant}$ , een horizontale lijn.

$a \neq 0$  en  $b = 0 \rightarrow x = \frac{c}{a} = \text{constant}$ , een verticale lijn.

- Twee lijnen

Voorbeeld 1:

Gegeven de lijnen  $3x - y = 1$  en  $6x - 5 = -4$ .

Bereken het snijpunt van de lijnen.

$$3x - y = 1 \rightarrow 3x = 1 + y \rightarrow 6x = 2 + 2y.$$

Substitueer  $6x = 2 + 2y$  in  $6x - 5 = -4$ .

$$2 + 2y - 5y = -4 \rightarrow -3y = -6 \rightarrow y = 2 \text{ en } x = 1.$$

Het snijpunt is (1, 2).

Voorbeeld 2:

$$3x - y = 1 \rightarrow 6x - 2y = 2$$

$$6x - 2y = 3$$

Vergelijking van beide vergelijkingen leidt tot een tegenspraak. Het stelsel van vergelijkingen heet strijdig. Er is geen snijpunt: de lijnen zijn evenwijdig.

Voorbeeld 3:

$$3x - y = 1$$

$$6x - 2y = 2.$$

In dit geval is het duidelijk dat het om dezelfde lijnen gaat. De lijnen vallen samen.

Het stelsel van vergelijkingen heet afhankelijk. Er zijn oneindig veel snijpunten.

Een duidelijke parallel tussen meetkunde en algebra: analytical geometry.

- Meetkunde: twee lijnen hebben 0 of 1 gemeenschappelijk punt; of ze hebben alle punten gemeenschappelijk. In het laatste geval vallen de lijnen samen.

- Algebra: een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden heeft 0 of 1 oplossing, het getallen paar  $(x, y)$ ; of ze hebben oneindig veel oplossingen. Dat wil zeggen als de twee vergelijkingen identiek zijn.

De vergelijkingen

$$k: ax + by = c \text{ en}$$

$$l: dx + ey = f,$$

vormen een stelsel van vergelijkingen met twee onbekenden  $x$  en  $y$ ;  $a, b, c, d, e$  en  $f$  zijn gegeven.

Beide vergelijkingen stellen een lijn voor in een coördinatenstelsel. De lijnen snijden elkaar in een punt. De coördinaten van het snijpunt geven de oplossing van het stelsel: dat zijn de getallen  $x$  en  $y$  die aan beide vergelijkingen tegelijkertijd voldoen. Het getallenpaar  $(x, y)$  vormt de oplossing van het stelsel vergelijkingen.

Gegeven de twee lijnen  $k$  en  $l$ :

–  $k$  en  $l$  snijden elkaar: er is 1 snijpunt; het stelsel is **onafhankelijk**,

Voorbeeld voor het bepalen van  $x$  en  $y$ , twee onbekenden dus je hebt twee vergelijkingen nodig:  $k$  en  $l$  :

$$ax + by = c \rightarrow \times d \rightarrow dax + dby = dc$$

$$dx + ey = f \rightarrow \times a \rightarrow dax + aey = af$$

Trek nu deze twee resulterende vergelijkingen van elkaar af,  $\rightarrow dby - aey = dc - af$ .

Je ziet dat  $x$  is geëlimineerd en je kan  $y$  uitrekenen:  $y = \frac{dc-af}{db-ae}$ . Nu kun je  $y$  bijvoorbeeld in  $ax + by = c$  substitueren en  $x$  uitrekenen. Maar meestal is het eenvoudiger rekenen als je het proces herhaalt, maar nu door  $y$  te elimineren.

Dus:

$$ax + by = c \rightarrow \times e \rightarrow eax + eby = ec$$

$$dx + ey = f \rightarrow \times b \rightarrow bdx + eby = bf$$

Trek weer de twee resulterende vergelijkingen van elkaar af,  $\rightarrow eax - bdx = ec - bf$ .

Je ziet dat  $y$  is geëlimineerd en je kan  $x$  uitrekenen:  $x = \frac{ec-bf}{ea-bd}$ .

Nb.: soms zie je de oplossing zonder te rekenen. Maar dat wijst zich vanzelf.

Het is even wennen om twee vergelijkingen van elkaar af te trekken. Doe maar net alsof het getallen zijn en dan zie je dat het klopt.

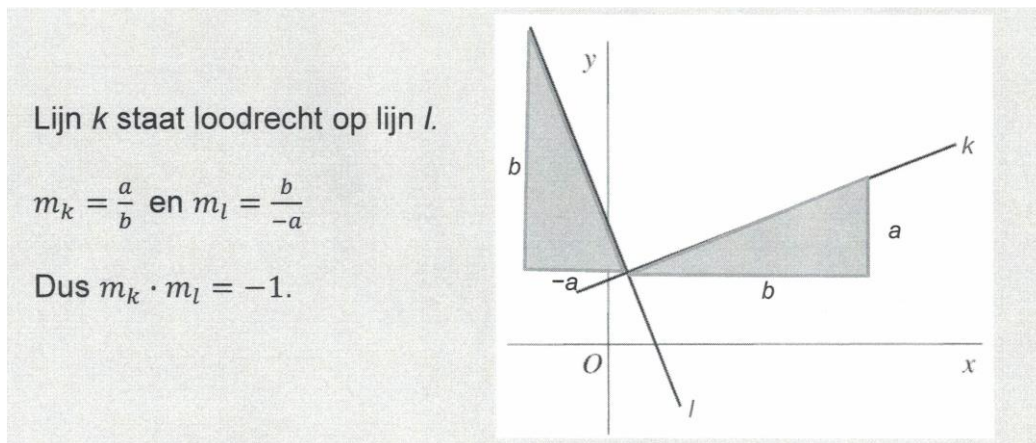
–  $k$  en  $l$  zijn evenwijdig ( $//$ ): er is geen gemeenschappelijk punt; het stelsel is **strijdig**,

–  $k$  en  $l$  hebben dezelfde oplossingen ( $k = l$ ): alle punten gemeenschappelijk; het stelsel heet **afhankelijk**.

Samengevat:

| Lijnen $k$ en $l$ | Stelsel van vergelijkingen |
|-------------------|----------------------------|
| snijden           | 1 oplossing                |
| zijn evenwijdig   | Geen oplossing             |
| Vallen samen      | Oneindig veel oplossingen  |

- Twee lijnen loodrecht op elkaar.



Lijn  $k$  staat loodrecht op lijn  $l$  als het product van de rc's van beide lijnen  $-1$  oplevert.

De rc van  $k = m_k = \frac{a}{b}$ ,

De rc van  $l = m_l = \frac{d}{e}$ , hier stel je  $m_l$  als een onbekend quotiënt voor.

met  $m_k \cdot m_l = -1$  vinden we  $\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{e} = -1$ .  $\rightarrow \frac{d}{e} = m_l = -\frac{b}{a}$ .

Wanneer je ervanuit gaat dat de rc van  $l = m_l = -\frac{b}{a}$  is, volgt uit Pythagoras dat de lijnen loodrecht op elkaar staan.

Voorbeeld:

lijn  $k$ :  $2x + 3y - 5 = 0 \rightarrow 3y = 5 - 2x \rightarrow m_k = -\frac{2}{3}$ .

lijn  $l \perp k$ :  $\rightarrow m_l = \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{3}{2}x + c$ .

lijnen  $l$ :  $-3x + 2y - p = 0$ , een bundel lijnen  $\perp k$ .

Voorbeeld:

Gegeven een rechthoekige driehoek  $ABC$  met de coördinaten van  $A(1, 4)$  en van  $B(3, 10)$ .  $C$  ligt op de  $y$ -as. De rechte hoek zit bij  $A$ .

Bereken de coördinaten van  $C$ .

De uitwerking

Lijn  $k$  door  $AB$ :  $y - 4 = \frac{-3}{-1}(x - 1) \rightarrow 3x - y + 1 = 0$ .

Lijn  $l \perp k$ :  $x + 3y + p = 0$ .

Lijn  $l$  door  $A$ :  $1 + 3 \cdot 4 + p = 0 \rightarrow p = -13$ .

De vergelijking van de lijn  $l$  is:  $x + 3y = 13$ .

Voor  $C$  geldt dat  $x = 0 \rightarrow y = \frac{13}{3} \rightarrow C(0, \frac{13}{3})$ .

### Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven.

#### Opgave 2 van Hoofdstuk 1 § 2.1

Gegeven de richtingscoëfficiënt  $m$  van een lijn die door het punt  $(0, q)$  gaat.

De formule voor de lijn waarvoor bovenstaande gegevens van toepassing zijn?

De formule die dan voor de hand ligt is:

$$y - y_0 = m(x - x_0):$$

$$y - q = m(x - 0) \Leftrightarrow y - q = mx \Leftrightarrow y = mx + q.$$

#### Opgave 4 van Hoofdstuk 1 § 2.1.

a) Wanneer er twee punten gegeven zijn en niet de richtingscoëfficiënt kun je  $y - y_0 = m(x - x_0)$  niet direct gebruiken. Je zult eerst de richtingscoëfficiënt moeten uitrekenen. Dan ligt het voor de hand de formule te gebruiken waarbij de coördinaten van de twee gegeven punten direct gesubstitueerd worden:

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0),$$

b) De vergelijking van de lijn door  $(3, 5)$  en  $(3, -2)$ .

$$y - 5 = \frac{-2 - 5}{3 - 3} (x - 3). \text{ Er moet gedeeld worden door } 3 - 3 = 0, \text{ en dat kan niet.}$$

Teken je de punten in het  $x$ - $y$  vlak, dan zie je direct wat er aan de hand is: een verticale lijn door de twee genoemde punten  $\Rightarrow$  de lijn is  $x = 3$ .

#### Opgave 6 van Hoofdstuk 1 § 2.1

De lijn  $ax + by = c$ .

a) De waarden van  $a, b, c$  waarvoor de lijn door de oorsprong gaat?

Dus,  $x = 0, y = 0 \rightarrow c = 0$ .

Verder,  $a, b$  kunnen niet beide gelijk 0 zijn  $\rightarrow$  want dan is  $ax + by = 0$  geen lijn meer.

De lijn is  $y = -\frac{a}{b} \cdot x$  gaat door de oorsprong voor elke waarde van  $a, b \neq 0$ ,

b) De waarden van  $a, b, c$  waarvoor de lijn een verticale is?

Als de lijn een verticale lijn is in het  $x$ - $y$  vlak heeft de lijn de vergelijking  $x = d$  voor een bepaalde waarde van  $d$ .

$$ax + by = c \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a} \cdot y + \frac{c}{a}, \text{ met } a \neq 0. \text{ Dus moet gelden } \frac{b}{a} = 0 \rightarrow b = 0 \Rightarrow x = \frac{c}{a} \equiv d.$$

c) De waarden van  $a, b, c$  waarvoor de lijn horizontaal is?

Als de lijn een horizontale lijn is in het  $x$ - $y$  vlak heeft de lijn de vergelijking  $y = e$  voor een bepaalde waarde van  $e$ .

$$ax + by = c \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b} \cdot x + \frac{c}{b}, \text{ met } b \neq 0. \text{ Dus moet gelden } \frac{a}{b} = 0 \rightarrow a = 0 \Rightarrow y = \frac{c}{b} \equiv e.$$

d) Wat stelt  $ax + by = c$  voor als  $a = b = c = 0$ ?

Alle mogelijke waarden van  $x, y$  voldoen  $\rightarrow ax + by = c$  stelt het hele vlak voor. Je kunt natuurlijk ook stellen dat als  $a = b = c = 0$  de vergelijking er helemaal niet is.

**e)** Wat stelt  $ax + by = c$  voor als  $a = b = 0$  en  $c \neq 0$ ?

$ax + by = c$  met  $a = b = 0 \rightarrow c = 0$ . Maar  $c \neq 0$ . Er zijn geen oplossingen voor  $x$  en  $y$ . We hebben dan een leeg vlak.

**Opgave 8** van Hoofdstuk 1, § 2.1

De vergelijking van de lijn door het punt  $(2,3)$  die evenwijdig is met de lijn  $4x + 5y - 11 = 0$ ?

De gevraagde lijn is evenwijdig met

$$4x + 5y - 11 = 0 \Leftrightarrow 5y = -4x + 11 \Leftrightarrow y = -\frac{4}{5}x + \frac{11}{5},$$

en heeft dus dezelfde richtingscoëfficiënt. Omdat we de richtingscoëfficiënt bepaald hebben en ook nog een punt van de gevraagde lijn kennen, gebruiken we:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = -\frac{4}{5}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\frac{4}{5}x + \frac{8}{5} + 3 = -\frac{4}{5}x + \frac{23}{5}.$$

**Opgave 9** van Hoofdstuk 1, paragraaf 2.1:

Liggen de punten  $(2,3)$ ,  $(3,-1)$  en  $(1,6)$  op één lijn?

Je kunt beginnen met de punten op grafiek papier uit te zetten en proberen één rechte lijn te tekenen. Dat is geen bewijs. Het is een demonstratie met de nauwkeurigheid van de potlood punt dikte.

Stap 1: de lijn door de punten  $(2,3)$  en  $(3,-1)$ .

De richtingscoëfficiënt is:  $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{3 - (-1)}{2 - 3} = -4$ .

De vergelijking van de lijn door beide punten:  $y - 3 = -4(x - 2) \rightarrow y = -4x + 11$ .

Stap 2: neem de punten  $(3,-1)$  en  $(1,6)$ .

De richtingscoëfficiënt is:  $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{-1 - 6}{3 - 1} = -\frac{7}{2}$ .

Je vindt een andere richtingscoëfficiënt ( $rc$ )  $\rightarrow$  de punten liggen niet op één rechte lijn.

Alternatief: substitueer  $(1,6)$  in  $y = -4x + 11 \rightarrow 6 \neq -4 + 11$ .

**Opgave 1 en 2** van Hoofdstuk 1 § 2.2 Onderlinge ligging van twee lijnen

$x + 4y = 22$ , en  $6x - 2y = 2$ , is een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden. De vergelijkingen representeren lijnen in een coördinatenstelsel. De lijnen snijden elkaar in een punt. De coördinaten van het snijpunt stellen de oplossing van het stelsel voor: dat zijn de getallen  $(x, y)$  die aan beide vergelijkingen voldoen. Het getallenpaar  $(x, y)$  is de oplossing van het stelsel vergelijkingen.

**a)** De oplossing van het stelsel  $x + 4y = 22$ , en  $6x - 2y = 2$ ?

$$x + 4y = 22 \Rightarrow x + 4y = 22 \Rightarrow x + 4y = 22$$

$$6x - 2y = 2 \Rightarrow 12x - 4y = 8 \Rightarrow 12x - 4y + x + 4y = 8 + 22 \Rightarrow 13x = 26 \Leftrightarrow x = 2.$$

Substitutie van  $x = 2$  in  $x + 4y = 22 \Rightarrow y = 5$ .

Het gevraagde getallenpaar  $(x, y) \Rightarrow (2, 5)$ .

**b)** De waarde van  $p$ , waarvoor het stelsel  $3x - y = 1$ ,  $6x + py = 3$ , geen oplossing heeft?

Met de meetkundige methode

$$3x - y = 1 \Leftrightarrow y = 3x - 1,$$

$$6x + py = 3 \Leftrightarrow y = -\frac{6}{p}x + \frac{3}{p}.$$

Dus voor  $p = -2$ , hebben beide vergelijkingen geen oplossing: ze zijn evenwijdig.

Met algebra vinden we met het stelsel vergelijkingen:  $y = \frac{1}{2+p} \Rightarrow$  geen oplossing voor  $p = -2$ .

**c)** De waarden van  $p$  en  $q$  waarvoor het stelsel  $3x - y = 1$ ,  $6x + py = q$ , oneindig veel oplossingen heeft.

Met de algebraïsche methode

$$3x - y = 1 \Leftrightarrow 6x - 2y = 2$$

$$6x + py = q \Leftrightarrow 6x + py = q \Leftrightarrow 6x - (6x - 2y) + py = q - 2 \Leftrightarrow (p + 2)y = q - 2.$$

Voor  $p = -2$  en  $q = 2$ , zijn er oneindig veel oplossingen: aan de vergelijking  $0 \cdot y = 0$  voldoen oneindig veel waarden van  $y$ .

**Opgave 4** van Hoofdstuk 1, § 2.2

We onderzoeken het stelsel:

$ax + by = c$ , en  $px + qy = r$ , met  $a, b$  niet beide 0 en  $p, q$  niet beide 0.

**a)** Veronderstel  $b \neq 0, q \neq 0$ .

De richtingscoëfficiënten(rc) van de lijnen van het stelsel:

$$-ax + by = c \Leftrightarrow by = -ax + c \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \Rightarrow \text{de rc is } -\frac{a}{b}.$$

$$-px + qy = r \Leftrightarrow qy = -px + r \Leftrightarrow y = -\frac{p}{q}x + \frac{r}{q} \Rightarrow \text{de rc is } -\frac{p}{q}.$$

**b)** De voorwaarde waaronder het stelsel onafhankelijk is? Het stelsel is onafhankelijk als er één oplossing is. De lijnen snijden elkaar dan in één punt. Dat kan alleen als de richtingscoëfficiënten van de lijnen verschillend zijn.

De geometrische oplossing:  $-\frac{a}{b} \neq -\frac{p}{q} \Rightarrow aq \neq bp$ .

De algebraïsche oplossing: vermenigvuldig de eerste vergelijking met  $p \rightarrow apx + bpy = cp$ , en vermenigvuldig de tweede vergelijking met  $a \rightarrow apx + aqy = ar$ . Beide nieuwgevonden vergelijkingen aftrekken:

$$y(bp - aq) = (cp - ar) \rightarrow y = \frac{(cp - ar)}{(bp - aq)}. \text{ Er is een snijpunt voor } (bp - aq) \neq 0.$$

**c)** Veronderstel  $b = 0$ , of  $q = 0$ .

Het stelsel is eveneens onafhankelijk voor  $aq \neq bp$ .

$$-b = 0 \Rightarrow y = \frac{(cp - ar)}{(bp - aq)} \Rightarrow y = -\frac{(cp - ar)}{aq}. \text{ Er is dus een oplossing voor } q \neq 0. \text{ Het stelsel is onafhankelijk.}$$

$$-q = 0 \Rightarrow y = \frac{(cp - ar)}{(bp - aq)} \Rightarrow y = \frac{(cp - ar)}{bp}. \text{ Er is dus een oplossing voor } b \neq 0. \text{ Het stelsel is onafhankelijk.}$$

Conclusie: Er is een snijpunt voor  $(bp - aq) \neq 0$ .

**Opgave 6** van Hoofdstuk 1, § 2.2

**a)** De lijnen  $px + (p + 1)y = 0$ , en  $(p + 2)x + (p + 3)y = 10$ , zijn voor elke waarde van  $p$  snijdend.

$$px + (p + 1)y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{p}{p+1}x,$$

en

$$(p + 2)x + (p + 3)y = 10 \Leftrightarrow y = -\frac{p+2}{p+3}x + \frac{10}{p+3} >$$

De richtingscoëfficiënten zijn ongelijk:  $-\frac{p}{p+1} \neq -\frac{p+2}{p+3} \Leftrightarrow p^2 + 3p \neq p^2 + 3p + 2$ .

De lijnen snijden elkaar.

We bekijken twee waarden van  $p$  die aandacht vragen:

$-p = -1 \Rightarrow px + (p + 1)y = 0 \Leftrightarrow -x = 0$ , en  $(p + 2)x + (p + 3)y = 10 \Leftrightarrow x + 2y = 10$ . De lijnen snijden elkaar in het punt (0,5).

$-p = -3 \Rightarrow px + (p + 1)y = 0 \Leftrightarrow -3x - 2y = 0$ , en  $(p + 2)x + (p + 3)y = 10 \Leftrightarrow -x = 10$ . De lijnen snijden elkaar in het punt (10,15).

**b)** De waarden van  $p$  waarvoor de lijnen  $px + (p + 2)y = 0$ , en  $(p + 2)x + (p + 3)y = 10$ , evenwijdig zijn?

$$-px + (p + 2)y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{p}{p+2}, (p \neq -2).$$

Als  $p = -2$ , dan vinden we met beide vergelijkingen:  $-2x = 0$  en  $y = 10$ . De lijnen snijden in het punt (0,10) en zijn niet evenwijdig.

$$-(p + 2)x + (p + 3)y = 10 \Leftrightarrow y = -\frac{p+2}{p+3}x + \frac{10}{p+3}, (p \neq 3).$$

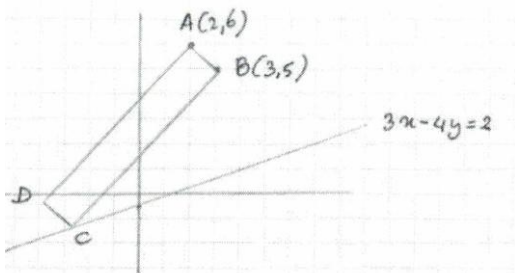
Als  $p = -3$ , dan vinden we met beide vergelijkingen:  $-3x - y = 0$  en  $-x = 10$ . De lijnen snijden elkaar dan in het punt (-10,30), en zijn niet evenwijdig.

Beide lijnen zijn evenwijdig wanneer de richtingscoëfficiënten aan elkaar gelijk zijn:

$$-\frac{p}{p+2} = -\frac{p+2}{p+3} \Leftrightarrow p^2 + 3p = p^2 + 4p + 4 \Leftrightarrow p = -4.$$

**Opgave 2** van Hoofdstuk 1, § 2.3

Van de rechthoek  $ABCD$  zijn gegeven de punten  $A(2,6)$ ,  $B(3,5)$  en het hoekpunt  $C$  ligt op de lijn  $3x - 4y = 2$ . De coördinaten van het hoekpunt  $D$ ? Zie onderstaande Figuur.



Het hoekpunt  $C$  ligt op de lijn  $3x - 4y = 2 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \Rightarrow$  richtingscoëfficiënt( $rc$ ) is  $\frac{3}{4}$ .

De lijn door de punten  $\{A(2,6), B(3,5)\}$ :  $rc_{AB} = \frac{5-6}{3-2} = -1$ .

Het gaat om een rechthoek. Dus  $BC \perp AB$ . De lijn  $BC$  heeft dus  $rc_{BC} = 1$ . De vergelijking van de lijn  $BC$  ligt daarmee vast:  $y - y_0 = m(x - x_0)$ . De richtingscoëfficiënt is bekend en het punt  $(x_0, y_0) \rightarrow (3, 5)$ .

De vergelijking van de lijn  $BC$ :  $y - 5 = 1 \cdot (x - 3) \Leftrightarrow y = x + 2$ .

We hebben het stelsel  $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$ , en  $y = x + 2$ , Twee onafhankelijke vergelijkingen met twee onbekenden.

Hiervan kunnen we de oplossing bepalen. Herschrijven we het stelsel als volgt:  $3x - 4y = 2$ , en  $x - y = -2$ . de oplossing hiervan is:  $y = -8, x = -10$ .

Hieruit zie je direct dat de bovenstaande figuur niet op schaal is getekend. Dat kun je ook zien aan de  $rc$ 's.

Je kunt de coördinaten van  $D$  op verschillende manieren bepalen:

-  $CD \parallel AB$  en de  $CD = AB$ :  $y_A = y_B + 1$ , en  $x_A = x_B - 1 \Rightarrow y_D = y_C + 1$ , en  $x_D = x_C - 1$ .

De coördinaten van  $D$ :  $(-10 - 1, -8 + 1) = (-11, -7)$ .

- De vergelijking van  $CD$  opstellen: de  $rc_{CD} = -1$  en het punt  $C$  is bekend. Daarmee dus ook de lijn  $CD$ :  $y + 10 = -(x + 8) \Leftrightarrow y = -x - 18$ .

De lijn  $AD$  is ook bekend: de  $rc_{AD} = 1$  en het punt  $A(2,6) \Rightarrow y = x + 4$ . We hebben weer een stelsel van vergelijkingen:  $y = -x - 18$  en  $y = x + 4$ . Deze vergelijkingen met twee onbekenden zijn onafhankelijk. De oplossing is:  $(-11, -7)$ , de coördinaten van  $D$ .

#### Opgave 4 van Hoofdstuk 1, paragraaf 2.3:

Van een rechthoekige driehoek  $ABC$  zijn de hoekpunten  $A(1,4)$ ,  $B(3,10)$  en  $C$  ligt op de  $y$ -as.

**a)** Bereken de coördinaten van  $C$  als de rechte hoek in  $A$  zit.

$$rc_{AB} = \frac{10-4}{3-1} = 3.$$

$AC$  staat loodrecht ( $\perp$ ) op  $AB \rightarrow rc_{AB} \cdot rc_{AC} = -1 \rightarrow 3 \cdot rc_{AC} = -1 \rightarrow rc_{AC} = -\frac{1}{3}$ .

De vergelijking voor de lijn  $AC$ :  $y - y_0 = rc_{AC} \cdot (x - x_0) \rightarrow y - 4 = -\frac{1}{3} \cdot (x - 1) \rightarrow y = -\frac{1}{3}x + 4\frac{1}{3}$ .

De coördinaten van het punt  $C$  de  $y$ -as:

$$y = -\frac{1}{3}x + 4\frac{1}{3} : x = 0 \rightarrow y = 4\frac{1}{3} \rightarrow (0, 4\frac{1}{3}).$$

**b)** Stel, de rechte hoek zit in punt  $C(0, c)$ . Druk de richtingscoëfficiënt van  $(CA)$  en van  $(CB)$  uit in  $c$  en bereken  $c$ .

De lijn door  $A$  en  $C$ :  $rc_{AC} = \frac{4-c}{1-0} = 4 - c$ .

De lijn door  $B$  en  $C$ :  $rc_{BC} = \frac{10-c}{3-0} = \frac{10-c}{3}$ .

Verder weet je:  $AC \perp AB \rightarrow (4 - c) \cdot \frac{10-c}{3} = -1 \rightarrow c^2 - 14c + 43 = 0$ .

Een kwadratische vergelijking in  $c$ :  $c^2 - 14c + (\frac{14}{2})^2 - 49 + 43 = 0 \rightarrow (c - 7)^2 = 6 \rightarrow c = 7 \pm \sqrt{6}$ .

Opmerking: de kwadratische vergelijking kan ook worden opgelost met de  $abc$ -formule met uiteraard hetzelfde resultaat.

#### Opgave 5 van Hoofdstuk 1, § 2.3

Van de driehoek  $ABC$  zijn de hoekpunten gegeven:  $A(3,2)$ ,  $B(5,0)$ ,  $C(11,6)$ .

De vergelijkingen van de middelloodlijn van  $AB$  en van  $AC$ ?

- De coördinaten van het midden van  $AB$ :  $\left(\frac{x_1+x_0}{2}, \frac{y_1+y_0}{2}\right) \Rightarrow \left(\frac{3+5}{2}, \frac{2+0}{2}\right) \Leftrightarrow (4,1)$ .
- De richtingscoëfficiënt(rc) van  $AB$ :  $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} \Rightarrow \frac{2-0}{3-5} = -1$ .

We hebben nu de ingrediënten voor de middelloodlijn van  $AB$ : de rc is 1 en de coördinaten van een punt op die lijn (4,1). De vergelijking  $y - 1 = 1 \cdot (x - 4) \rightarrow y = x - 3$ .

- De coördinaten van het midden van  $AC$ :  $\left(\frac{x_1+x_0}{2}, \frac{y_1+y_0}{2}\right) \Rightarrow \left(\frac{3+11}{2}, \frac{2+6}{2}\right) \Leftrightarrow (7,4)$ .
- De richtingscoëfficiënt(rc) van  $AC$ :  $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} \Rightarrow \frac{6-2}{11-3} = \frac{1}{2}$ .

De middelloodlijn van  $AB$ : de rc is  $-2$  en de coördinaten van een punt op die lijn (7,4). De vergelijking  $y - 4 = -2 \cdot (x - 7) \rightarrow y = -2x + 18$ .

**b) Het snijpunt van de middelloodlijnen?**

We hebben het volgende stelsel van vergelijkingen:

$$\begin{aligned} y &= x - 3, \\ y &= -2x + 18. \end{aligned}$$

Trek de vergelijkingen van elkaar af  $\Rightarrow 0 = 3x - 21 \Leftrightarrow x = 7 \therefore y = 4$ .

De coördinaten van het snijpunt: (7,4).

**c) Controle:** (7,4) ligt ook op de middelloodlijn van  $BC$ ?

- De coördinaten van het midden van  $BC$ :  $\left(\frac{x_1+x_0}{2}, \frac{y_1+y_0}{2}\right) \Rightarrow \left(\frac{11+5}{2}, \frac{6+0}{2}\right) \Leftrightarrow (8,3)$ .
- De richtingscoëfficiënt(rc) van  $BC$ :  $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} \Rightarrow \frac{6-0}{11-5} = 1$ .

De middelloodlijn van  $BC$ : de rc is  $-1$  en de coördinaten van een punt op die lijn (8,3). De vergelijking  $y - 3 = -1 \cdot (x - 8) \rightarrow y = -x + 11$ .

Substitutie van (7,4) in  $y = -x + 11$ , laat zien dat de coördinaten (7,4), het snijpunt van de middelloodlijnen van  $AB$  en  $AC$  ook op de middelloodlijn van  $BC$  ligt.

- Oefenen  
Maken  
De opgaven van paragraaf 2.1; 2.2 en 2.3

#### Blok 4 Les 3 Nog meer over lijnen

Deze les sluit aan bij de paragrafen 2.4 en 2.6 van de Analytische meetkunde van de Wageningse methode

- De afstand tussen  $O$  (de oorsprong) en een lijn  $k$ .

Opp  $OPQ = \frac{1}{2}p \cdot q = \frac{1}{2}PQ \cdot r$   
dus

$$PQ \cdot r = p \cdot q$$

en

$$r = \frac{p \cdot q}{PQ} = \frac{p \cdot q}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

$p$  en  $q$  zijn lengtes, dus neem  $|p|$  en  $|q|$   
ingeval  $p$  of  $q$  negatief zijn.

$$r = \frac{|p| \cdot |q|}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

Opmerking:  $|p| = p$  als  $p > 0$  en  $|p| = -p$  als  $p < 0$

De lijn  $k$  snijdt de  $y$ -as in punt  $Q$  en de  $x$ -as in punt  $P$ . De hoogtelijn snijdt de lijn  $k$  in het punt  $R$ . De afstand  $OR$  noemen we  $r$ .

Let op: hiermee is het begrip afstand gedefinieerd: de loodlijn vanuit  $O$  op  $k$ .  
Met de definitie van het oppervlak van een driehoek kan je nu  $r$  bepalen. De driehoek  $QPO$  is een rechthoekige driehoek. We kunnen dan twee vergelijkingen opstellen voor het oppervlak van de driehoek  $QPO$ .

In woorden: het oppervlak van een driehoek is gelijk aan "basis vermenigvuldigd met de halve hoogte". In formule:  $\text{Opp} = \frac{1}{2} PQ \cdot r$ .

De andere uitdrukking voor het oppervlak van een rechthoekige driehoek is:  $\frac{1}{2} OQ \cdot OP$ . We stellen  $OQ = q$  en  $OP = p$ , de zijden bij de rechte hoek van de rechthoekige driehoek in bovenstaande tekening.

Dan hebben we  $\frac{1}{2} PQ \cdot r = \frac{1}{2} p \cdot q$ . Met Pythagoras wordt dit

$$r = \frac{p \cdot q}{PQ} = \frac{p \cdot q}{\sqrt{p^2 + q^2}},$$

$p$  en  $q$  zijn lengtes dus als  $p$  en/of  $q$  negatief zijn, geldt voor  $r = \frac{|p| \cdot |q|}{\sqrt{p^2 + q^2}}$ .

Let op:  $|p| = p$  als  $p > 0$  en  $|p| = -p$  als  $p < 0$ .

Opmerking: stel dat je even de formule voor het oppervlak van een driehoek vergeten bent, hoe vind je  $r$  dan? Wel, de hoogtelijn  $r$  verdeelt de rechthoekige driehoek  $QPO$  in twee congruente rechthoekige driehoeken  $QRO$  en  $PRO$ . Deze zijn beide weer congruent met de rechthoekige driehoek  $QPO$ . Dat betekent voor de verhouding van de lijnstukken:  $\frac{r}{q} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}$ .

$$\text{Ergo: } r = \frac{|p| \cdot |q|}{\sqrt{p^2 + q^2}}.$$

Overigens is het nog handig om de lijn  $k$  in een vergelijking uit te drukken. Dat kunnen we op twee verschillende manieren doen: met behulp van de richtingscoëfficiënt en de gegeven punten  $Q$  en  $P$  of uitgaande van de algemene vergelijking voor een rechte lijn. We kiezen voor de laatste, als

$$k: ax + by = c.$$

Deze lijn snijdt de  $y$ -as,  $x = 0$ , in  $y = \frac{c}{b} = q$  en

de lijn snijdt  $x$ -as,  $y = 0$  in  $x = \frac{c}{a} = p$ .

De afstand van de oorsprong  $O$  naar de lijn  $k$ ,

$$d(O, k) = \frac{|p| \cdot |q|}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{|\frac{c}{a}| \cdot |\frac{c}{b}|}{\sqrt{(\frac{c}{a})^2 + (\frac{c}{b})^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

We hebben gebruik gemaakt van  $\sqrt{c^2} = |c|$ .

Voorbeeld:

$$k \text{ is: } 3x - 4y = 24$$

Snijpunt met  $x$ -as:  $3p = 24$ ;  $p = 8$

Snijpunt met  $y$ -as:  $-4q = 24 \rightarrow q = -6$

$$r = \frac{|8| \cdot |-6|}{\sqrt{64 + 36}} = \frac{48}{10} = 4.8.$$

- De afstand tussen twee evenwijdige lijnen:

$k$  is:  $ax + by = c$  en  $l$  is:  $ax + by = d$

**Situatie 1a:**  $c > d > 0$

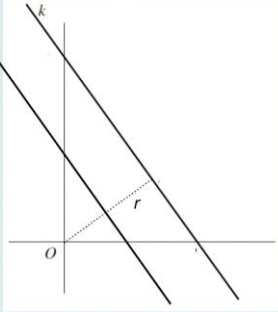
De lijnen liggen aan dezelfde kant van  $O$ .

$$r = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{c - d}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**Situatie 1b:**  $d > c > 0$

$$r = \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{d - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Opmerking:  $d - c = -(c - d) = |c - d|$



Je maakt gebruik van de uitdrukking voor de afstand van de oorsprong tot een lijn:

voor lijn  $k$ :  $\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  en voor lijn  $l$ :  $\frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

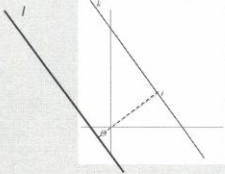
Het is handig om na te gaan hoe deze lijnen ten opzichte van elkaar liggen. Dat vind je door  $x = 0$  te stellen.  $k$  snijdt de  $y$ -as in  $y = \frac{c}{b}$  en  $l$  snijdt de  $y$ -as in  $y = \frac{d}{b}$ .

$O$  ligt tussen beide lijnen.

**Situatie 2a:**  $c > 0 > d$

$$r = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{c - d}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**Situatie 2b:**  $d > 0 > c$

$$r = \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{d - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$


Je hebt verschillende situaties die echter alle tot dezelfde uitdrukking leiden namelijk:

de afstand  $d(k, l)$  tussen de lijnen  $l$  en  $k$ :

$$d(k, l) = \frac{|c - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

De verschillende situaties zijn:

$c > d > 0$ :  $|c| - |d| = c - d = |c - d|$ , (1a),

$d > c > 0$ :  $|d| - |c| = d - c = -(c - d) = |c - d|$ , (1b),

$c > 0 > d$ :  $|c| + |d| = c - d = |c - d|$ , (2a),

$d > 0 > c$ :  $|d| + |c| = d - c = |c - d|$  en (2b),

$0 > c > d$ :  $|c| - |d| = -(c - d) = |c - d|$ , situatie 3, gelijk aan (1a).

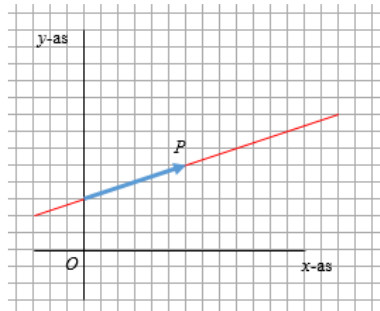
- De afstand tussen een punt en lijn:

$k$  is:  $ax + by = c$  en  $P(p, q)$ .

Maak gebruik van het resultaat van de  $\parallel$  lijnen. Dus een lijn evenwijdig aan  $k$  door het punt  $P(p, q)$  is  $ax + by = d$ . Het gaat erom  $d$  te bepalen. Substitueer  $(p, q)$  in deze vergelijking:  $ax + by = d = ap + bq$ .

Daarmee vinden we voor  $d(P, k) = \frac{|ap + bq - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

- Parametervoorstelling van een lijn; parameter  $t$ .



Een punt  $P$  beweegt zich in een assenstelsel. We willen de baan van het bewegende punt weten.

Op tijdstip  $t = 0$  bevindt zich punt  $P$  op plaats  $(0, 3)$ .

Elke seconde, of wat voor een tijdseenheid dan ook, verschuift  $P$  3 eenheden naar rechts en 1 eenheid naar boven.

Voor de coördinaten van  $P$  geldt:

$$x = 3 \cdot t \text{ en } y = t + 3$$

$$\text{Samengevat: } (x, y) = (3t, t + 3).$$

Dit is een parametervoorstelling van een lijn.

Door de parameter  $t$  elimineren krijg je de vergelijking van de lijn:

$$t + 3 = y \text{ dus } x = 3(y - 3) = 3y - 9,$$

$$y = \frac{1}{3}x + 3.$$

### Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven.

#### Opgave 4 van Hoofdstuk 1, § 2.4

$ax + by = 10$  en  $ax + by = 33$  zijn evenwijdige lijnen ( $a$  en  $b$  zijn niet beide gelijk aan 0).

a) De afstand tussen beide lijnen.

De formule:

$$r = \frac{|d-c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow r = \frac{|33-10|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{23}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

In woorden: de afstand tussen de lijnen  $ax + by = 33$  en  $ax + by = 10$  is gelijk aan de afstand van de oorsprong  $O$  van het assenstelsel tot de lijn  $ax + by = 33$  minus de afstand van  $O$  tot de lijn  $ax + by = 10$ .

b) De afstand tussen de lijnen  $ax + by = 10$  en  $ax + by = -33$ .

In woorden: de afstand tussen de lijnen  $ax + by = 33$  en  $ax + by = 10$  is gelijk aan de afstand van de oorsprong  $O$  van het assenstelsel tot de lijn  $ax + by = 33$  plus de afstand van  $O$  tot de lijn  $ax + by = 10$ .

$$r = \frac{|d-c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow r = \frac{|-33|+|10|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{43}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

c) De afstand tussen de lijnen  $ax + by = 10$  en  $ax + by = 33$ . Daarbij zijn verschillende gevallen te onderscheiden die allemaal tot dezelfde formule leiden. Zie de samenvatting op de voorgaande pagina 123 over *De afstand tussen twee evenwijdige lijnen*.

De formule is hierboven onder a) gegeven.

Een uitgebreide toelichting voor de 6 mogelijkheden:

1°  $c > 0$ ,  $d > 0$  en  $c < d$ : de afstand tussen de lijnen  $ax + by = c$  en  $ax + by = d$  is gelijk aan de afstand van  $O$  tot de lijn  $ax + by = d$  min de afstand van  $O$  tot de lijn  $ax + by = c$ :

$$\frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{d - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ want } c - d < 0$$

2°  $c > 0$ ,  $d > 0$  en  $c > d$ : de afstand tussen de lijnen  $ax + by = c$  en  $ax + by = d$  is gelijk aan de afstand van  $O$  tot de lijn  $ax + by = c$  min de afstand van  $O$  tot de lijn  $ax + by = d$ :

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{c - d}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ want } c - d > 0$$

3°  $c > 0$ ,  $d < 0$ : de afstand tussen de lijnen  $ax + by = c$  en  $ax + by = d$  is gelijk aan de afstand van  $O$  tot de lijn  $ax + by = c$  plus de afstand van  $O$  tot de lijn  $ax + by = d$ :

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{c - d}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ want } c - d > 0$$

4°  $c < 0$ ,  $d > 0$ : de afstand tussen de lijnen  $ax + by = c$  en  $ax + by = d$  is gelijk aan de afstand van  $O$  tot de lijn  $ax + by = c$  plus de afstand van  $O$  tot de lijn  $ax + by = d$ :

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{-c + d}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{d - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ want } c - d < 0$$

5°  $c < 0$ ,  $d < 0$  en  $c < d$ : de afstand tussen de lijnen  $ax + by = c$  en  $ax + by = d$  is gelijk aan de afstand van  $O$  tot de lijn  $ax + by = c$  min de afstand van  $O$  tot de lijn  $ax + by = d$ :

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{-c - d}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{-c + d}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ want } c - d < 0$$

6°  $c < 0$ ,  $d < 0$  en  $c > d$ : de afstand tussen de lijnen  $ax + by = c$  en  $ax + by = d$  is gelijk aan de afstand van  $O$  tot de lijn  $ax + by = d$  min de afstand van  $O$  tot de lijn  $ax + by = c$ :

$$\frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{-d - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{-d + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ want } c - d > 0$$

#### Opgave 5 van Hoofdstuk 1, paragraaf 2.4:

Stel een vergelijking op van de midden parallel van de evenwijdige lijnen  $3x + 4y = -8$ , en  $3x + 4y = 12$ . De midden parallel is de lijn die op gelijke afstanden, midden tussen de twee gegeven lijnen loopt.

De oorsprong ligt tussen de beide gegeven lijnen: situatie 2a of situatie 2b.

$$\text{De afstand } r = \frac{|c - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-8 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{5} = 4.$$

Omdat de midden parallel evenwijdig loopt aan beide gegeven lijnen, heeft de vergelijking van de midden parallel de vorm  $3x + 4y = f$  en geldt tevens  $-8 < f < 12$ .

De afstand van de midden parallel tot de lijn  $3x + 4y = -8$ , is gelijk aan de helft van  $r = 4 \rightarrow$

$$2 = \frac{|-8 - f|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \rightarrow$$

$\rightarrow f + 8 = \pm 10$ . Dus  $f = 2$  of  $f = -18$ . Gelet op de voorwaarde  $-8 < f < 12$ , voldoet alleen  $f = 2$ . De gevraagde vergelijking is:  $3x + 4y = 2$ .

#### Opgave 6 van Hoofdstuk 1, § 2.4

De vergelijkingen van lijnen die een afstand 2 hebben tot de lijn  $3x + 4y = -8$ .

de lijnen die een afstand 2 hebben tot de lijn  $3x + 4y = -8$ , lopen evenwijdig aan deze lijn. De

vergelijking van deze lijnen zijn van de vorm  $3x + 4y = c$ .

Nota bene: de richtingscoëfficiënt is  $-\frac{3}{4}$ .

De afstand tussen de lijnen  $3x + 4y = -8$ , en  $3x + 4y = c$ , is gelijk aan 2:

$$\frac{|-8-c|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{|-8-c|}{5} = 2 \Leftrightarrow c + 8 = \pm 10 \Leftrightarrow c + 8 = 10 \text{ of } c + 8 = -10 \Leftrightarrow c = 2 \text{ of } c = -18.$$

Dus:

$$-3x + 4y = 2,$$

$$-3x + 4y = -18.$$

#### Opgave 7 van Hoofdstuk 1, § 2.4

Vergelijkingen van de beide lijnen door het punt  $(6,0)$  die een afstand 3 hebben tot de oorsprong.

De algemene vergelijking voor de lijnen:  $ax + by = c$ .

Als deze lijnen door het punt  $(6,0)$  gaan, geldt  $a \cdot 6 = c$ .

De afstand van de lijnen tot de oorsprong:

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|6a|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 3 \Leftrightarrow |2a| = \sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow 4a^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow b^2 = 3a^2 \Leftrightarrow b = \pm a\sqrt{3},$$

met  $a \neq 0$ , want als  $a = 0$  wordt de vergelijking van de lijn:  $by = c = 6a = 0$ . Dus  $b = 0$ , maar dit kan niet, want dan wordt  $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{0}$ . Of  $y = 0$ , en dat kan ook niet. Er wordt niet voldaan aan de eis dat de lijn een afstand 3 tot de oorsprong van het assenstelsel moet hebben.

De vergelijking van beide lijnen:  $ax \pm a\sqrt{3}y = 6a \Leftrightarrow x \pm \sqrt{3}y = 6$ .

#### Opgave 8 van hoofdstuk 1, § 2.4

Gegeven de punten  $P(1,0)$  en  $Q(3,2)$ . De punten  $P$  en  $Q$  hebben gelijke afstanden tot een lijn  $l$  met de vergelijking  $x + y = a$ .

$a$ ?

Als de punten  $P$  en  $Q$  gelijke afstanden hebben tot de lijn  $l$ , ligt het voor de hand om aan te nemen dat de lijn  $l$  door het midden van lijnstuk  $PQ$  gaat. Dit midden heeft de coördinaten:

$$\left[ \frac{1}{2}(1+3), \frac{1}{2}(0+2) \right] = (2,1).$$

$x + y = a$  is de lijn die door dit punt gaat. Dus  $2 + 1 = a \Rightarrow a = 3$ .

Opmerking: de lijn evenwijdig aan de lijn door de punten  $P$  en  $Q$  ligt ook op gelijke afstanden van  $P$  en  $Q$ !

#### Opgave 1 van Hoofdstuk 1, § 2.6. Parametervoorstelling van een lijn.

De plaats van een bewegend punt op tijdstip  $t$  wordt gegeven door:  $x = 3t + 2, y = 4t + 3$ . Hierbij neemt  $t$  alle reële getallen aan tussen  $-2,1$ .  $\{t \in \mathbb{R} | -2 \leq t \leq 1\}$ .

a) De vergelijking voor de baan van het punt.

We gaan  $t$  elimineren.

$$x = 3t + 2 \Leftrightarrow 3t = x - 2 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}.$$

Substitueer  $t = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$  in  $y = 4t + 3 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} + 3 = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$ . De vergelijking van een rechte lijn.

Het punt beweegt van  $t = -2(-4, -5)$  naar  $t = 1(5, 7)$ .

b) We veranderen de parametervoorstelling:  $x = -6t + 2, y = -8t + 3$  met  $\{t \in \mathbb{R} | -2 \leq t \leq 1\}$ .

De veranderingen aan de baan van het punt.

$$x = -6t + 2 \Leftrightarrow 6t = -x + 2 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}.$$

Substitueer  $t = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}$  in  $y = -8t + 3 \Rightarrow y = \frac{8}{6}x - \frac{8}{3} + 3 = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$ . De vergelijking van een rechte

lijn. Het punt beweegt van  $t = -2(14, 19)$  naar  $t = 1(-4, -5)$ . Het punt beweegt in tegengestelde richting, tegengesteld van de richting onder a). Vergelijk de coördinaten van a) en b) en je ziet dat de af te leggen weg onder b) 2 keer zolang is als de weg onder a). Dus het punt beweegt 2 keer zo snel onder b)

maar in tegengestelde richting en langs de zelfde lijn:  $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$ . Dat de snelheid twee keer zo groot is zie

je direct door in de parametervoorstelling van de lijn  $t$  te vervangen door  $-2t$ . Je vindt dan de parametervoorstelling van b).

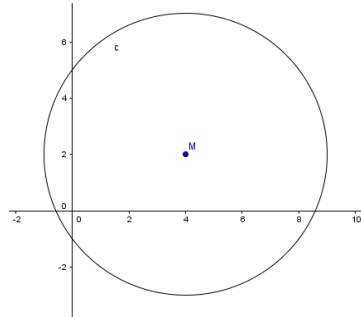
- Oefenen

De opgaven van paragraaf 2.4 en 2.6

#### Blok 4 Les 4 Kwadratische vergelijkingen.

Deze les sluit aan bij de paragraaf 3.1 van de Analytische meetkunde van de Wageningse methode.

- De vergelijking van een cirkel.



De cirkel is een gesloten gladde kromme. De punten van de kromme liggen op gelijke afstand  $r$ , de straal, van een bepaald punt: het middelpunt  $M$ .

In les 1 van dit Blok hebben we de afstand tussen twee punten uitgerekend:

De afstand tussen  $P$  en  $Q$ :

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}.$$

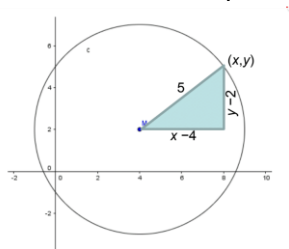
Nu nemen we voor het punt op de cirkel  $x_Q = x$  en  $y_Q = y$ . Verder  $d(P, Q) = r$ ,  $x_P = a$  en  $y_P = b$ .

De cirkel met middelpunt  $M(a, b)$  heeft als vergelijking:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \text{ Dit wordt de standaard vorm van de cirkel genoemd.}$$

Voorbeeld:

Cirkel met middelpunt  $M(2, 4)$  en straal 5.



Volgens de stelling van Pythagoras is de bijbehorende vergelijking:

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 5^2.$$

Snijpunten met de  $y$ -as:  $x = 0 \rightarrow 16 + (y - 2)^2 = 25 \rightarrow y - 2 = 3$

of

$$y - 2 = -3 \rightarrow y = 5 \text{ of } y = -1.$$

De snijpunten zijn:  $(0, 5)$  en  $(0, -1)$ .

- De standaard vergelijking van een cirkel

- Standaardvorm:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Voorbeeld:

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$$

- Zonder haakjes, haakjes wegwerken:

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = 25 \rightarrow x^2 - 8x + y^2 - 4y = 5$$

Gegeven:  $x^2 - 8x + y^2 - 4y = 5$

Hoe vind je hierbij de standaardvorm terug?

Maak kwadraten:  $x^2 - 2 \cdot 4x + 4^2 + y^2 - 2 \cdot 2y + 2^2 = 5 + 4^2 + 2^2 \rightarrow$

$$\rightarrow (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 5^2.$$

Met kwadraat afsplitsen kunnen we de standard vorm van een cirkelvergelijking weer terugvinden.

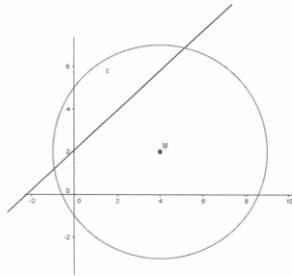
**Opgave 2** van Hoofdstuk 1 § 3.1

De vergelijking  $x^2 + 4x + y^2 - 6y = 4$ .

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y = 4 \Leftrightarrow (x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) - 4 - 9 = 4.$$

Herschrijven geeft de gezochte vergelijking:  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 17$ .

- Cirkel en lijn.



Cirkel:  $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$

lijn:  $y = x + 2$

Twee snijpunten van cirkel en lijn. Snijpunten voldoen aan beide vergelijkingen.

Vervang  $y$  in de cirkelvergelijking door  $x + 2$ :

$$(x - 4)^2 + (x + 2 - 2)^2 = 5^2 \rightarrow 2x^2 - 8x = 9$$

Oplossing:

$$2x^2 - 8x = 9 \rightarrow x^2 - 4x = \frac{9}{2} \rightarrow x^2 - 4x + 4 = \frac{9}{2} + 4 \rightarrow (x - 2)^2 = \frac{17}{2}.$$

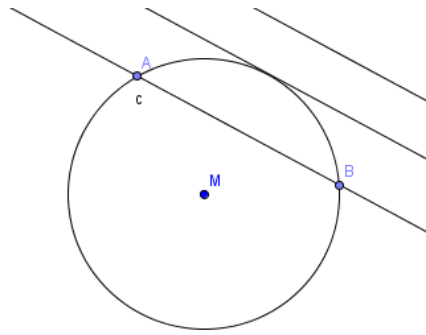
$$x = 2 \pm \sqrt{\frac{17}{2}}.$$

De snijpunten zijn: (4.9; 6.9) en (-0.9; 1.9).

Voor een cirkel en een lijn zijn er drie mogelijkheden:

- twee snijpunten
- één snijpunt = raakpunt
- geen snijpunt

Zie onderstaande Figuur.



#### Stelling

Bij twee snijpunten Q en R is de hoek tussen de lijn en de straal naar Q of R kleiner dan  $90^\circ$ .

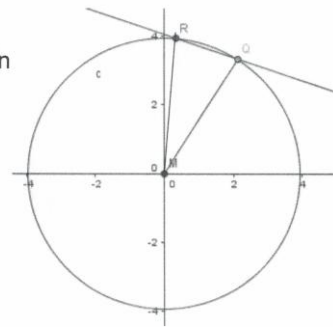
#### Bewijs

Driehoek QMR is gelijkbenig.

De hoeken bij Q en R zijn gelijk.

Die zijn samen minder dan  $180^\circ$ .

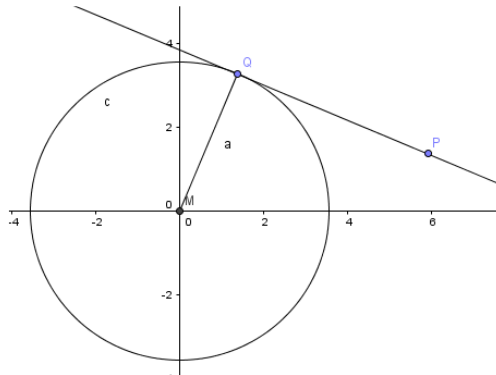
Dus hoek MQR is kleiner dan  $90^\circ$ .



#### Gevolg

Als de hoek tussen de lijn en de straal  $90^\circ$  is, dan is de lijn een raaklijn. Dit is de sleutel tot het vinden van de raaklijnen.

- De raaklijn aan een cirkel.



- Voor het gemak en het is niet wezenlijk nemen we het middelpunt van de cirkel in de oorsprong van het assenstelsel.

#### Gegeven

- De cirkel:  $x^2 + y^2 = a^2$ ,
- Een punt  $P(p, q)$  buiten de cirkel en
- Een punt  $Q(x, y)$  op de cirkel.
- Kies  $Q$  zodat  $MQ \perp PQ$ .
- De richtingscoëfficiënt ( $rc$ ) van de straal,  $MQ$ , is  $\frac{y}{x}$ .

De rc van de raaklijn door  $P(p, q)$  en  $Q(x, y)$ ,  $PQ$ , is:  $\frac{y-q}{x-p}$ .

De raaklijn en de straal staan loodrecht op elkaar:

$$\frac{y}{x} \cdot \frac{y-q}{x-p} = -1.$$

Uitwerken geeft:

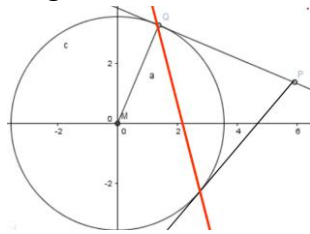
$$px + qy = x^2 + y^2.$$

Het punt  $Q(x, y)$  voldoet aan  $px + qy = x^2 + y^2 = a^2$ .

$Q(x, y)$  ligt op de cirkel, dus  $Q(x, y)$  is het raakpunt en voldoet aan

$$px + qy = a^2.$$

Dit is de vergelijking van beide raakpunten. Zoals in onderstaande figuur is te zien, zijn er twee raaklijnen aan de cirkel vanuit  $P$ . Dat moet dus ook uit de vergelijkingen volgen.



Substitutie van  $y = -\frac{px}{q} + \frac{a^2}{q}$  in de vergelijking van de cirkel geeft een kwadratische vergelijking voor  $x$ . Zo vinden we twee waarden voor  $x$ .

$$\text{Met } y = -\frac{px}{q} + \frac{a^2}{q},$$

vinden we ook de twee waarden van  $y$ . Het resultaat is dat we de coördinaten van de twee raakpunten hebben. Dat betekent: er zijn twee raaklijnen. Met de algemene vergelijking voor een lijn wanneer er twee punten  $P$  en  $Q$  bekend zijn, kunnen we de vergelijkingen voor beide raaklijnen opstellen:

$$y - y_P = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} (x - x_P).$$

Waarbij:  $P(p, q)$  en de coördinaten van  $Q$  liggen op de cirkel.

Voorbeeld:

$$\text{- cirkel } x^2 + y^2 = 20$$

- Punt  $P(6,2)$  buiten de cirkel

- Bepaal de raakpunten van de raaklijn door  $P$  aan de cirkel

De raakpunten vanuit  $P$  liggen op de lijn  $6x + 2y = 20 \rightarrow y = 10x - 3$ . Vul deze waarde van  $y$  in de vergelijking van de gegeven cirkel:

$$x^2 + (10x - 3)^2 = 20 \rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow (x - 4)(x - 2) = 0 \rightarrow x = 2 \text{ of } x = 4 \rightarrow \text{Raakpunten: } (2, 4) \text{ en } (2, -4).$$

Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven.

**Opgave 1** van Hoofdstuk 1, § 3.1

De vergelijking van de cirkel. We gebruiken de standaardvorm van een cirkel met middelpunt  $M(a, b)$  en straal  $r$ :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

**a)** Gegeven het middelpunt  $(-2, 1)$  en straal 3.

De vergelijking:  $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$ .

**b)** Gegeven het middelpunt (1,3) en de cirkel gaat door het punt (2,5).

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = r^2 \Rightarrow (2 - 1)^2 + (5 - 3)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 5.$$

De vergelijking:  $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$ .

**c)** De cirkel gaat door de punten  $(-2,0)$ ,  $(4,0)$ ,  $(6,2)$ . Hiermee kunnen we dus 3 vergelijkingen maken:

$$- (-2 - a)^2 + (0 - b)^2 = r^2 \Leftrightarrow (2 + a)^2 + b^2 = r^2,$$

$$- (4 - a)^2 + (0 - b)^2 = r^2 \Leftrightarrow (4 - a)^2 + b^2 = r^2,$$

$$- (6 - a)^2 + (2 - b)^2 = r^2.$$

3 vergelijkingen en 3 onbekenden.

$$[(2 + a)^2 + b^2 = r^2] - [(4 - a)^2 + b^2 = r^2] \Leftrightarrow a^2 + 4a + 4 - (16 - 8a + a^2) = 0 \Leftrightarrow 12a - 12 = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

$a = 1$  substitueren we in  $(4 - a)^2 + b^2 = r^2$ , en  $(6 - a)^2 + (2 - b)^2 = r^2$ :

$$- (4 - 1)^2 + b^2 = r^2 \Leftrightarrow 9 + b^2 = r^2,$$

$$- (6 - 1)^2 + (2 - b)^2 = r^2 \Leftrightarrow 25 + 4 - 4b + b^2 = r^2 \Leftrightarrow 29 - 4b + b^2 = r^2.$$

$$[9 + b^2 = r^2] - [29 - 4b + b^2 = r^2] \Leftrightarrow -20 + 4b = 0 \Leftrightarrow b = 5.$$

$$b = 5 \text{ substitueren we in } 9 + b^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 9 + 25 = 34.$$

We hebben nu de 3 onbekenden:  $a = 1, b = 5, r^2 = 34$ .

De vergelijking van de cirkel:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 34.$$

**d)** De cirkel gaat door de punten  $(-3, -1)$ ,  $(3, -1)$ ,  $(0, 4)$ . Hiermee kunnen we weer 3 vergelijkingen maken:

$$- (-3 - a)^2 + (-1 - b)^2 = r^2 \Leftrightarrow (3 + a)^2 + (1 + b)^2 = r^2,$$

$$- (3 - a)^2 + (-1 - b)^2 = r^2 \Leftrightarrow (3 - a)^2 + (1 + b)^2 = r^2,$$

$$- (0 - a)^2 + (4 - b)^2 = r^2 \Leftrightarrow a^2 + (4 - b)^2 = r^2.$$

3 vergelijkingen en 3 onbekenden.

$$[(3 + a)^2 + (1 + b)^2 = r^2] - [(3 - a)^2 + (1 + b)^2 = r^2] \Leftrightarrow a^2 + 4a + 4 - (9 - 6a + a^2) = 0 \Leftrightarrow 12a = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

$a = 0$  substitueren we in  $(3 - a)^2 + (1 + b)^2 = r^2$ , en  $a^2 + (4 - b)^2 = r^2$ :

$$- (3 - a)^2 + (1 + b)^2 = r^2 \Leftrightarrow 9 + (b + 1)^2 = r^2 \Leftrightarrow b^2 + 2b + 10 = r^2,$$

$$- a^2 + (4 - b)^2 = r^2 \Leftrightarrow b^2 - 8b + 16 = r^2.$$

$$[b^2 + 2b + 10 = r^2] - [b^2 - 8b + 16 = r^2] \Leftrightarrow 10b - 6 \Leftrightarrow b = 0.6.$$

$$b = 0.6 \text{ substitueren we in } 9 + b^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = (3.4)^2 = 11.56.$$

We hebben nu de 3 onbekenden:  $a = 0, b = 0.6, r^2 = 11.56$ .

De vergelijking van de cirkel:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + (y - 0.6)^2 = 11.56.$$

### Opgave 3 van Hoofdstuk 1, § 3.1

De standaard vergelijking van de cirkel  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ .

Middelpunt en straal van de cirkels behorende bij de volgende vergelijkingen.

**a)**  $x^2 + 2x + y^2 + 2y = 5 \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) - 1 - 1 = 5 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 7.$

Het middelpunt is  $(-1, -1)$  en de straal is  $\sqrt{7}$ .

**b)**  $x^2 - x + y^2 + 6y = 11 \Leftrightarrow (x^2 - x + \frac{1}{4}) + (y^2 + 6y + 9) - \frac{1}{4} - 9 = 11 \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 + (y + 3)^2 = \frac{81}{4}.$

Het middelpunt is  $(\frac{1}{2}, -3)$  en de straal is  $\frac{9}{2}$ .

**c)**  $(x + 2)^2 + y^2 = 2x + 2y + 6 \Leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 - 2y = 2 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 - 1 - 1 = 2 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4.$

Het middelpunt is  $(-1, 1)$  en de straal is 2.

**d)**  $(x + y)^2 = (2x + 2) \cdot (y + 1) \Leftrightarrow (x + y)^2 = 2xy + 2x + 2y + 2 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 2xy + 2x + 2y + 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 2y = 2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 1 - 1 = 2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4.$

Het middelpunt is  $(1, 1)$  en de straal is 2.

**Opgave 5 van Hoofdstuk 1, § 3.1**

Snijpunten van een cirkel en een lijn.

a) Cirkel:  $x^2 + y^2 = 17$ . Lijn:  $3x + 5y = 17$ .

$$3x + 5y = 17 \Leftrightarrow 5y = -3x + 17 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{5}x + \frac{17}{5}.$$

Substitutie van  $y = -\frac{3}{5}x + \frac{17}{5}$ , in  $x^2 + y^2 = 17$ :

$$x^2 + \left(-\frac{3}{5}x + \frac{17}{5}\right)^2 = 17 \Leftrightarrow x^2 + \frac{9}{25}x^2 - \frac{102}{25}x + \frac{289}{25} = 17 \Leftrightarrow \frac{34}{25}x^2 - \frac{102}{25}x + \frac{289}{25} = 17 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 34x^2 - 102x + 289 = 425 \Leftrightarrow 34x^2 - 102x - 136 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x + 1) = 0.$$

Dus:  $x = 4$ , en  $x = -1$ . Substitueer deze waarden in  $3x + 5y = 17$ :  $x = 4, y = 1$  en  $x = -1, y = 4$ .

Je kan natuurlijk ook de waarden in de vergelijking van de cirkel substitueren. Maar het gebruik van een lineaire vergelijking is altijd eenvoudiger.

De snijpunten zijn:  $(4,1)$  en  $(-1,4)$ .

b) Cirkel:  $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 10$ . Lijn:  $y = 3x - 2$ .

Substitutie  $y = 3x - 2$ , in  $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 10$ :

$$(x + 3)^2 + (3x - 2 + 1)^2 = 10 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + 9x^2 - 6x + 1 = 10 \Leftrightarrow 10x^2 + 10 = 10 \Leftrightarrow x^2 = 0.$$

Dus  $x = 0$ . Substitueer deze waarde in  $y = 3x - 2 \Rightarrow y = -2$ .

Het snijpunt is:  $(0, -2)$ .

Nota Bene: een bijzonder snijpunt. Eén snijpunt is een raakpunt.

c) Cirkel:  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$ . Lijn:  $y = x + 1$ .

$$\text{Substitutie } y = x + 1, \text{ in } (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + (x - 2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + x^2 - 4x + 4 = 5 \Leftrightarrow 2x^2 = -3.$$

Er is geen oplossing voor  $x$ , dus de cirkel en de lijn hebben geen snijpunt.

**Opgave 6 van Hoofdstuk 1, § 3.1**

In de vorige opgave hebben we het aantal mogelijke snijpunten van een cirkel en een lijn onderzocht. Het aantal snijpunten kun je ook vinden door de afstand tussen middelpunt en lijn te berekenen en deze afstand te vergelijken met de straal van de cirkel. We gebruiken de methode van de afstand om de drie voorbeelden van de vorige opgave te controleren.

De algemene formule, zoals die afgeleid is in de voorgaande theorie, van een punt tot een lijn is:

$$d(P, k) = \frac{|ap+bq-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}, \text{ waarbij het punt } P \text{ de coördinaten } (p, q) \text{ heeft en de lijn } k \text{ wordt voorgesteld door}$$

$$ax + by = c.$$

Als de afstand kleiner is dan de straal, hebben we twee snijpunten. Als de afstand gelijk is aan de straal hebben we één snijpunt: een raakpunt. Als de afstand groter is dan de straal hebben we geen snijpunten.

a) Cirkel:  $x^2 + y^2 = 17$ . Lijn:  $3x + 5y = 17$ .

De cirkel heeft  $(0,0)$  als middelpunt en een straal gelijk aan  $\sqrt{17}$ .

De afstand van het middelpunt  $(0,0)$  tot de lijn  $3x + 5y = 17$ :

$$d(P, k) = \frac{|ap+bq-c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 - 17|}{\sqrt{3^2+5^2}} = \frac{|-17|}{\sqrt{34}} = \frac{17}{\sqrt{34}} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}} < \sqrt{17}.$$

De afstand  $d(P, k)$  is kleiner dan de straal van de cirkel, dus er zijn twee snijpunten.

b) Cirkel:  $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 10$ . Lijn:  $y = 3x - 2$ .

De cirkel heeft  $(-3, -1)$  als middelpunt en een straal gelijk aan  $\sqrt{10}$ .

De afstand van het middelpunt  $(-3, -1)$  tot de lijn  $y = 3x - 2 \Leftrightarrow 3x - y = 2$ :

$$d(P, k) = \frac{|ap+bq-c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|3 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-1) - 2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}.$$

De afstand  $d(P, k)$  is gelijk aan de straal van de cirkel. Er is één snijpunt.

c) Cirkel:  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$ . Lijn:  $y = x + 1$ .

De cirkel heeft  $(-2,3)$  als middelpunt en een straal gelijk aan  $\sqrt{5}$ .

De afstand van het middelpunt  $(-2,3)$  tot de lijn  $y = x + 1 \Leftrightarrow x - y = -1$ :

$$d(P, k) = \frac{|ap+bq-c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 - (-1)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \sqrt{8} > \sqrt{5}.$$

De afstand  $d(P, k)$  is groter dan de straal van de cirkel. Er zijn geen snijpunten.  
 Het resultaat van a), b) en c) is gelijk aan wat we gevonden hebben onder opgave 5.

**Opgave 7** van Hoofdstuk 1, paragraaf 3.1:

Gegeven is de cirkel met vergelijking  $x^2 + y^2 = 20$  en het punt  $P(6,2)$ , dat buiten de cirkel ligt. Neem het punt  $Q(x, y)$  op de cirkel en vind de voorwaarden onder welke de lijn  $PQ$  de cirkel raakt. In dit vraagstuk is gekozen voor een cirkel met als middelpunt de oorsprong van het assenstelsel. Deze keuze maakt het rekenwerk eenvoudiger. Zie onderstaande opmerking.

**a)** Druk de richtingscoëfficiënt van straal  $MQ$  uit in  $x$  en  $y$ .

De richtingscoëfficiënt van straal  $MQ$ , tussen de punten  $M = (0,0)$  en  $Q = (x, y)$ , is gelijk aan  $\frac{y-0}{x-0} = \frac{y}{x}$ .

**b)** Druk de richtingscoëfficiënt van straal  $PQ$  uit in  $x$  en  $y$ .

De richtingscoëfficiënt van het lijnstuk  $PQ$ , tussen de punten  $P = (6,2)$  en  $Q = (x, y)$ , is gelijk aan  $\frac{y-2}{x-6}$ .

**c)** Ga na dat  $MQ \perp PQ$ , precies dan als  $x^2 + y^2 = 6x + 2y$

$MQ \perp PQ$ , als het product van hun richtingscoëfficiënten gelijk is aan  $-1$ .

Dus,  $\frac{y}{x} \cdot \frac{y-2}{x-6} = -1 \Leftrightarrow y^2 - 2y = -x^2 + 6x \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 6x + 2y$ .

Combinatie van  $x^2 + y^2 = 6x + 2y$  en de cirkel vergelijking  $x^2 + y^2 = 20$  geeft  $6x + 2y = 20$ . Blijkbaar liggen de raakpunten vanuit  $P(6,2)$  op de lijn met de vergelijking  $6x + 2y = 20 \Leftrightarrow 3x + y = 10$ .

**d)** Bereken de twee raakpunten van de lijnen door  $P(6,2)$  aan de cirkel.

$3x + y = 10 \Leftrightarrow y = -3x + 10$ . Substitueer  $y = -3x + 10$ , in  $x^2 + y^2 = 20 \rightarrow x^2 + (-3x + 10)^2 = 20 \Leftrightarrow x^2 + 9x^2 - 60x + 100 = 20 \Leftrightarrow 10x^2 - 60x + 80 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 0$ .

De twee waarden voor  $x$ : 2 en 4.

De  $y$ -coördinaten van de snijpunten van de cirkel en de lijn  $y = -3x + 10$ , volgen uit substitutie van de waarden voor  $x$ : 2 en 4. Het resultaat:  $y = 10 - 6 = 4$ , en  $y = 10 - 12 = -2$ . De snijpunten zijn:  $(2,4)$  en  $(4,-2)$ .

**e)** Stel de vergelijking op van beide raaklijnen.

De vergelijking van beide raaklijnen door  $P(6,2)$  en  $(2,4)$ , en door  $P(6,2)$  en  $(4,-2)$ , wordt gevonden door gebruik te maken van de formule:  $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$ .

Met  $P(6,2) \rightarrow P(x_0, y_0)$  en  $Q(2,4) \rightarrow Q(x_1, y_1)$ :

$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \Leftrightarrow y - 2 = \frac{4-2}{2-6}(x - 6) \Leftrightarrow y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 6) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 5$ .

Met  $P(6,2) \rightarrow P(x_0, y_0)$  en  $Q(4,-2) \rightarrow Q(x_1, y_1)$ :

$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \Leftrightarrow y = 2x - 10$ .

**Opgave 8** van Hoofdstuk 1, § 3.1

Een cirkel met vergelijking  $x^2 + y^2 = 200$ , en het punt  $P(15,5)$ .

**a)** De raakpunten van de raaklijnen door  $P$  aan de cirkel.

In de vorige opgave 7 zijn we een vergelijkbare vraagstelling tegengekomen.

Neem een punt  $Q(x, y)$  op de cirkel. Het middelpunt van de cirkel is  $M(0,0)$ .

De richtingscoëfficiënt(rc) van de straal  $MQ$ , is gelijk aan

$$rc = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-0}{x-0} = \frac{y}{x}$$

De rc van het lijnstuk  $PQ$  is gelijk aan:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-5}{x-15}$$

$MQ \perp PQ$ , dus het product van beide richtingscoëfficiënten is  $-1$ :

$$\frac{y}{x} \cdot \frac{y-5}{x-15} = -1 \Leftrightarrow \frac{y^2 - 5y}{x^2 - 15x} = -1 \Leftrightarrow y^2 - 5y = -x^2 + 15x \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 15x + 5y$$

Met de vergelijking van de cirkel  $x^2 + y^2 = 200$  en  $x^2 + y^2 = 15x + 5y$ , vinden we

$$15x + 5y = 200 \Leftrightarrow 3x + y = 40 \Leftrightarrow y = -3x + 40$$

De raakpunten vanuit  $P$  liggen op de lijn  $y = -3x + 40$ .

Cirkel:  $x^2 + y^2 = 200$ . Lijn:  $y = -3x + 40$ .

Substitueer  $y = -3x + 40$ , in  $x^2 + y^2 = 200$ :

$$x^2 + (-3x + 40)^2 = 200 \Leftrightarrow x^2 + 9x^2 - 240x + 1600 = 200 \Leftrightarrow 10x^2 - 240x + 1400 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 24 + 140 = 0 \Leftrightarrow (x - 10)(x - 14).$$

Resultaat:  $x = 10$  of  $x = 14$ .

De y-coördinaten van de snijpunten(raakpunten) met de cirkel.

Substitueer  $x = 10$  en  $x = 14$ , in  $y = -3x + 40 \Rightarrow y = -3 \cdot 10 + 40 = 10$  en  $y = -3 \cdot 14 + 40 = -2$ . De raakpunten zijn:  $(10, 10)$  en  $(14, -2)$ .

**b)** De vergelijking van de raaklijnen.

Voor de vergelijking van de raaklijnen maken we gebruik van

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0).$$

- de vergelijking door de punten  $P(15, 5)$  en  $(10, 10)$ .

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) \Rightarrow y - 5 = \frac{10 - 5}{10 - 15} (x - 15) = -x + 15 \Leftrightarrow y = -x + 20.$$

- de vergelijking door de punten  $P(15, 5)$  en  $(14, -2)$ .

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) \Rightarrow y - 5 = \frac{-2 - 5}{14 - 15} (x - 15) = 7(x - 15) \Leftrightarrow y = 7x - 100$$

### Opmerking

In deze les 4 wordt de cirkel- voor het bepalen van de raaklijnen- met het middelpunt in de oorsprong van het assenstelsel gekozen. Dat is handig, maar niet essentieel. Als de cirkel met de raaklijnen op een andere plek in het coördinatenstelsel zou liggen, is de analyse geheel overeenkomstig. De cirkel is translatie invariant. Het bewijs laten we hier achterwege. Een leuke oefening.

- Oefenen  
De opgaven van paragraaf 3.1 .

## Blok 4 Toets Analytical Geometry

### Opgave 1

Gegeven driehoek  $ABC$  met  $A(3, 1)$  en  $B(11, 3)$ . Hoekpunt  $C$  is onbekend.

**a)**  $d(A, B)$ .

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = 2\sqrt{17}.$$

**b)** Punt  $P$  is het midden van het lijnstuk  $AB$ .

De coördinaten van  $P$ .

$$P(x, y) = \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = (7, 2).$$

**c)** Gegeven  $M(5, 5)$  en  $M$  is het midden van lijnstuk  $AC$ .

De coördinaten van  $C$ .

$$M(5, 5) = \left( \frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2} \right) = \left( \frac{3 + x_C}{2}, \frac{1 + y_C}{2} \right).$$

$$\frac{3 + x_C}{2} = 5 \Rightarrow x_C = 7.$$

$$\frac{1 + y_C}{2} = 5 \Rightarrow y_C = 9.$$

Dus  $C(7, 9)$ .

**d)**  $N$  ligt op  $BC$  en  $MN$  is de midden parallel van  $\triangle ABC$ .

De vergelijking van de lijn door de punten  $A$  en  $N$ .

De midden parallel  $MN$  is evenwijdig met  $AB$  en is half zo lang als  $AB$ .

De handigste weg is om de coördinaten van  $N$  uit te rekenen.

$$N(x, y) = \left( \frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2} \right) = \left( \frac{7+11}{2}, \frac{9+3}{2} \right) = (9, 6).$$

De vergelijking voor  $AN$ :

$$(y - y_A) = \frac{y_N - y_A}{x_N - x_A} \cdot (x - x_A) \Rightarrow (y - 1) = \frac{6-1}{9-3} (x - 3) \Leftrightarrow y = \frac{5}{6}x - \frac{3}{2}.$$

e) De afstand  $d(C, AN)$ .

$$d(C, AN) = \frac{|ap+bq-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$$C(7, 9) \Rightarrow p = 7, q = 9.$$

$$\text{De lijn } AN \Rightarrow y = \frac{5}{6}x - \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{5}{6}x + y = -\frac{3}{2}, \Rightarrow a = -\frac{5}{6}, b = 1, c = -\frac{3}{2}.$$

$$d(C, AN) = \frac{|ap+bq-c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|-\frac{5}{6} \cdot 7 + 1 \cdot 9 - (-\frac{3}{2})|}{\sqrt{(\frac{5}{6})^2 + 1}} = \frac{28}{61} \sqrt{61}.$$

## Opgave 2

a)  $y^2 = x$ .

Of  $x = y^2 \Rightarrow$  een "horizontale" parabool met als symmetrie as de x-as. Bij twee waarden van y hoort één waarde van x.

b)  $y(2x - 1) = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$  de x-as, en  $x = \frac{1}{2} \Rightarrow$  een verticale lijn evenwijdig aan de y-as door het punt  $x = \frac{1}{2}$ .

## Opgave 3

Onderzoek of de kromme met de vergelijking  $3x^2 - y^2 + 2xy = 4$  puntsymmetrisch ten opzichte van  $(0, 0)$ .

Er is sprake van puntsymmetrie als het punt  $(-x, -y)$  dezelfde functie geeft. Dat is inderdaad het geval.

## Opgave 4

Een stelsel van twee vergelijkingen.

$$-2x - 3py = 40,$$

$$-5x + y = q^2.$$

a) Het stelsel is onafhankelijk?

$$\text{De richtingscoëfficiënt (rc) van } 2x - 3py = 40 \Rightarrow y = \frac{2}{3p}x - \frac{40}{3p}, (p \neq 0), \text{ rc is } \frac{2}{3p}.$$

$$\text{De rc van } 5x + y = q^2 \Rightarrow y = -5x + q^2.$$

$$\text{Het stelsel is onafhankelijk als } \frac{2}{3p} \neq -5 \Rightarrow p \neq -\frac{2}{15}.$$

b) Het stelsel is strijdig?

Strijdig: de lijnen van het stelsel zijn evenwijdig: er is geen oplossing.

$$\text{Als } p = -\frac{2}{15}, \text{ is het stelsel evenwijdig.}$$

Als bovendien  $q^2 = 100$ , vallen de lijnen van het stelsel samen: het stelsel is afhankelijk en er zijn oneindig veel oplossingen.

## Opgave 5

Gegeven de lijn  $l$  met vergelijking  $3x - 4y = 10$  en het punt  $P(2, -1)$ .

a) De vergelijking van de lijnen  $\perp l$ .

$$l \Rightarrow 3x - 4y = 10 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}.$$

$$\text{Een lijn } \perp l \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x - 10 \Rightarrow \text{de lijnen } \perp l \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x - c \Rightarrow c \text{ een constante.}$$

b) De vergelijking van de lijn door  $P(2, -1)$  en  $\perp l$ .

$$\text{De algemene vergelijking hebben we al } y = -\frac{4}{3}x - c.$$

We moeten  $c$  berekenen met de coördinaten van  $P(2, -1)$ :

$$-1 = -\frac{4}{3} \cdot 2 - c \Rightarrow c = \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{3} \Rightarrow 4x + 3y = 5.$$

## Opgave 6 (parameter representatie)

De plaats van een bewegend punt op tijdstip  $t$  wordt gegeven door  $x = 5t - 1$ , en  $y = 3t + 2$ . Hierbij neemt  $t$  alle

reële getallen aan van  $-3$  tot  $5$ .

De baan van de vergelijking van het bewegend punt?

$$\text{Met } x = 5t - 1 \Rightarrow t = \frac{x+1}{5} \Rightarrow y = 3\frac{x+1}{5} + 2 \Leftrightarrow y = \frac{3}{5}x + \frac{15}{5} \Leftrightarrow 5y - 3x = 15.$$

### Opgave 7

Middelpunt en straal van de cirkel met vergelijking  $x^2 + 6x + y^2 - 8y = -9$ .

$$x^2 + 6x + y^2 - 8y = -9 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 - 9 + y^2 - 8y + 16 - 16 = -9 \Leftrightarrow (x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 16.$$

Coördinaten middelpunt  $(-3, 4)$  en straal  $4$ .

### Opgave 8

De cirkel met vergelijking  $x^2 + y^2 = 10$ , en het punt  $P(2, 4)$ .

**a)** De raakpunten van de raaklijnen vanuit  $P$  aan de cirkel.

Punt op de cirkel  $(x, y)$ . Het middelpunt van de cirkel ligt in de oorsprong van het assenstelsel. De rc van de straal van de cirkel is  $\frac{y}{x}$ . De rc van de raaklijn gaat door  $(x, y)$  en  $P(2, 4)$ :  $\frac{y-4}{x-2}$ .

De raaklijn en de straal staan loodrecht op elkaar:  $\frac{y}{x} \cdot \frac{y-4}{x-2} = -1 \Leftrightarrow y^2 - 4y = -x^2 + 2x \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4y + 2x$ .

Voor  $(x, y)$  geldt  $x^2 + y^2 = 10 \Rightarrow 4y + 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5 - 2y$ .

Substitueer  $x = 5 - 2y$  in  $x^2 + y^2 = 10 \Rightarrow 25 - 20y + 4y^2 + y^2 = 10 \Leftrightarrow y^2 - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (y - 3)(y - 1) = 0 \Rightarrow y = 3, \text{ of } y = 1.$$

Substitueer deze waarden voor  $y$  in  $x = 5 - 2y \Rightarrow x = -1, \text{ of } x = 3$ .

De raakpunten zijn:  $(-1, 3)$  en  $(3, 1)$ .

**b)** De vergelijking van beide raaklijnen.

-  $P(2, 4)$  en  $(-1, 3)$ .

$$y - 4 = \frac{3-4}{-1-2}(x - 2) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}.$$

-  $P(2, 4)$  en  $(3, 1)$ .

$$y - 4 = \frac{1-4}{3-2}(x - 2) = -3(x - 2) = -3x + 6 \Leftrightarrow y = -3x + 10.$$

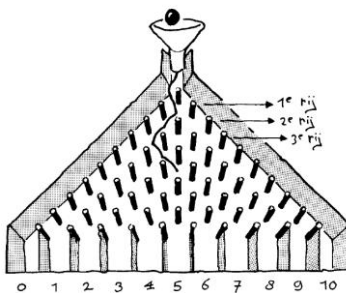
## Blok 5 De normale verdeling

Deze les sluit aan bij Hoofdstuk 2 Binomiale en Normale Verdeling, § 7 van de Wageningse methode.

### Blok 5 Les 1 De standaardafwijking

Het Bord van Galton

Herhaling van Blok 3 Les 2.



Hoeveel routes naar bakje 3(onderaan)?

$X$  is het nummer van het vakje waar het balletje in komt.

Het bord van Galton is een goede basis voor het begrip van de binomiaalverdeling.

Uitgangspunt: het balletje valt op een pen. De bak van Galton is eerlijk, dus het balletje

heeft een kans van 50% om naar links te vallen of 50% naar rechts. We noemen de kans naar links:  $p = 1/2$ .

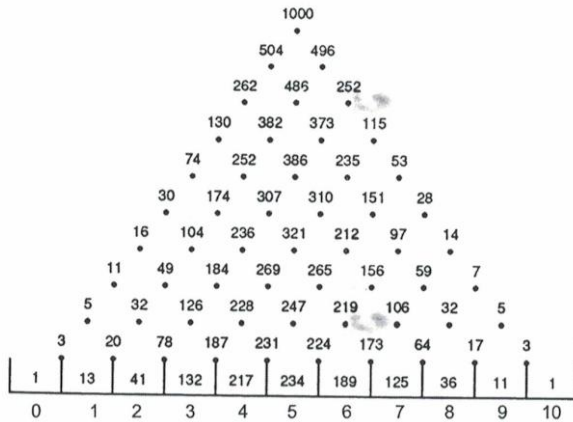
Hierboven is een bord van Galton afgebeeld met 10 rijen pennen, oplopend van 1 tot 10 pennen per rij.

We hebben hier dus een bord van Galton met op de onderste rij 10 pennen:  $n = 10$ .

Als het balletje valt kan het op  $n (= 10)$  manieren naar links of naar rechts gaan. Denk weer even aan het wegendigram. Je gaat van  $A \rightarrow B$  in  $n (= 10)$  stappen. Bij elke stap heb je de keuze om dat op 2 manieren te doen: bovenlangs of onderlangs, in termen van het wegendigram. Dus om van  $A \rightarrow B$  te gaan heb je  $2^{10} (= 2^n)$  mogelijkheden. Je kan alleen bovenlangs gekozen hebben. Dat kan op 1 manier. Dit kan je ook in een kans uitdrukken: gegeven het totaal aantal, de  $2^{10} (= 2^n)$  mogelijkheden, wordt de kans  $\frac{1 \text{ mogelijkheid}}{2^{10} \text{ mogelijkheden}} =$

$$1. (1/2)^{10} = \binom{10}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}.$$

### Opgave 2 van Hoofdstuk 2, § 7



Bovenstaand vind je een simulatie met het bord van Galton, waarbij 1000 keer een balletje valt.

**a)** De kans dat een balletje in bakje 3 komt?

In 132 van de 1000 keer kwam in deze simulatie het balletje in bak 3. De kans berekend uit dit experiment is:

$$\frac{132}{1000} = 0.132.$$

**b)** Bij een experiment met 1 balletje valt niet te voorspellen welke route het balletje zal volgen. Alle routes zijn namelijk even waarschijnlijk als onwaarschijnlijk.

De theoretische kans.

Het aantal mogelijkheden is, zoals we in bovenstaande theorie hebben geleerd:  $2^{10}$ .

Een balletje raakt 10 keer een pen en kan iedere keer naar links(L) of naar rechts(R) vallen. Alle balletjes die in bakje 3 aankomen gaan 3 keer naar rechts en 7 keer naar links.

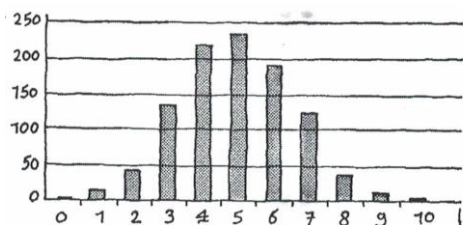
Van een dergelijk rijtje zijn er  $\binom{10}{3}$  verschillende. Er zijn dus  $\binom{10}{3} = 120$  routes naar bakje 3.

Een route naar bakje 3 wordt gekarakteriseerd door een rijtje van 10L- en R- en, waarvan 3 keer een R. Dat zijn rijtjes met 10 posities en voor iedere positie is er een keuze uit 2. Er zijn dus  $2^{10} = 1024$  mogelijkheden.

de theoretische kans dat een balletje in bakje 3 eindigt is dus:  $\frac{120}{1024} = 0.117$ .

Opmerking:

De bovenstaande simulatie kan ook in een histogram worden weergegeven:



We gaan weer naar het bord van Galton. Het balletje moet in het linker vakje ( $k = 0$ ) terecht komen. Dat kan maar op één manier: het balletje moet aan de linkerkant blijven.

De kans dat dit gebeurt, is (wegendiagram):  $1 \cdot (1/2)^{10} = \binom{10}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ .

Deze kans noemen we  $p_0$ . In wiskundige taal:  $P(X = k = 0)$ . Let op:  $X$  is de verzameling van alle  $k$ 's: de stochast.

Als het balletje in het tweede bakje van het bord terecht komt,  $k = 1$ , moet het balletje 1 keer naar rechts. En dat kan met  $n = 10$  op 10 verschillende manieren. Denk weer aan het wegendiagram. Het totale aantal mogelijkheden om te vallen is  $2^{10} (= 2^n)$

De kans dat het balletje in  $k = 1$  terecht komt is

$$\frac{10}{2^{10}} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = p_1 = P(X = k = 1).$$

Reminder:  $p_k \neq p$ .

$p_k$  is de kans dat het balletje in het vakje  $k$  terecht komt.  $p$  is de kans dat het balletje bij botsing met een pen naar links of naar rechts gaat.

$X = k$  is het nummer van het vakje waar het balletje in komt.

$X$  is binomiaal verdeeld:

In het algemeen is de binomiale verdeling met kans op succes  $p$  en kans op mislukking  $q = 1 - p$ :

$$P(X = k) = p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Bij  $n$  staafjes geldt:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n, \text{ want bij het bord van Galton is } p = 1/2, \text{ dus}$$

$$q = 1 - p = \frac{1}{2} \Rightarrow p^k q^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Bij een eerlijk Galtonbord geldt: het balletje valt op het staafje met een gelijke kans om naar links of naar rechts te gaan, dus  $p = q$ .

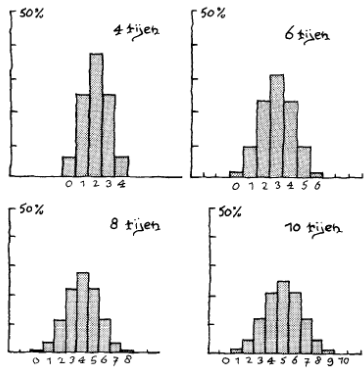
Verder geldt dat als we sommeren ( $\Sigma$ ) over alle bakjes, dus  $k = 0$  tot  $n$  dat de totale kans gelijk aan 1 moet zijn; het balletje komt altijd in één van de vakjes terecht.

In wiskundige taal:

$\sum_{k=0}^n p_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = 1$ . En dat klopt. Want er geldt ook, het binomium van Newton,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n = (p + 1 - p)^n = 1.$$

Wat gebeurt er als het aantal rijen, dus ook bakjes toeneemt?



Als het aantal rijen toeneemt wordt de spreiding groter.

Bij het bord van Galton wordt de spreiding groter als het aantal rijen toeneemt. De afwijking ten opzichte van het gemiddelde wordt groter.

- De staaf van het gemiddelde wordt lager.
- De staven aan weerszijden van het gemiddelde worden hoger, d.w.z. het verschil met het gemiddelde wordt kleiner. De afwijkingen ten opzichte van het gemiddelde worden groter.

- De verwachte absolute afwijking:  $Vaa(X)$ .

De kansverdeling van het bord van Galton met 6 rijen.

De verwachting  $E(X) = n \cdot p = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$ .

| $k$          | 0              | 1              | 2               | 3               | 4               | 5              | 6              |
|--------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|----------------|
| $P(X = k)$   | $\frac{1}{64}$ | $\frac{6}{64}$ | $\frac{15}{64}$ | $\frac{20}{64}$ | $\frac{15}{64}$ | $\frac{6}{64}$ | $\frac{1}{64}$ |
| $ k - E(X) $ | 3              | 2              | 1               | 0               | 1               | 2              | 3              |

In bovenstaande tabel wordt  $Vaa(X)$  toegelicht aan de hand van het bord van Galton met  $n = 6$ .

Definitie van  $Vaa(X) = \sum_{k=0}^n P(X = k) |k - E(X)|$ .

Voor bovenstaand experiment met 6 rijen:

$$Vaa(X) = \sum_{k=0}^n P(X = k) |k - E(X)| = \frac{1}{64} \cdot 3 + \frac{6}{64} \cdot 2 + \frac{15}{64} \cdot 1 + \frac{20}{64} \cdot 0 + \frac{15}{64} \cdot 1 + \frac{6}{64} \cdot 2 + \frac{1}{64} \cdot 3 = \frac{5}{7}.$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k P(X = k) = \sum_{k=0}^n k p_k.$$

Reminder:  $E(X) = np$ . Dus voor het bord van Galton met  $n = 6$ :  $E(X) = \frac{6}{2} = 3$ .

Afleiding verwachtingswaarde  $E(X)$ :

$$E(X) = \sum_{k=1}^n k P(k) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}. (k = 0 \text{ is niet relevant}).$$

Met  $\frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!}$ , wordt  $E(X)$ :

$$E(X) = np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k}. (k = 0 \text{ is niet relevant}).$$

Verder, substitueer  $k = s + 1$  en  $n - 1 = m$  in  $E(X)$ :

$$E(X) = np \sum_{s=0}^m \frac{m!}{s!(m-s)!} p^s q^{m-s} = np,$$

$$\text{met } \sum_{s=0}^m \frac{m!}{s!(m-s)!} p^s q^{m-s} = 1.$$

$$\text{Voor het bord van Galton met } n = 6: Vaa(X) = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^6 |k - 3| = \frac{5}{7}.$$

Als je bij  $Vaa(X)$  de absoluut haken vergeet en in plaats daarvan gewone haken gebruikt, vind je een triviaal antwoord:  $Vaa(X) = 0$ .

Het bewijs(algemeen):

$$\begin{aligned} Vaa(X) &= \sum_{k=0}^n P(X = k) (k - E(X)) = \sum_{k=0}^n p_k (k - E(X)) = \\ &= \sum_{k=0}^n k p_k - \sum_{k=0}^n p_k E(X) = E(X) - E(X) \sum_{k=0}^n p_k = E(X) - E(X) \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Het nadeel van  $Vaa(X)$ :  $Vaa(X + Y) \neq Vaa(X) + Vaa(Y)$ .

Daardoor wordt het rekenwerk lastig

De verwachte absolute afwijking wordt weinig gebruikt.

- De variantie:  $\text{Var}(X)$ .

De variantie  $\text{Var}(X)$  is een alternatief voor  $Vaa(X)$ . De variantie wordt weer toegelicht aan het voorbeeld van het bord van Galton met  $n = 6$ .

| $k$            | 0              | 1              | 2               | 3               | 4               | 5              | 6              |
|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|----------------|
| $P(X = k)$     | $\frac{1}{64}$ | $\frac{6}{64}$ | $\frac{15}{64}$ | $\frac{20}{64}$ | $\frac{15}{64}$ | $\frac{6}{64}$ | $\frac{1}{64}$ |
| $(k - E(X))^2$ | 9              | 4              | 1               | 0               | 4               | 2              | 9              |

Definitie van de Variantie:  $\text{Var}(X) = \sum_{k=0}^n P(X = k) (k - E(X))^2$ .

Dus voor het bord van Galton:  $\text{Var}(X) = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^6 (k - 3)^2 = \frac{3}{2}$ .

- De somregel.

Bij elke stochast  $X$  en  $Y$ :

De verwachtingswaarde:  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ .

Bij onafhankelijke stochasten  $X$  en  $Y$ :

De variantie:  $\text{VAR}(X + Y) = \text{VAR}(X) + \text{VAR}(Y)$ .

Aan de hand van vraagstuk 10 paragraaf 7 wordt aangetoond dat bovenstaande gelijkheid van de varianties juist is

- De standaard afwijking.

Voor een biologisch onderzoek is de grootste breedte ( $X$ ) in cm gemeten van 100 eikels van dezelfde eikenboom.

|                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $x(\text{cm})$ | 1,76 | 1,77 | 1,78 | 1,79 | 1,80 | 1,81 | 1,82 | 1,83 | 1,84 | 1,85 | 1,86 |
| Aantal         | 1    | 4    | 8    | 19   | 23   | 15   | 12   | 9    | 6    | 2    | 1    |

$$E(X) = 1,8055 \text{ cm}$$

$$\text{Var}(X) = 0,000399 \text{ cm}^2$$

Bij een bepaald experiment is het soms nodig om van de ene eenheid naar de andere over te gaan. Dus bijvoorbeeld van cm naar mm.

De verwachtingswaarde schaalt dan op dezelfde wijze als de eenheid. In dit geval wordt de verwachtingswaarde ook 10 keer zo groot, maar de variantie wordt 100 keer zo groot. Het is daarom handiger om met de standaarddeviatie te werken.

*Definitie van de standaarddeviatie  $Sd(X)$ :  $Sd(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$ .*

*$X$  is een stochast met waarden van  $x_0$  tot  $x_n$  en kansen  $p_0$  tot en met  $p_n$ .*

*De standaarddeviatie(standaardafwijking) is:*

$$Sd(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\sum_{k=0}^n p_k (x_k - E(X))^2}.$$

Met de somregel en twee onafhankelijke stochasten:

$$Sd(X + Y) = \sqrt{\text{Var}(X + Y)} = \sqrt{\text{Var}(X) + \text{Var}(Y)} \neq \sqrt{\text{Var}(X)} + \sqrt{\text{Var}(Y)} = Sd(X) + Sd(Y).$$

Dus:  $Sd(X + Y) \neq Sd(X) + Sd(Y)$ .

Er is wel een voorbeeld te bedenken waarvoor  $Sd(X + Y) = Sd(X) + Sd(Y)$ , nl als  $Y$  een constante is. Een triviaal voorbeeld. De variantie van een constante is nul. Een constante varieert niet. Hieruit volgt:  $Sd(Y) = 0$ .

Aanvulling variantie:

$$\text{Var}(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} (k - E(X))^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} [k^2 - 2knp + (np)^2].$$

$$- (np)^2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (np)^2 = (E(X))^2,$$

$$- 2np \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = -2npE(X) = -2(np)^2 = -2(E(X))^2,$$

$$- \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \frac{kn(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^n k \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k}.$$

Substitueer in de laatste term  $k = s + 1$ . Je krijgt dan

$$np \sum_{s=0}^{n-1} (s+1) \frac{(n-1)!}{s!(n-1-s)!} p^s q^{n-1-s}.$$

Gemakshalve stel je nu  $n - 1 = m$ . De som wordt:

$$np \sum_{s=0}^m (s+1) \frac{m!}{s!(m-s)!} p^s q^{m-s} = np \left( \sum_{s=0}^m s \frac{m!}{s!(m-s)!} p^s q^{m-s} + \sum_{s=0}^m \frac{m!}{s!(m-s)!} p^s q^{m-s} \right).$$

De eerste som heb je al uitgerekend:  $np(mp) = np(n-1)p$  en de tweede is  $np$ .

Totaal heb je voor de  $\text{Var}(X) = np(n-1)p + np - 2(np)^2 + (np)^2 = np(1-p)$ .

Aangezien  $\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = E(X^2)$  is tegelijkertijd bewezen dat:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - \mu^2.$$

- **Standaarddeviatie (Sd) en binomiale verdeling.**

$X$  is een binomiale verdeling met  $n$  onafhankelijke herhalingen, elk met succeskans  $p$ . Denk bijvoorbeeld aan het bord van Galton: binomiaal twee kanten naar rechts succes  $p$  naar links geen succes  $1 - p$ .

Voor deze verdeling geldt  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ,

waarbij  $X_i = 1$  als er succes is bij de  $i$ -de herhaling en  $X_i = 0$  als er geen succes is bij herhaling  $i$ . (Denk weer aan het bord van Galton).

De verwachtingswaarde van  $X_i$ , de definitie,

$$E(X_i) = p \cdot 1 + (1 - p) \cdot 0 = p,$$

dus voor  $n$  onafhankelijke experimenten hebben we, waarbij  $i$  loopt van 1 tot en met  $n$

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) = np.$$

Voor de variantie vind je, met de definitie:

$$\text{Var}(X_i) = (1 - p)(0 - p)^2 + p(1 - p)^2 = p(1 - p)(p + 1 - p) = p(1 - p).$$

En voor de totale variantie:

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_n) = n \cdot p(1 - p).$$

En de voor de standaarddeviatie:

$$\text{Sd}(X) = \sqrt{n \cdot p(1 - p)}.$$

### Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven.

**Opgave 8** van Hoofdstuk 2 § 7 Gehele getallen.

in een bak zitten zes kaartjes, elk met een geheel getal erop geschreven. We pakken aselekt een kaartje uit de bak. De stochast  $X$  is het getal dat op het kaartje staat. Gegeven is dat  $E(X) = 10$  en  $\text{Vaa}(X) = 1$ .

De getallen op de kaartjes?

Eén van de mogelijkheden is: 8, 9, 10, 10, 11, 12.

We zoeken 6 gehele getallen  $x, y, z, u, v, w$ . Het volgende van de getallen is bekend:

$$E(X) = 10 = \frac{u+v+w+x+y+z}{6} = 10 \Rightarrow u + v + w + x + y + z = 60. \text{ Of: } E(X) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 x_i.$$

$$\text{Vaa}(X) = 1 = \frac{1}{6} \cdot |x - 10| + \frac{1}{6} \cdot |y - 10| + \frac{1}{6} \cdot |z - 10| + \frac{1}{6} \cdot |u - 10| + \frac{1}{6} \cdot |v - 10| + \frac{1}{6} \cdot |w - 10| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x - 10| + |y - 10| + |z - 10| + |u - 10| + |v - 10| + |w - 10| = 6. \text{ Of: } \text{Vaa}(X) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 |x_i - 10|.$$

Dus  $x_i \neq 10$ , voor  $i = 1(1)6$ .

6 onbekenden en 2 vergelijkingen.

Eén van de mogelijkheden is gegeven: 8, 9, 10, 10, 11, 12. Uit dit gegeven kun je nog meer informatie verzamelen.

Gemiddeld zijn de getallen 10. Als één getal groter is dan 10, moet er ook een getal kleiner zijn, want anders komt het gemiddelde niet uit op 10. Uit de voorwaarde met de absolute waarden volgt dan dat de getallen die groter zijn dan 10, samen 3 groter dan 30, want dan zijn de andere 3 kleiner dan 30. De som van de absolute waarden is in dit geval gelijk aan 6. Een getal mag dus maximaal 3 groter zijn dan 10. Maar 1 of 2 groter mag natuurlijk ook. Dus proberen:

- 9, 9, 9, 11, 11, 11

- 8, 9, 10, 10, 10, 13

- 7, 10, 10, 10, 11, 12

- 7, 10, 10, 10, 10, 13.

**Opgave 12**, van Hoofdstuk 2, § 7

Er wordt geworpen met een aantal ( $n$ ) munten.  $X$  is het aantal kop.  $E(X)$  en  $\text{Vaa}(X)$  staan in onderstaande tabel voor  $n = 1(1)4$ .

a)  $E(X)$  vertoont een regelmaat.

$E(X)$  als functie van  $n$ ?

Een worp met een munt:  $p(X) = 1/2$ .

|                 |       |       |                |       |
|-----------------|-------|-------|----------------|-------|
| $n$             | 1     | 2     | 3              | 4     |
| $E(X)$          | $1/2$ | 1     | $1\frac{1}{2}$ | 2     |
| $Vaa(X)$        | $1/2$ | $1/2$ | $3/4$          | $3/4$ |
| $\sqrt{Vaa(X)}$ |       |       |                |       |

Uit de tabel kun je de conclusie trekken dat  $E(X) = n/2$ .

In Blok 3, Les 3 is afgeleid dat  $E(X) = n \cdot p \Rightarrow E(X) = \frac{1}{2} \cdot n$ .

b)  $Vaa(X)$  vertoont ook een regelmaat? Het zou voor  $n = 5$  bijvoorbeeld  $\frac{5}{4}$ , kunnen zijn.

De formule voor  $Vaa(X) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k |k - E(X)|$ .

Voor  $n = 5$ , vinden we voor  $E(X) = n \cdot p = \frac{5}{2}$ .

$p_k$ ? Het aantal mogelijkheden is  $2^n \Rightarrow$  een wegendigram. Het aantal keren kop kan op  $\binom{n}{k}$  manieren. Dus:

$$p_k = \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n} \Rightarrow Vaa(X) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k |k - E(X)| \Rightarrow Vaa(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n} \left| k - \frac{5}{2} \right| =$$

$$= \frac{1}{32} \cdot \frac{5}{2} + \frac{5}{32} \cdot \frac{3}{2} + \frac{10}{32} \cdot \frac{1}{2} + \frac{10}{32} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{32} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{32} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{16}.$$

c)  $Var(X)$  voor  $n = 1(1)4$ ?

$$Var(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n [k - E(X)]^2.$$

-  $n = 1$

$$Var(X) = \binom{1}{0} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \binom{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

-  $n = 2$

$$Var(X) = \binom{2}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (0 - 1)^2 + \binom{2}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (1 - 1)^2 + \binom{2}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (2 - 1)^2 = \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{4}.$$

-  $n = 3$

$$Var(X) = \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

-  $n = 3$

$$Var(X) = \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot (0 - 2)^2 + \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot (1 - 2)^2 + \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot (2 - 2)^2 + \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot (3 - 2)^2 +$$

$$+ \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot (4 - 2)^2 = 1 = 4 \cdot \frac{1}{4}.$$

d)  $Var(X)$  vertoont dus een regelmatig patroon:  $n \cdot \frac{1}{4}$ .

### Opgave 15 van Hoofdstuk 2, § 7

In een doos zitten zes briefjes. Op drie briefjes staat het getal 5, op twee briefjes staat 10 en op het laatste briefje staat 25. Iemand trekt aselekt en met terugleggen twee keer een briefje uit de doos.  $S$  is de som van de getrokken getallen.

a) Welke waarden kan de stochast  $S$  aannemen?

de briefjes zijn 5, 5, 5, 10, 10, 25. Twee keertrekken met terugleggen geeft de volgende sommen, de waarden voor de stochast  $S$ :

$5+5=10$ ,  $5+10=15$ ,  $5+25=30$ ,  $10+10=20$ ,  $10+25=35$ ,  $25+25=50$ .

b) Maak een tabel van de kansverdeling van  $S$ :

Er geldt bij 1 keer trekken:  $P(X=5)=1/2$ ,  $P(X=10)=1/3$ , en  $P(X=25)=1/6$ . De kans tabel:

|          |                                               |                                                       |                                               |                                                       |                                                       |                                                |
|----------|-----------------------------------------------|-------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| k        | 10                                            | 15                                                    | 20                                            | 30                                                    | 35                                                    | 50                                             |
| $P(S=k)$ | $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ | $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ | $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ | $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$ | $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ |

c) Bereken  $E(S)$  en  $Var(S)$ .

$$E(S) = \sum P(S = k) = 10 \cdot \frac{1}{4} + 15 \cdot \frac{1}{3} + 20 \cdot \frac{1}{9} + 30 \cdot \frac{1}{6} + 35 \cdot \frac{1}{9} + 50 \cdot \frac{1}{36} = 20.$$

$$Var(S) = \sum P(S = k) \cdot [k - E(S)]^2 = \frac{1}{4} \cdot (10 - 20)^2 + \dots + \frac{1}{36} \cdot (50 - 20)^2 = 100.$$

Opgave 16 (vervolg van bovenstaande opgave 15)

X is het getal op het eerste briefje, Y is het getal op het tweede briefje dat getrokken wordt  $\rightarrow X+Y=S$ .

d) Maak een tabel van de kansverdeling van Y

Y kan de waarden 5, 10, 25 aannemen.

|        |               |               |               |
|--------|---------------|---------------|---------------|
| k      | 5             | 10            | 25            |
| P(Y=k) | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ |

e) Bereken  $E(Y)$  en  $Var(Y)$ .

$$E(Y) = 5 \cdot \frac{1}{2} + 10 \cdot \frac{1}{3} + 25 \cdot \frac{1}{6} = 10.$$

$$Var(Y) = \frac{1}{2} \cdot (5 - 10)^2 + \frac{1}{3} \cdot (10 - 10)^2 + \frac{1}{6} \cdot (25 - 10)^2 = 50.$$

f) Hoe groot zijn  $E(X)$  en  $Var(X)$ ?

X kan de waarden 5, 10, 25 aannemen  $\rightarrow E(X) = E(Y) = 10, Var(X) = Var(Y) = 50$ .

g) Ga na dat  $E(S) = E(X) + E(Y)$ .

Zie c):  $E(S) = 20 \rightarrow E(S) = E(X) + E(Y)$ .

h) Is aan de voorwaarde "mits..." in de somregel voor de variantie voldaan?

Ga na dat  $Var(S) = Var(X) + Var(Y)$ .

Ja, aan de voorwaarde voor onafhankelijkheid is voldaan. Er wordt getrokken met terugleggen  $\rightarrow Var(S) = 100 = Var(X) + Var(Y)$ .

## Opgave 22 Hoofdstuk 2, § 7 De dobbelsteen

a) T is het totaal aantal ogen bij 100 worpen met een dobbelsteen.

-  $E(T)$ .

Herhaling het gemiddelde bij 1 worp: De kans op de uitkomst, X, van de worp van 1, 2, 3, 4, 5, of 6 is  $\frac{1}{6}$ .

$$\text{Dus } E(X) = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^6 i = 3.5.$$

$$\text{Dus } E(T) = E(\sum_{100} X) = 100 \cdot X = 100 \cdot 3.5 = 350.$$

-  $Var(T)$ .

$$\text{Herhaling variantie bij 1 worp: } Var(X) = \sum_{i=1}^6 p_i (i - E(X))^2 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 (i - 3.5)^2 = \frac{35}{12}.$$

$$Var(T) = 100 \cdot Var(X) = 100 \cdot \frac{35}{12} = \frac{875}{3}.$$

$$\text{- } Sd(T) = \sqrt{Var(T)} = \sqrt{\frac{875}{3}} \cong 17.$$

b) K is het aantal keren kop bij 100 worpen met een munt. Een binomiaal kans experiment:  $p = \frac{1}{2}, n = 100$ ,

-  $E(K)$ .

$$\text{Eén keer werpen } E(X) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}.$$

$$E(K) = n \cdot p = 50.$$

-  $Var(K)$ .

$$Var(X) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

$$Var(K) = 100 \cdot Var(X) = 100 \cdot \frac{1}{4} = 25.$$

$$\text{- } Sd(K) = \sqrt{Var(K)} = 5.$$

Het zo verkregen resultaat volgt ook rechtstreeks uit de formules:

$$Var(K) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 25.$$

$$Sd(K) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 5.$$

c) Een Galtonbord heeft 100 rijen pinnen. Op elke pin is de kans dat het balletje naar rechts springt o.r. De bakjes onderaan het Galtonbord zijn van links naar rechts genummerd 0 t/m 100. Nis het nummer van het bakje waarin het balletje terecht komt. Dit is een kansexperiment met  $n = 100$   $p = 0.3$ .

-  $E(N)$ .

$$E(N) = n \cdot p = 100 \cdot 0.3 = 30.$$

$$- \text{Var}(N) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 100 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 21.$$

$$- \text{Sd}(K) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{21}.$$

### Overzichtsvraag 1 Hoofdstuk 2 § 7

a) Van de stochast  $X$  zijn de kansen gegeven:

$$P(X = 0) = \frac{1}{3}, P(X = 1) = \frac{1}{2}, P(X = 3) = \frac{1}{6}.$$

$\text{Sd}(X)$ ?

Om  $\text{Sd}(X)$  te berekenen heb je  $E(X)$  en  $\text{Var}(X)$  nodig.

$$- E(X) = \sum k \cdot P(X = k) = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) + 3 \cdot P(X = 3) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{6} = 1.$$

$$- \text{Var}(X) = \sum P(X = k) \cdot [k - E(X)]^2 = \frac{1}{3} \cdot (0 - 1)^2 + \frac{1}{2} \cdot (1 - 1)^2 + \frac{1}{6} \cdot (3 - 1)^2 = 1.$$

$$- \text{Sd}(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = 1.$$

b) Van de stochast  $Y$  zijn de kansen gegeven:

$$P(Y = 0) = \frac{1}{3}, P(Y = 10) = \frac{1}{2}, P(Y = 30) = \frac{1}{6}.$$

$\text{Sd}(Y)$ ?

Als we de stochast on der a) bekijken zien we dat  $Y = 10 \cdot X$ . De kansverdelingen komen overeen. We kunnen daarom  $\text{Sd}(Y)$  met  $\text{Sd}(X)$  uitrekenen  $\Rightarrow \text{Sd}(Y) = \text{Sd}(10 \cdot X) = 10 \cdot \text{Sd}(X) \Rightarrow \text{Sd}(Y) = 10$ .

c) Van de stochast  $Z$  zijn de kansen gegeven:

$$P(Z = 10) = \frac{1}{3}, P(Z = 11) = \frac{1}{2}, P(Z = 13) = \frac{1}{6}.$$

$\text{Sd}(Z)$ ?

Hebben we nu wat aan  $\text{Sd}(X)$ ? We zien dat  $Z = X + W$ , met  $W = 10$ .

$$- E(W = 10) = \sum k \cdot P(W = 10) = \frac{1}{3} \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 10 + \frac{1}{6} \cdot 10 = 10.$$

$$- \text{Var}(W) = \sum P(W = 10) \cdot [10 - E(W = 10)]^2 = 0.$$

$$- \text{Sd}(W) = \sqrt{\text{Var}(W)} = 0.$$

$$\text{Sd}(Z) = \text{Sd}(W + X) = \sqrt{\text{Var}(W + X)} = \sqrt{\text{Var}(W) + \text{Var}(X)} = \sqrt{0 + 1} = 1.$$

### Overzichtsvraag 2 Hoofdstuk 2 § 7

Een binomiaal kansexperiment heeft 10 herhalingen:  $n = 10$ .  $X$  is het aantal successen en  $Y$  het aantal mislukkingen.  $\text{Sd}(X)$  is bekend.

a)  $\text{Sd}(Y)$ ?

Voor  $X$  en  $Y$  is  $n$  hetzelfde.

$\text{Var}(Y)$ : mislukkingen worden successen,  $(1 - p) \rightarrow p$ , en successen worden mislukkingen,  $p \rightarrow (1 - p)$ .

Dus:  $\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$ , en  $\text{Var}(Y) = n \cdot (1 - p) \cdot p \Rightarrow \text{Var}(X) = \text{Var}(Y) \Rightarrow \text{Sd}(Y) = \text{Sd}(X)$ .

b) Met het gegeven onder a),  $p$ ?

$$\begin{aligned} \text{Sd}(X) &= \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{10 \cdot p \cdot (1 - p)} \Rightarrow [\text{Sd}(X)]^2 = 10 \cdot p \cdot (1 - p) = 10p - 10p^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow p^2 - p + \frac{1}{10} \cdot [\text{Sd}(X)]^2 = 0 \Leftrightarrow \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} \cdot [\text{Sd}(X)]^2 = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{10} \cdot [\text{Sd}(X)]^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Anders geschreven: } p = \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{1 - \frac{2}{5} \cdot [\text{Sd}(X)]^2}).$$

$$\text{Met } 0 \leq 1 - \frac{2}{5} \cdot [\text{Sd}(X)]^2 \leq 1, \text{ en } 0 \leq p \leq 1.$$

$$1 \geq 1 - \frac{2}{5} \cdot [\text{Sd}(X)]^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \text{Sd}(X) \leq \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Oefenen

Maken:

De opgaven van paragraaf 7.

## Blok 5 Les 2 De klokvorm en de normale verdeling

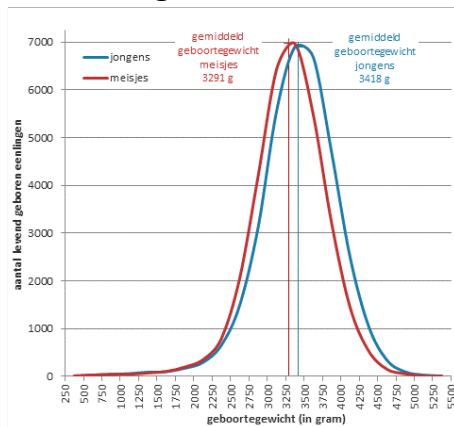
- Deze les sluit aan bij paragraaf 8 en 9 van Binomiale en normale verdelingen van de Wageningse methode.

De grafische rekenmachine (GR) wordt veel gebruikt in deze les.

Bij de uitleg van de grafische rekenmachine is aangesloten bij de Wageningse Methode.

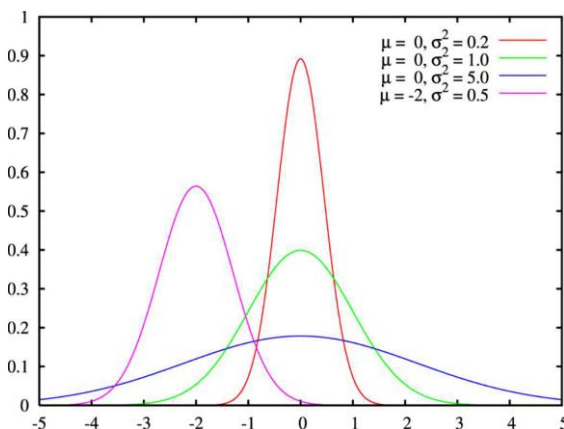
Bij de opgaven wordt uitgegaan van de TI-84 Plus.

- ### Geboortegewicht



De grafiek laat de verdeling zien van de geboortegewichten van Vlaamse kinderen in 2012. De beide grafieken zijn bijna zuiver klokvormig. Het gemiddelde valt bijna samen met de top. De grafieken zijn bijna symmetrisch.

- ### Zuivere klok vorm.



- De grafiek laat kansverdelingen zien met verschillende gemiddelden ( $\mu$ ) en spreidingen ( $\sigma$ ).

- De grafieken zijn symmetrisch rond het gemiddelde.

- De grafiek heeft twee buigpunten.

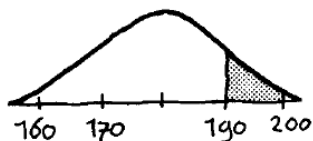
- *Standaardnormale verdeling:  $\mu = 0, \sigma = 1$ .*

*Hoe groter de afwijking van het gemiddelde, des te kleiner de kans.*

- *Zo'n kansverdeling heet een normale verdeling.*

- **Oppervlakte en kans**

**Opgave 7** van Hoofdstuk 2 §§ 8 en 9



De grafiek is een schets van de verdeling van de lengtes van 18-jarige jongens in Nederland.

Horizontaal zijn de lengtes in cm uitgezet. Verticaal staan de relatieve frequenties.

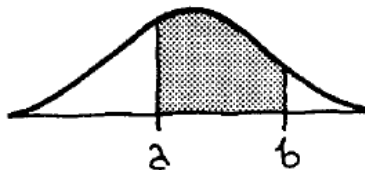
Langs de horizontale as staan de mogelijke uitkomsten van de lengtes.

Omdat de totale kans 1 is, wordt de oppervlakte onder de grafiek op 100% gesteld.

**a)** De oppervlakte van het gearceerde gebied in de bovenstaande figuur geeft de kans aan dat de lengte tussen 190 en 200 cm ligt. Het grijze oppervlak is ongeveer 20% van de totale oppervlakte van de grafiek.

**b)** Het percentage dat de lengte heeft tussen 170 en 180 cm.

De oppervlakte tussen 170 en 180 is gelijk aan de oppervlakte tussen 180 en 190. De lengte 180 ligt ongeveer in het midden van de grafiek. De oppervlakte rechts van 180 is dus circa 50 % van de oppervlakte. Tussen 190 en 200 is de oppervlakte 20%. Er resteert dus voor het oppervlak tussen 180 en 190, dus tussen 170 en 180, ongeveer 30%.



*Deze grafiek is een schets van de kansverdeling van de grootte  $X$ .*

*Horizontaal staan de mogelijke uitkomsten van  $X$ . Verticaal staan de kansen op een uitkomst.*

*De oppervlakte van het gebied tussen  $a$  en  $b$ , met  $b > a$ , is  $p$  in procenten. De totale oppervlakte onder de grafiek is 100%.*

*Dus  $p$  ligt tussen de 0 en 100%. We zijn gewend om met  $p$  tussen 0 en 1 te werken.*

*Dan geldt:  $P(a \leq X \leq b) = \frac{p}{100}$ .*

- **Gemiddelde en spreiding**

*Met de GR bereken je gemiddelde en spreiding*

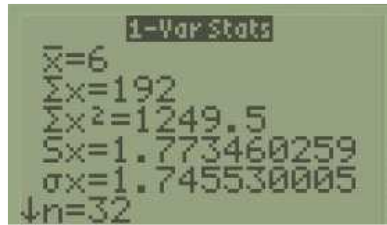
- STAT

- EDIT

*Vul L1(waarden) en L2(frequenties) in(Nb: Frequentie is het aantal keren dat een waarde voorkomt)*

- STAT

- CALC → 1



Gemiddelde en spreiding zijn we al eerder tegengekomen: verwachtingswaarde en standaarddeviatie.

Stel we hebben een totaal databestand van  $n$  data. Bijvoorbeeld alle cijfers van een toets. We delen deze cijfers in op de volgende wijze: Van 4 tot 4,5 noemen we  $x_1$ , enz. In het algemeen noemen we een groep(subset)  $x_i$ . Het aantal keren dat  $x_i$  voorkomt, de frequentie, noemen we  $f_i$ . We weten dat  $\sum_{i=1}^n f_i = n$ .

Hieruit volgt dat  $\frac{f_i}{n}$  is de kans dat het cijfer voor de toets in de groep  $x_i$  valt.

Het gemiddelde van de cijfers is alle cijfers opgeteld en gedeeld door  $n$ :

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{n} x_i.$$

Nu noemen we  $\frac{f_i}{n} = p_i$ .

Let op: er is geen sprake van één waarde van  $p$ . Het is geen binomiaal experiment!

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n p_i x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i x_i$$

Hier zien we de relatie met de verwachtingswaarde:

$$E(X = x_i) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i x_i = \bar{x}.$$

De standaarddeviatie vinden we:

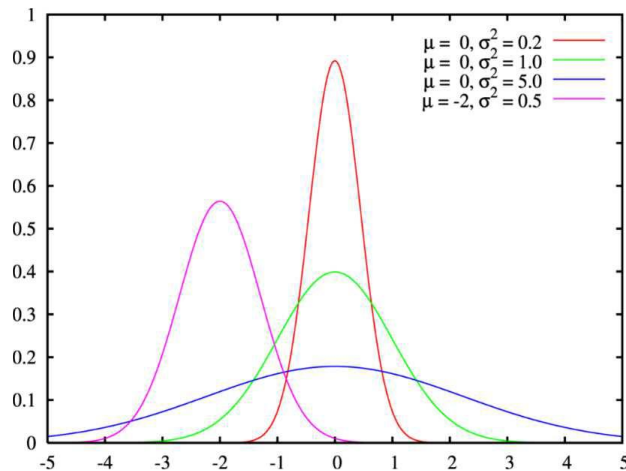
$$Sd(X) = \sqrt{Var(X)}$$

en

$$Var(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2.$$

Nota bene: in het boek op bladzijde 54 staat een fout: de factor  $1/n$  is vergeten.

- De normale verdeling
  - De grafieken zijn symmetrisch rond het gemiddelde  $\mu$ .
  - De totale oppervlakte onder de grafiek is 1.



- De grafiek heeft twee buigpunten.

- De standaard normale verdeling:  $\mu = 0, \sigma = 1$ , standaard betekent dat de verdeling gestandaardiseerd is.

- Formule standaard normale verdeling (bij benadering):  $y = 0.4 \cdot (0.6^{x^2})$ .

Met de GR kan de normale verdeling grafisch worden weergegeven. Het window, dus de schaal, is belangrijk.

Teken de normale verdeling van lengtes met gemiddelde van 174 cm en standaarddeviatie 8 cm. Zie grafiek hier onder.

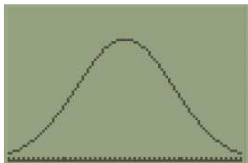
Met de GR:

- Y=

- DISTR

- normalpdf(X,174, 8)

- Window: Xmin= $\mu - 3\sigma$  , Xmax= $\mu + 3\sigma$  , Ymin=0 , Ymax=0.05



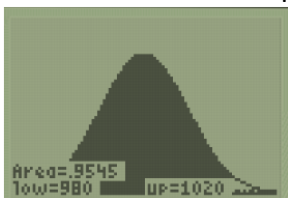
Voorbeeld:

Het gewicht van een pak suiker is normaal verdeeld met gemiddelde van 1000 gram en standaarddeviatie 10 gram. Hoeveel procent bevindt zich tussen 980 gram en 1020 gram?

Met de GR:

- Window: Xmin= 970 , Xmax=1030 , Ymin=0 , Ymax=0.05

- DISTR DRAWnormalpdf(980, 1020, 1000, 10)→Antwoord: 95,5%



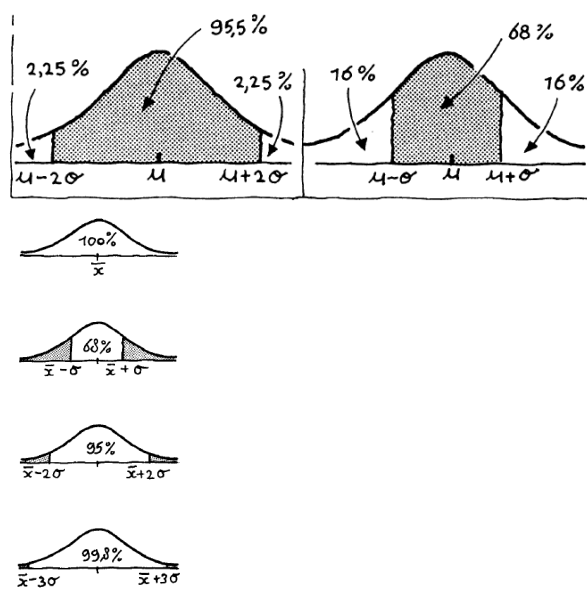
- **Vuistregels**

Voor een normale verdeling met een gemiddelde  $\mu$  en een spreiding  $\sigma$  gelden de volgende vuistregels:

68% van de waarnemingen ligt tussen  $\mu - \sigma$  en  $\mu + \sigma$ .

95,5% van de waarnemingen ligt tussen  $\mu - 2\sigma$  en  $\mu + 2\sigma$ .

99,8% van de waarnemingen ligt tussen  $\mu - 3\sigma$  en  $\mu + 3\sigma$ .



GR(TI): 2nd DISTR DRAW Shadenorm (linkergrens, rechtergrens,  $\mu$ ,  $\sigma$ ). Ook hier geldt: Window niet vergeten.

- **Vuistregels en de standaardnormale verdeling**

Als je alleen de oppervlakte wilt hebben en niet de grafiek, dan kan je dit oppervlak berekenen met: DISTR, normalcdf(linkergrens, rechtergrens,  $\mu$ ,  $\sigma$ ).

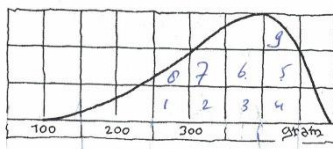
Met de GR kun je de vuistregels controleren voor de standaardnormale verdeling.

Bijvoorbeeld de vuistregel voor  $\mu - 3\sigma$  en  $\mu + 3\sigma$ ,  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 1$ . Dus, hoeveel procent van de waarnemingen ligt tussen  $\mu - 3\sigma$  en  $\mu + 3\sigma$ .

DISTR, normalcdf(-3,3,0,1) = 99,7%. Let op -3: je moet het teken tussen haken (Op de GR) nemen en niet het min teken van de rekenkundige operaties.

Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven.

**Opgave 8 en 9** van Hoofdstuk 2, § 8 Sinaasappelen oogst.



Het gewicht van de sinaasappelen is verdeeld volgens onderstaande grafiek.

a) Aan de grafiek zie je dat het gewicht niet normaal is verdeeld. De grafiek is niet symmetrisch.

b) Het percentage van de sinaasappels met een gewicht tussen de 200 en 300 gram?

Je maakt gebruik van het rooster. Onder de grafiek liggen ongeveer 10 vierkantjes. Dit aantal vertegenwoordigt 100%. Tussen 200 en 350 gram liggen ongeveer 4 blokjes. Het percentage is ongeveer 40%.

c) De gewichtsverdeling van de zwaarste 30% van de sinaasappelen?

30% wordt opgebouwd uit ongeveer 3 blokjes aan de rechterzijde van de verdeling. Rechts van 400 gram liggen ongeveer 3 blokjes. 30 % van de sinaasappelen zijn zwaarder dan 400 gram.

d) Bij een verdeling hoort een gemiddelde en een standaardafwijking.

Het gemiddelde gewicht van de sinaasappelen.

Het gemiddelde gewicht:

- bepaal van elke sinaasappel het gewicht,
- tel al de gewichten op,
- deel het totale gewicht door het totaal aantal sinaasappelen.

Maar, de verticale schaalverdeling in bovenstaande gewichtsverdeling ontbreekt. We kunnen alleen maar vierkantjes tellen. Bij 350 gram liggen er ongeveer even veel vierkantjes links als rechts onder de verdeling (grafiek). Het gemiddelde gewicht is ongeveer 350 gram.

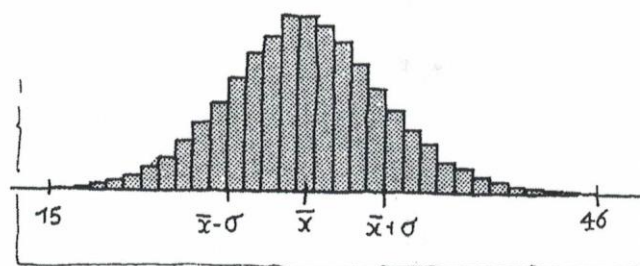
e) Van elke sinaasappel wordt bepaald hoeveel het gewicht afwijkt van het gemiddelde gewicht. Lichte sinaasappelen hebben een negatieve afwijking en zware sinaasappelen hebben een positieve afwijking. Je telt de afwijkingen op.

Het resultaat: dit is 0. Er zullen precies evenveel afwijkingen lager dan het gemiddelde zijn als dat er afwijkingen hoger dan het gemiddelde zijn. De definitie van het gemiddelde.

### Opgave 11 van Hoofdstuk 2 § 8

Hieronder staan een frequentietabel en een frequentiehistogram van de leeftijd van de moeders van pasgeboren kinderen in 1988.

|                           |       |       |       |       |       |       |      |      |      |      |      |       |
|---------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|------|------|-------|
| leeftijd moeder           | 15    | 16    | 17    | 18    | 19    | 20    | 21   | 22   | 23   | 24   | 25   | 26    |
| frequentie ( $^0/_{00}$ ) | 0,3   | 1,3   | 4,0   | 7,5   | 12,9  | 19,7  | 28,0 | 40,6 | 58,3 | 72,7 | 93,2 | 114,0 |
| leeftijd moeder           | 27    | 28    | 29    | 30    | 31    | 32    | 33   | 34   | 35   | 36   | 37   | 38    |
| frequentie ( $^0/_{00}$ ) | 127,4 | 139,1 | 139,4 | 135,8 | 122,4 | 104,8 | 84,5 | 67,9 | 50,8 | 38,5 | 25,7 | 20,4  |
| leeftijd moeder           | 39    | 40    | 41    | 42    | 43    | 44    | 45   | 46   | 47   | 48   | 49   |       |
| frequentie ( $^0/_{00}$ ) | 12,7  | 8,6   | 5,3   | 3,0   | 2,4   | 1,3   | 0,7  | 0,6  | 0,3  | 0,4  | 0,1  |       |



De leeftijd range is van 15 – 49 jaar.

a) In bovenstaande figuur is ook het histogram geschetst.

Met de Grafische Rekenmachine (GR) kun je aan dit vraagstuk werken. Op de GR voer je de leeftijden in met de lijst  $L_1$  en de frequenties in de lijst  $L_2$ . De leeftijden kun je één voor één invoeren. Dit kan ook sneller:

- LIST, OPS, 5:seq(K,K,15,49), ENTER, STO,  $L_1$ .

- De frequenties moeten één voor één ingevoerd worden.

Het histogram teken je via STAT PLOT op de GR. Denk aan het window!

b) Met de GR kun je via STAT CALC het gemiddelde en de standaardafwijking van de leeftijd van de moeders uitrekenen.

- Het gemiddelde:  $\bar{x} = 28.97 \cong 29$ ,
- De standaardafwijking(deviatie)  $\sigma_x = 4.5 \Rightarrow 2\sigma = 9$ .
- c)** Als je de leeftijden 15, 16,....., 49 invoert krijg je dus  $\bar{x} = 28.97 \cong 29$ . In werkelijkheid is het gemiddelde 29.5 jaar. Dit kun je het histogram effect noemen: Als de leeftijd 15 jaar is loopt deze leeftijd 364 dagen. Gemiddeld is dat 15.5 jaar.
- d)** Het bovenstaande histogram is goed geschetst:  $\bar{x} = 29.5, \bar{x} \pm \sigma = 4.5$ .
- e)** - Percentage moeders ouder dan  $\bar{x}$ : aan de hand van de schets ongeveer 50%.  
 - Percentage moeders ouder dan  $\bar{x} + \sigma$ : ongeveer 20%.  
 - Percentage moeders ouder dan  $\bar{x} + 2\sigma$ : met de vuistregels uit de les is het percentage ongeveer 2.5%.

#### Opgave 10 van Hoofdstuk 2, § 9

Het gewicht van varkens in een bepaalde groep is normaal verdeeld met  $\mu = 40\text{kg}$  en  $\sigma = 8\text{kg}$ .

**a)** Bereken hoeveel procent van de varkens een gewicht heeft onder 30kg.

De vuistregels voor  $\mu + \sigma$  en  $\mu - \sigma$ . Notabene:  $\mu = \bar{x}$ . Dus 68% ligt tussen de grenzen  $\mu + \sigma$  en  $\mu - \sigma \rightarrow 32\%$  erbuiten. Gelet op de symmetrie van de normale verdeling, volgt dat 16% een gewicht heeft onder de  $40-8=32\text{kg}$ . Dit is onnauwkeurig. Het gevolg van vuistregels. De vraag is namelijk hoeveel % onder de 30kg. Maak gebruik van de GR:  $\text{normalcdf}(30,40,40,8)=0.3944$ . Dan heb je het gedeelte ( $\mu - 1\sigma$ ) gevonden. Het gedeelte wat links van  $-1\sigma$  is dan:  $0.5-0.3944=0.1056 \rightarrow 10.56\%$  ligt links van 30.

**b)** Bereken hoeveel % van de varkens een gewicht heeft boven 42kg.

Als onder a), maar nu aan de rechterkant:  $\text{normalcdf}(40,42,40,8)=0.0987$ . Dus  $50-9.87=40.13\%$  heeft een hoger gewicht dan 42kg.

**c)** Bereken hoeveel % van de varkens een gewicht heeft tussen 30 en 50kg.

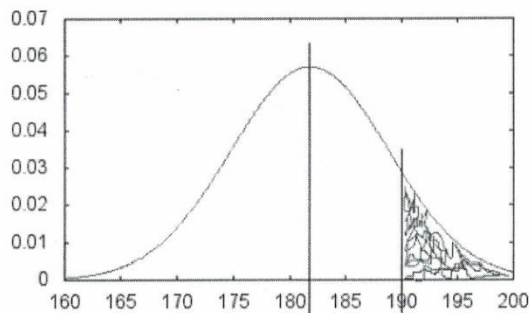
$\text{Normalcdf}(30,50,40,8)=0.7887 \rightarrow 78.87\%$ .

#### Opgave 11 van Hoofdstuk 2, § 9

In een onderzoek werd van 103370, 18-jarigen(m) de lengte opgemeten. De gemiddelde lengte bleek 181.8 cm te zijn en de standaard afwijking 7 cm.

**a)** Het aantal personen langer dan 190 cm?

De normaal verdeling schetsmatig weergegeven met daarin opgenomen de gegevens en het deel van de curve langer dan 190 cm:



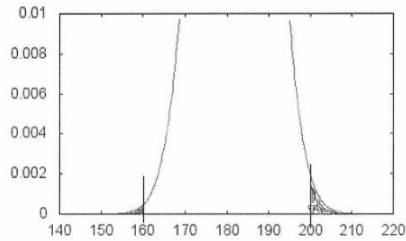
**b)** Het percentage van het aantal personen langer dan 190 cm:

Met de GR:  $\text{normalcdf}(181.8, 190, 181.8, 8.7)=0.3793 \Rightarrow 50 - 37.93 = 12.07\%$ .

Het aantal: 12.07% van 103370 personen.

**c)** Uit de meting volgen ook de gegevens van personen korter dan 160 cm en langer dan 200 cm.

Een schets van de verdeling. Aangezien we de twee uitersten van de normaalverdeling bekijken. Nu wordt ook duidelijk waarom we in bovenstaande schets een verticale schaalverdeling hebben opgenomen. We gaan alleen de verdeling van 0 tot 0.01 gebruiken om enig idee te krijgen van de twee genoemde uitersten. Verder verlengen we de horizontale schaal.



-Het percentage kleiner dan 160 cm en groter dan 200 cm:  $\text{normalcdf}(160,200,181.8,8.7)=0.99441$ . Het percentage wordt:  $100 - 99.441 = 0.559$ . Of in aantal personen  $0.00559 \cdot 103370 = 577$ .

### Opgave 12 van Hoofdstuk 2, § 9

Een tomatenkweker heeft geoogst. De vruchten variëren in grootte en gewicht. Het gewicht is normaal verdeeld met  $\mu = 90$  gram en  $\sigma = 15$  gram. In totaal zijn 60000 tomaten geoogst. De oogst wordt op gewicht gesorteerd.

**a)** De drie gewichtsklassen zijn:

- klasse A: tot 70 gram,
- klasse B: van 70 tot 100 gram,
- klasse C: meer dan 100 gram.

Percentage van de oogst voor elke gewichtsklasse?

We kennen  $\mu$  en  $\sigma$ , met de GR:

- in klasse A:  $\text{normalcdf}(0,70,90,15)=9.12\%$ ,
- in klasse B:  $\text{normalcdf}(70,100,90,15)=65.63\%$ ,
- in klasse C:  $\text{normalcdf}(100,1000,90,15)=25.25\%$ .

Opmerking: 1000 is een ruime bovengrens. Zo breek je de normaalverdeling niet te vroeg af.

**b)** de opbrengst van een tomaat hangt af van de gewichtsklasse:

- klasse A: 20 cent,
- klasse B: 25 cent,
- klasse C: 30 cent.

De totale opbrengst in Euro's?

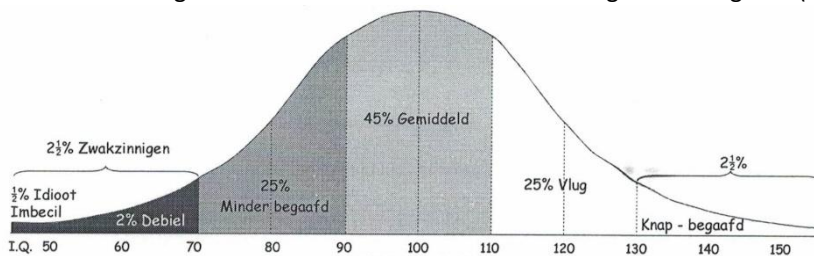
- de opbrengst van A:  $0.0912 \cdot 60000 \cdot 0.20 = 1094.40$  euro,
- de opbrengst van B:  $0.6563 \cdot 60000 \cdot 0.25 = 9844.50$  euro,
- de opbrengst van C:  $0.2525 \cdot 60000 \cdot 0.30 = 4545.00$  euro.

De totale opbrengst is: 15483.90 euro.

### Opgave 13 van Hoofdstuk 2, § 9

Intelligentie is één van de factoren die een rol spelen bij het met succes volgen van een opleiding.

De onderstaande grafiek is een voorbeeld van de verdeling van intelligentie (IQ).



Het IQ is normaal verdeeld met  $\mu = 100$ .

**a)**  $\sigma$ ?

In de les zijn een aantal vuistregels gegeven:  $\mu \pm \sigma = 68\%$ . Dat wil zeggen dat 68% van het oppervlak onder de curve 68% van het totale oppervlak is tussen  $\mu - \sigma$  en  $\mu + \sigma$ . Circa 15% ligt rechts van 115 en circa 15% ligt links van 85  $\Rightarrow \sigma = 15$ .

**b)** Gegeven is dat de ondergrens voor het schooladvies Middelbaar Technische Opleiding ongeveer bij 114 ligt.

Het percentage?

Met de GR:  $\text{normalcdf}(114,200,100,15)=16\%$ .

Nota bene: 200 is een ruim gekozen bovengrens.

c) De ondergrens voor VWO zonder gymnasium is 120. De ondergrens voor Gymnasium is 125.

Het percentage geschikt voor VWO zonder gymnasium?

Met de GR:  $\text{normalcdf}(120,125,100,15)=4.3\%$ .

#### **Opgave 14** van Hoofdstuk 2, § 9

Twee fabrikanten brengen voor dezelfde prijs eenzelfde type lamp op de markt. Het aantal branduren is voor beide lampen normaal verdeeld. Merk A heeft een gemiddelde van 1250 uren en een standaardafwijking van 300 uren. Merk B heeft een gemiddelde van 1200 uren en een standaardafwijking van 250 uren. Je wilt een lamp kopen die minstens 1000 uren moet branden.

Kies je A of B?

- A:  $\mu_A = 1250, \sigma_A = 300$ .

- B:  $\mu_B = 1200, \sigma_B = 250$ .

Welke lamp brandt minder dan 1000 uren?

Met de GR:

- A:  $\text{normalcdf}(0,1000,1250,300) = 20,23\%$ .

- B:  $\text{normalcdf}(0,1000,1200,250) = 21,29\%$ .

de kans dat lamp B minder dan 1000 uren brandt is groter dan die kans voor lamp A. De keuze valt op lamp A.

#### Oefenen

Maken:

De opgaven van paragraaf 8 en paragraaf 9.

#### Blok 5 Les 3 De Z-waarde

Deze les sluit aan bij de paragraaf 10 van Binomiale en normale verdelingen van de Wageningse Methode.

- De grafische rekenmachine-GR.

In deze les wordt ook weer met de grafische rekenmachine gewerkt De TI-84 Plus

- De normale verdeling.

*De grafieken zijn symmetrisch rond het gemiddelde.*

*De totale oppervlakte is 1.*

*De grafiek heeft twee buigpunten.*

*De standaard normale verdeling:  $\mu = 0, \sigma = 1$ .*

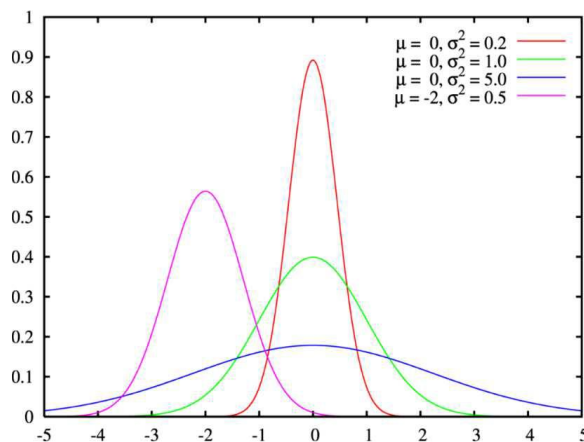
Zie onderstaande figuur met verschillende normale verdelingen.

De grafieken, de normale verdeling, vind je vaak bij het doen van waarnemingen.

Vaak is het lastig om, zo op het oog, te beoordelen of een waarneming uitzonderlijk is.

De methode om dat te beoordelen gaat als volgt:

- bepaal het gemiddelde en de standaardafwijking,
- bepaal hoeveel maal de standaardafwijking de waarneming afwijkt van het gemiddelde,
- hoe hoger dit aantal keer, des te uitzonderlijk de waarneming.



- De Z-waarde.

Voorbeeld:

Pakken suiker hebben een gemiddeld gewicht van 1000 gram. De gewichten zijn normaal verdeeld met standaardafwijking 10. Een pak suiker weegt 982 gram.

De afwijking van het gemiddelde is  $1000 - 982 = 18$  gram. Dat is  $1.8 \times 10 = 1.8 \times \sigma$ .

De afwijking van het gemiddelde heet de z-waarde. In dit geval dus 1.8 .

*Het aantal keer de standaardafwijking  $\sigma$  dat een waarneming afwijkt van het gemiddelde heet de z-waarde:*

$$\text{z-waarde} = \frac{\text{waarneming} - \text{gemiddelde}(\mu)}{\text{standaardafwijking}(\sigma)}.$$

*Hoe groter de z-waarde, hoe uitzonderlijker de waarneming.*

Voorbeeld:

Lengte van 16-jarige jongens:  $\mu = 176$  cm en  $\sigma = 12$  cm.

Lengte van 16-jarige meisjes:  $\mu = 164$  cm en  $\sigma = 10$  cm.

Lengte Simon = 196 cm:

$$\text{z - waarde Simon} = \frac{196 - 176}{12} = 1.67$$

Lengte Simona = 186 cm:

$$\text{z - waarde Simona} = \frac{186 - 164}{10} = 2.2$$

Lengte Peter = 158 cm:

$$\text{z - waarde Peter} = \frac{158 - 176}{12} = -1.5$$

Lengte van 16-jarige jongens:  $\mu = 176$  cm en  $\sigma = 12$  cm.

Hoeveel procent van de jongens heeft een lengte tussen de 164 cm en 188 cm?

Uitwerking:

$$164 = 176 - 12 = \mu - \sigma \text{ en } 188 = \mu + \sigma .$$

Volgens de vuistregels van Blok 5 Les 2 is het percentage gelijk aan 68%.

Hoeveel procent van de jongens heeft een lengte tussen  $z = -1.5$  en  $z = 1.5$  ?

$z = -1.5$  komt overeen met  $176 - (1.5 \times 12 = 18) = 156$  cm .

$z = 1.5$  komt overeen met  $176 + (1.5 \times 12 = 18) = 194$  cm .

Met GR TI: DISTR DRAW Shadenorm(156, 194, 176, 12)=88.5%,

maar ook rechtstreeks met de standaardnormale verdeling:

DISTR normalcdf(-1.5 ,1.5 , 0 ,1). (Denk aan de (-) toets).

Het percentage kan ook bepaald worden met behulp van de standaardnormale tabel(Zie Bijlage).

De oppervlakte voor  $z = -1.5$  ,  $\phi(-1.5) = 6.68\%$ .

Het oppervlak voor  $z = +1.5$  ,  $\phi(+1.5) = 93.3\%$ .

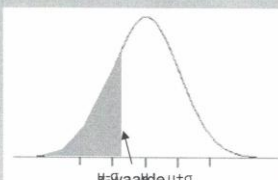
Let op: met de tabel vind je een kleinere waarde, nl.:

$\phi(+1.5) - \phi(-1.5) = 93.3\% - 6.7\% = 86.7\%$ .

Deze verschillen: 88.5% en 86.7%, tussen rekenmachine en de tabel, worden vaker gevonden.

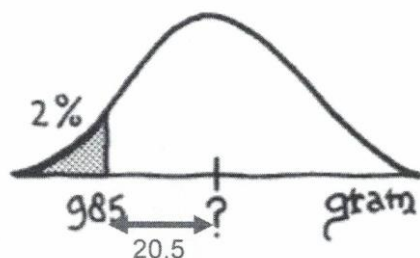
- Met de GR

- DRAW shadenorm (links, rechts,  $\mu$ ,  $\sigma$ ) = 88,5%.  
(tekent en berekent percentagegebied)
- DISTR normalcdf (links, rechts,  $\mu$ ,  $\sigma$ ) = 88,5%.  
(berekent percentage)
- invNorm (percentage, 0, 1) = z-waarde  
(berekent z-waarde cumulatief gebied)



In de grafiek hierboven gaat het om de z-waarde. Vergeet de  $\mu - \sigma$  en de  $\mu + \sigma$  in de grafiek(printing error). Met de standaardnormale tabel (Zie Bijlage).

Voorbeeld:



De vulmachine voor pakken suiker. Opgave: het instellen van de gemiddelde waarde van de vulmachine wanneer niet meer dan een gegeven percentage mag uitvallen.

De vulmachine geeft een standaardafwijking van 10 gram. Het gemiddelde gewicht kan worden ingesteld. Niet meer dan 2% van de pakken suiker mag een gewicht onder de

985 gram hebben. Hoe moet het gemiddelde gewicht worden ingesteld?

Met de GR:  $\text{invNorm}(0.02, 0, 1) = -2.05$ . Dit is de z-waarde van de standaard normale verdeling die hoort bij 2%.

In grammen uitgedrukt wordt dit met een standaardafwijking  $\sigma$  van 10 gram:

$z \times 10 \text{ gram} = 20,5 \text{ gram}$ . We weten dat niet meer dan 2% een gewicht mag hebben dat onder de 985 gram ligt. Het gemiddelde dat ingesteld moet worden bedraagt:

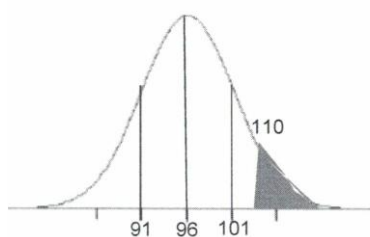
$985 + 20.5 = 1005.5 \text{ gram}$ .

Met de tabel  $\phi(z) = 0,02$ . Uit de tabel vind je  $z = -2.05$ .

Voorbeeld:

$\mu$  en  $\sigma$  zijn bekend.

Een autorobot waarbij bepaald wordt wat het percentage is van de gevallen waarbij de montage tijd groter is dan 110 seconden. De robot heeft gemiddeld 96 seconden nodig om een wiel te monteren. De standaardafwijking  $\sigma = 5$  seconden.



De z-waarde is  $\frac{110-96}{5} = 2.8$ .

Met de GR: er moet nu een bovengrens worden ingevoerd. Voor alle zekerheid wordt daarvoor een groot getal genomen.

In dit laatste geval wordt een bovengrens van 9999 ingevoerd in

$\text{DISTR normalcdf}(\text{linkergrens}(=z), \text{rechtergrens}(=9999), 0, 1) = 0.0026$ .

Dus in 0.26% van de gevallen zal de montage tijd langer zijn dan 110 seconden.

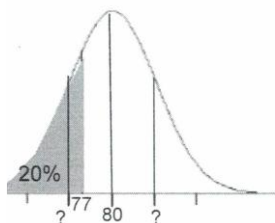
De bovengrens, de uitloper van de normale verdeling, moet zoveel mogelijk naar rechts liggen: 999 was ook wel genoeg geweest.

Met de standaardnormale tabel:

De z-waarde  $= \frac{110-96}{5} = 2.8$ . Met de tabel  $\phi(z) = 0.9974$ . Deze waarde van  $\phi(z)$  is het oppervlak van de normale verdeling links van z. We moeten het percentage hebben waarvoor de afwijking groter is dan 110 seconden. Het oppervlak van de normale verdeling is 1. Hieruit volgt  $\phi(> 110 \text{ seconden}) = 1 - \phi(2.8) = 1 - 0.9974 = 0.0026$ . Dus in 0.26% van de gevallen zal de montage tijd meer zijn dan 110 seconden.

Voorbeeld:

$\mu$  en het percentage zijn bekend. Bereken  $\sigma$ .



Zie bovenstaande normale verdeling

Een autorobot heeft gemiddeld een tijd van 80 seconden nodig om een bumper te monteren. In een gegeven percentage van de gevallen, 20%, lukt dat in 77 seconden. Dus lager dan het gemiddelde.

Hoe groot is  $\sigma$ ? Met  $\text{invNorm}(\text{gegeven percentage}, \mu = 0, \sigma = 1) = -0.84$ .

De z-waarde = 0.84.

$$\text{De z-waarde} \times \sigma = (80 - 77) \rightarrow \sigma = \frac{3}{0.84} = 3,57 \text{ seconden}$$

Met de standaardnormale tabel:

In dit geval is  $\phi = 0.2$ . Uit de tabel volgt  $z = -0.84$ . Uit de definitie van de z-waarde:

$$\text{z-waarde} = \frac{\text{waarneming} - \text{gemiddelde}(\mu)}{\text{standaardafwijking}(\sigma)}, \text{ volgt}$$

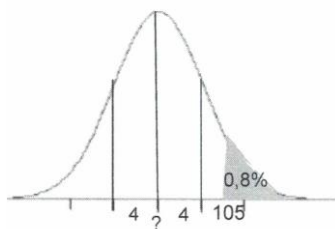
$$z \times \sigma = 77 - 80. \text{ Dus } \sigma = \frac{77-80}{-0.84} = 3.57 \text{ seconden.}$$

Voorbeeld:

In het laatste voorbeeld is  $\sigma$  bekend en het percentage in de grafiek. Bereken  $\mu$ .

Dit doen we ook met de standaardnormale tabel:

Een autorobot mag niet meer dan 8 op de 1000 gevallen langer dan 105 seconden doen om een deur te monteren. De standaardafwijking van de robot  $\sigma = 4$  seconden. Hoe moet het gemiddelde worden ingesteld?



Met de GR:

Het percentage moet kleiner zijn dan 0.8%.

De bijbehorende z-waarde is  $\text{invNorm}(0.992, 0, 1) = 2.4$ .

$$\mu = 105 - 2.41 \times \sigma = 105 - 9.64 = 95.36.$$

Met de standaardnormale tabel:

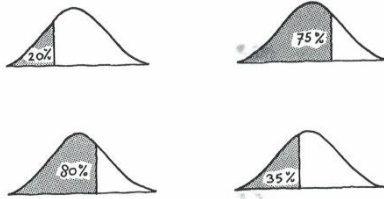
Als je de normale verdeling tekent zie je dat bedoeld wordt dat het rechterstukje van de grafiek kleiner moet zijn dan 0.8%. Dat wil zeggen dat  $\phi(z) > 99.2\%$ . Uit de tabel volgt dat de bijbehorende z-waarde 2.41 is. Uit de definitie van de z-waarde volgt:

$$\mu = 110 - 2.41 \times \sigma = 105 - 2.41 \times 4 = 95.36 \text{ seconden.}$$

## Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven.

### Opgave 8 van Hoofdstuk 2, § 10.

Gegeven de vier onderstaande normaalverdelingen:



De z-waarde van de gearceerde oppervlakken?

We gebruiken de standaard normale tabel, Bijlage 1.

- oppervlakte 20%: 0.2 ligt tussen 0.1997 en 0.2005.

$\Phi(-0.84) \cong 0.2$ , dus  $z = -0.84$ .

- oppervlakte is 75%: 25% rechts van het midden van de grafiek(verdeling) is  $-25\%$  links. Het linker oppervlak is dus 25%  $\Rightarrow z = -0.67$ .  $\Phi(0.67) \cong 0.75$ . Bij 75% vinden we voor  $z = +0.67$ .

- oppervlakte is 80%:  $1 - 0.8 = 0.2 \Rightarrow z = -0.84 \Rightarrow z = +0.84$ . Of  $\Phi(0.84) \cong 0.8$ , dus  $z = 0.84$ .

- oppervlakte is 35%:  $\Phi(-0.39) \cong 0.35$ , dus  $z = -0.39$ .

### Opgave 11 van Hoofdstuk 2, § 10

De lengte van 18-jarige jongens is normaal verdeeld met gemiddelde lengte van 182 centimeter(cm) en standaardafwijking (SD) 10cm. We willen weten hoeveel procent langer 1s dan 192cm.

a) Wat is de z-waarde van een lengte van 192cm?

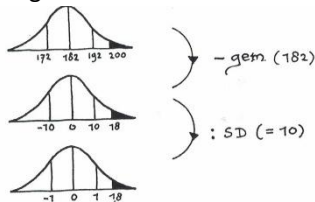
192 is 10 meer dan het gemiddelde  $\rightarrow$  1 keer de SD  $\rightarrow$  z-waarde is dus 1.

b) Leg uit dat het deel dat langer is dan 192cm gelijk is gelijk is aan  $1 - \phi(1)$ .

$\phi(1)$  is het deel dat korter is dan het gemiddelde plus 1 keer de z-waarde  $\rightarrow 182 + 10 = 192\text{cm} \rightarrow 1 - \phi(1)$  is het deel dat langer is dan 192cm. Uit de tabel volgt:  $\phi(1) = 0.8413 \rightarrow 1 - \phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$ . Het percentage dat langer is dan 192cm is 15.87%.

Een toelichting uit de Wageningse methode.

De vraag over de normale verdeling met gemiddelde 182 en een standaardafwijking 10 is teruggebracht tot een vraag over de standaard normale verdeling. In beeld gebracht:



Je ziet drie keer hetzelfde plaatje, alleen met verschillende schaalverdelingen op de horizontale as.

- het eerste plaatje betreft de lengtes in cm.

- het tweede geeft de afwijkingen van het gemiddelde

- het derde geeft de z-waarden.

Als je 182 van de lengtes aftrekt wordt het nieuwe gemiddelde; de standaarddeviatie blijft 10. Als je dan door 10 deelt, blijft het gemiddelde 0, maar wordt de standaarddeviatie 1.

De z-waarden van een normaal verdeelde stochast zijn normaal verdeeld.

### Opgave 14 van Hoofdstuk 2, § 10

We gebruiken de standaard normale tabel, Bijlage 1.

Uit een onderzoek bleek dat de scores van leerlingen bij het CSE(Centraal Staats Examen) wiskunde A bij benadering normaal verdeeld zijn. In een bepaald jaar was het gemiddelde 62 punten en 28% van de leerlingen hadden een onvoldoende (54 punten of minder).

a) De standaardafwijking  $\sigma$  ?

Het gemiddelde  $\mu = 62$  .

$$\Phi(z) = 0.28 \Rightarrow z = -0.58 .$$

De definitie van z:

$$z = \frac{\text{waarneming} - \mu}{\sigma} \Rightarrow \sigma = \frac{\text{waarneming} - \mu}{z} = \frac{54 - 62}{-0.58} = 13.79 .$$

b) Het aantal punten om bij de 20% besten te behoren?

Om de grens van 20 % besten te bepalen kijken we voor welke z geldt  $\Phi(z) = 0.8$  . De z-waarde is 0.84.

Het aantal punten, de waarneming kunnen we weer bepalen met de formule voor z:

$$z = \frac{\text{waarneming} - \mu}{\sigma} \Rightarrow z \cdot \sigma = \text{waarneming} - \mu \Rightarrow \text{waarneming} = z \cdot \sigma + \mu = 0.84 \cdot 13.79 + 62 = 73.59 .$$

Het aantal punten is dus 73.59 .

### Opgave 19 van Hoofdstuk 2, § 10

De EU-voorschriften over vulgewichten zijn in Nederland vastgelegd in het zogenaamde

Hoeveelheidsaanduidingenbesluit ( de Warenwet). De bedoeling van deze normen is dat de consument niet onaangenaam verrast wordt door een artikel waar veel minder in de verpakking zit dan erop de verpakking staat.

De fabrikanten die zich aan deze normen houden, tonen dat door op de verpakking aan de

inhoudsopgave de letter "e" toe te voegen. In deze voorschriften worden de volgende begrippen gebruikt:

- nominale hoeveelheid → de hoeveelheid die op het pak vermeld staat ( bijvoorbeeld 1 kg suiker).

- fout in minus → de hoeveelheid die de werkelijke inhoud kleiner is dan de nominale hoeveelheid.

Artikel 3 van de voorschriften zegt ongeveer het volgende:

- de werkelijke hoeveelheid mag niet kleiner zijn dan de nominale hoeveelheid,

- bij een steekproef mag hoogstens 2% van de pakken een hoeveelheid bevatten die een grotere fout heeft dan de toegelaten fout in minus.

Zie onderstaande tabel.

| Nominale hoeveelheid $Q_n$ van een e-verpakking in gram of in milliliter | toegelaten fout in minus |               |
|--------------------------------------------------------------------------|--------------------------|---------------|
|                                                                          | in % van $Q_n$           | in gr. of ml. |
| van 5 tot 50                                                             | 9                        | --            |
| van 50 tot 100                                                           | --                       | 4.5           |
| van 100 tot 200                                                          | 4.5                      | --            |
| van 200 tot 300                                                          | --                       | 9             |
| van 300 tot 500                                                          | 3                        | -             |
| van 500 tot 1000                                                         | --                       | 15            |
| van 1000 tot 10000                                                       | 1.5                      | --            |

a) De toegelaten fout in minus van

-  $1\frac{1}{2}$  – literfles cola: De fles bevat 1500 milliliter(ml). Uit de tabel volgt de toegelaten fout in minus is 1.5% →

$$0.015 \cdot 1500 = 22.5 \text{ ml.}$$

- Blikje cola van 33 centiliter(cl): 33 cl valt in de range van 300 tot 500 ml. Uit de tabel volgt dat de toegelaten fout in minus is 3% →  $0.03 \cdot 330 = 9.9 \text{ ml.}$

b) Pakken koffie worden machinaal gevuld door een machine die bij iedere ingestelde hoeveelheid een standaardafwijking heeft van  $\sigma = 5$  gram. We nemen aan dat de gemiddelde hoeveelheid koffie in de pakken gelijk is aan de ingestelde hoeveelheid. We bekijken pakken van 500 gram.

De hoeveelheid waarop de machine ingesteld moet worden om te voldoen aan beide eisen van bovenstaande Artikel 3.

De eerste eis zegt dat de gemiddelde hoeveelheid,  $\mu$ , 500 gram moet zijn. We gaan na of aan de tweede eis is voldaan als de machine is ingesteld op 500 gram.

We bekijken waar de grens ligt waarvoor geldt dat 2% van de pakken links ligt in de normale verdeling.

$$\Phi = 0.02 \Rightarrow z = -2.05.$$

Met de formule voor z kunnen we de grens, de waarneming vaststellen:

$$z = \frac{\text{waarneming} - \mu}{\sigma} \Rightarrow z \cdot \sigma = \text{waarneming} - \mu \Rightarrow \text{waarneming} = z \cdot \sigma + \mu = -2.05 \cdot 5 + 500 = 489.75 \text{ gram.}$$

Volgens de tabel met toegelaten fout in minus mag de grens bij  $500 - 15 = 485$  gram liggen. Deze grens ligt nog verder naar links in de normale verdeling dan de 489.75 gram. Dus als de machine op 500 gram wordt ingesteld, zal minder dan 2% van de pakken minder dan 485 gram bevatten.

c) Onderzoek of de fabrikant bij pakken van 250 gram meer, minder of evenveel koffie verbruikt per nominaal gewicht van 1 kg vergeleken met 500 gram pakken.

De machine wordt ingesteld op  $\mu = 250$  gram. We nemen aan dat blijft gelden  $\sigma = 5$  gram.

$$\Phi = 0.02 \Rightarrow z = -2.05.$$

$$z = \frac{\text{waarneming} - \mu}{\sigma} \Rightarrow z \cdot \sigma = \text{waarneming} - \mu \Rightarrow \text{waarneming} = z \cdot \sigma + \mu = -2.05 \cdot 5 + 250 = 239.75 \text{ gram.}$$

Volgens de tabel is de toegelaten fout in minus 9 gram en dat komt neer op een linker grens van 241 gram.

Met deze instelling zullen er teveel pakken te weinig bevatten. Als  $\mu = 250 + 1.25$  wordt ingesteld, vinden we  $\text{waarneming} = z \cdot \sigma + \mu = -2.05 \cdot 5 + 250 + 1.25 = 241$ , dan komt de vulling precies goed uit.

Nota Bene: Het terugzoeken van de z-waarde bij een normale verdeling als het percentage is gegeven, kan ook zonder tabel: met de GR DISTR, 3:invNorm(..). Zie bijvoorbeeld opgave 14b:  $\mu = 62$ ,  $\sigma = 13.79$ , gevraagd de grens(punten) waarboven de beste 20% zit: invNorm(0.8,62,13.79)=73.6059.

Als bij de normale verdeling  $\mu$  of  $\sigma$  gevraagd wordt, kan dat met behulp van MATH,0:Solver.

Bekijk daarvoor opgave 16b( niet in de opgaven hierboven uitgewerkt):  $\mu = 89$ , 20% kleiner dan 77, gevraagd  $\sigma$ : MATH,0:Solver,eqn=normalcdf(0,77,89,X)-0.2 $\Rightarrow$ X=14.258 (en dat is  $\sigma$ ).

- Oefenen  
Maken:  
De opgaven van paragraaf 10.

## Blok 5 Les 4 De centrale limietstelling

Deze les sluit aan bij paragraaf 12 van Binomiale en normale verdelingen van de Wageningse Methode.

- Herhaling.  
*Stochast  $X$  met waarden  $x_1, x_2, \dots, x_n$  en kansen  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .*  
- de verwachtingswaarde van  $X$  is  $E(X) = \sum_{k=1}^n p_k \cdot x_k$ , (Nota Bene:  $p_k \equiv P(X)$ ).  
- de variantie van  $X$  is  $Var(X) = \sum_{k=1}^n p_k \cdot (x_k - E(X))^2$ .  
- de standaardafwijking van  $X$  is  $SD(X) = \sqrt{Var(X)}$ .  
  
*Somregel voor de verwachtingswaarde:*  
Voor elk tweetal stochasten geldt:  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ .  
*Somregel voor de variantie:*  
Voor elk tweetal **onafhankelijke** stochasten geldt:  $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$ ,  
de somregel geldt ook voor drie of meer stochasten.  
Let op: de somregel geldt niet voor de standaarddeviaties. Zie samenvatting van Blok 5 Les 1.
- Binomiale verdeling  
Opgave 2 van Hoofdstuk 2, § 12

Je gooit 9 keer met een dobbelsteen.  $X$  is het aantal keren dat je 6 gooit.

$X_i = 1$  als de  $i^{\text{de}}$  worp een 6 is,  $X_i = 0$  als de  $i^{\text{de}}$  worp geen 6 is.

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_9.$$

$$\text{a) } E(X_i) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6} \cdot 0 = \frac{1}{6},$$

$$\text{Var}(X_i) = \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{5}{6} \cdot \left(0 - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{36},$$

$$\text{Sd}(X_i) = \sqrt{\frac{5}{36}} = \frac{1}{6}\sqrt{5},$$

$$\text{b) } E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_9) = 9 \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{2},$$

$$\text{en } \text{Var}(X) = 9 \cdot \text{Var}(X_i) = \frac{5}{4}; \text{Sd}(X) = \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

c) De cumulatieve kansen  $P(X \leq i)$ ?

We hebben te maken met een binomiale verdeling. De kans op succes  $p = \frac{1}{6}$ , voor een afzonderlijk experiment.

De cumulatieve kans:  $P(X \leq i) = \sum_{k=0}^i P(X = k)$ .

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \Rightarrow P(X \leq i) = \sum_{k=0}^i \binom{9}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{9-k}.$$

$P(X = k)$  en  $P(X \leq i)$ , kun je nu uitrekenen en opnemen in een tabel waarbij  $k, i$  lopen van 0 t/m 9.

Hieronder, bij de centrale limietstelling, nu met  $n = 10$  en hoger zie je dat de waarschijnlijkheidsverdeling enigszins op de normale verdeling lijkt. Bij  $n = 9$ , zal dit dus minder het geval zijn dan bij  $n = 10$ .

## Algemeen

$X$  is binomiaal verdeeld met kans  $p$  op succes en  $n$  herhalingen.

$X_i = 1$  als de  $i^{\text{de}}$  herhaling een succes is,

$X_i = 0$  als de  $i^{\text{de}}$  herhaling geen succes is.

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$E(X_i) = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p.$$

$$\text{Var}(X_i) = p \cdot (1-p)^2 + (1-p) \cdot (0-p)^2 = p \cdot (1-p)$$

$$\text{Sd}(X_i) = \sqrt{p(1-p)}$$

$$E(X) = n \cdot E(X_i) = n \cdot p,$$

$$\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p),$$

$$\text{Sd}(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}.$$

$$\text{Let op: } \text{Sd}(X) = \sqrt{n} \sqrt{p \cdot (1-p)} = \sqrt{n} \text{Sd}(X_i).$$

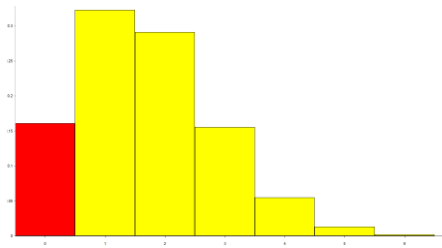
$X_i$  is binomiaal verdeeld. Alle  $X_i$ 's hebben dezelfde standaardafwijking  $\sigma$ .

## • De centrale limietstelling

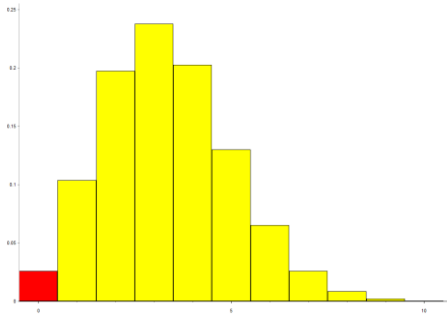
Voorbeeld:

10 keer gooien met een dobbelsteen. Tel het aantal zessen.

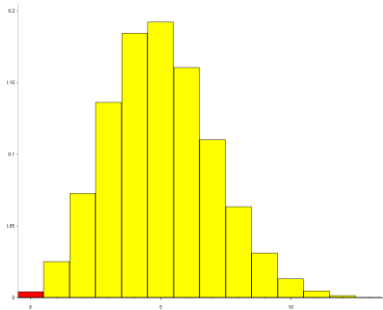
Binomiale verdeling met  $p = \frac{1}{6}$  en  $n = 10$ :



Nu hetzelfde experiment met  $n = 20$  :



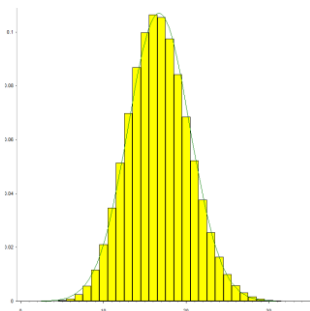
Hetzelfde experiment met  $n = 30$  :



Hetzelfde experiment met  $n = 50$  :



Hetzelfde experiment bij  $n = 100$  :



*De centrale limietstelling: Bij onafhankelijke herhaling van een kansexperiment met bijvoorbeeld binomiale verdeling benadert de som van de uitkomsten steeds meer de normale verdeling.*

Voorbeeld:

100 keer gooien met een dobbelsteen:

Tel het aantal zessen. Binomiale verdeling met  $p = \frac{1}{6} \cong 0.167$  en  $n = 100$ .

Voor de cumulatieve verdeling: wat is de kans op 15 zessen of minder?

- binomiaal verdeeld:  $P(X \leq 15) = \text{binomcdf}(100, 0.167, 15) = 0.3843$  (met GR).

- normaal verdeeld: voor de linkergrens moet nu een heel klein getal worden genomen en een continuïteitscorrectie worden toegepast door 15.5 in plaats van 15 te nemen. Dit doe je om het effect van het histogram, de discrete verdeling, te verkleinen.

$P(X \leq 15) = \text{normalcdf}(10^{-99}, 15.5, 16.7, 3.73) = 0.374$ . In de normaalverdeling is de  $\sigma$  van de binomiale verdeling genomen.

Benadering van de normale verdeling met binomiale verdeling

- binomiaal  $E = \mu = n \cdot p = 16.7$ ,  $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = 10 \sqrt{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 3.73$ .

- De  $\sqrt{n}$  wet

$X_1, X_2, \dots, X_n$  zijn onafhankelijke stochasten, binomiaal verdeeld, met gelijke standaardafwijking  $\sigma$ .

$S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ .

Dan is  $Sd(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma$ .

Aan de hand van het voorbeeld met de twaalf dobbelstenen wordt dit nog eens duidelijk gemaakt.

Voorbeeld:

Gooi met 12 dobbelstenen.

$X$  = het aantal zessen.

$X$  is binomiaal verdeeld:  $p = \frac{1}{6}$ ,  $E(X) = 12 \cdot \frac{1}{6} = 2$ ,  $Sd(X) = \sqrt{12 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \frac{1}{3} \sqrt{15}$ .

Herhaal dit experiment 100 keer.

$Y_i$  is het aantal zessen bij experiment  $i$ .

$Y$  is het totaal aantal zessen na 100 keer gooien met 12 dobbelstenen.

$$E(Y) = 100 \cdot 2, SD(Y) = \sqrt{100} \cdot \frac{1}{3} \sqrt{15} = \frac{10}{3} \sqrt{15}.$$

De variantie van  $Y$ :  $Var(Y) = 100 \times Var(X)$ .

$$Sd(Y) = \sqrt{Var(Y)} = \sqrt{100} \sqrt{Var(X)} = 10 \times Sd(X).$$

### Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven.

#### Opgave 5 van Hoofdstuk 2, § 12 De Grabbelton

Een grabbelton. Tussen het zaagsel in de ton zijn tien plankjes verborgen: op zeven plankjes staat "2", op twee plankjes staat "5" en op één plankje staat "10". Na een inzet mag je twee plankjes grabbelen. Het hoogste getal dat op één van de twee plankjes staat is de uitbetaling in X euro's.

a) Ga na:  $P(X = 5) = \frac{1}{3}$ .

10 plankjes, waar je er 2 van pakt. 2 uit 10 zonder terugleggen:  $\binom{10}{2} = 45$  mogelijkheden. Als het hoogste getal een 5 is, dan kun je twee plankjes met een 5 gegrepen hebben en dat kan 1 keer. Of je hebt één plankje met een 5 en een plankje met één van de zeven 2'en en dat kan  $2 \cdot 7$  keer. Dus totaal voor het hoogste getal een 5:  $1 + 5 \cdot 7 = 15$  mogelijkheden  $\rightarrow P(X = 5) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$ .

b) Geef de kansverdeling van X.

$P(X) = 2 = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$ ;  $P(X = 10)$ : één plankje met 10, zeven plankjes met een 2 en twee plankjes met een 5, dus totaal 9 mogelijkheden voor een ander plankje  $\rightarrow P(X = 10) = \frac{9}{\binom{10}{2}} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}$ . Nota bene: het plankje met de 10 telt niet mee in het aantal mogelijkheden voor  $P(X = 10)$ .

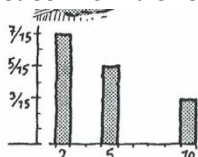
c) Bereken  $E(X)$  en  $Var(X)$ .

$$E(X = x_i) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = \bar{x} \rightarrow \frac{1}{3} \cdot 5 + \frac{7}{15} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 10 = \frac{23}{5}.$$

$$Var(X) = \sum_{k=0}^n P(X = k) [k - E(X)]^2 = \frac{7}{15} (2 - \frac{23}{5})^2 + \frac{1}{3} (5 - \frac{23}{5})^2 + \frac{1}{5} (10 - \frac{23}{5})^2 = 9.04.$$

d) Je kunt van bovenstaand resultaat een histogram tekenen (zie hieronder).

Hierin zijn de uitbetalingen en de kansen daarop weergegeven. Dit histogram ziet er niet normaal verdeeld uit. Maar volgens de centrale limietstelling moet het histogram, dat behoort bij 50 keer spelen, goed benaderd kunnen worden met een normale verdeling. Tussen welke twee bedragen ligt de totale uitbetaling bij 50 keer spelen?



Iedere keer spelen krijg je minstens € 2 uitgekeerd, dus bij 50 keer spelen is de uitkering minstens € 100. Je kunt ook bij elke keer spelen € 10 uitgekeerd krijgen. Bij 50 keer spelen wordt dat maximaal € 500.

e) Hoe groot is de kans op de laagste uitkering en hoe groot is de kans op de hoogste uitkering?

de kans op de laagste uitkering is:  $(\frac{7}{15})^{50}$  en de kans op de hoogste uitkering is  $(\frac{1}{5})^{50}$ . Dit zijn kleine kansen.

#### Opgave 7 van Hoofdstuk 2, § 12 Vervolg Grabbelton Opgave 5

$T$  is de totale uitbetaling bij vijftig keer spelen in de grabbelton:  $T = T_1 + T_2 + \dots + T_{50}$ , waarbij  $T_i$  de uitbetaling is van de  $i^e$  keer.

a)  $E(T)$  en  $Var(T)$ ?

De afzonderlijke spelen zijn onafhankelijk. Bij opgave 5 hebben we de resultaten van 1 keer grabbelen (=twee plankjes trekken, zie boven) berekend:  $E(X) = E(T_i) = \frac{23}{5}$ .

$$E(T) = 50 \cdot E(X) = 50 \cdot \frac{23}{5} = 230.$$

$$Var(T) = 50 \cdot Var(X) = 50 \cdot 9.04 = 452 \Rightarrow \sqrt{452} = 21.26.$$

In de onderstaande tabel zie je de resultaten van 400 computersimulaties van 50 keer spelen in de grabbelton. De uitbetalingen bij deze 400 simulaties zijn verdeeld in klassen met een klassebreedte van 10. Achter elke klasse staat de daarbij behorende frequentie. De klasse met frequentie 0 staan niet in de tabel.

| klasse   | aantal | cumulatief | klasse   | aantal | cumulatief |
|----------|--------|------------|----------|--------|------------|
| 171 -180 | 2      | 2          | 231 -240 | 72     | 277        |
| 181 -190 | 7      | 9          | 241 -250 | 58     | 335        |
| 191 -200 | 25     | 34         | 251 -260 | 33     | 368        |
| 201 -210 | 43     | 77         | 261 -270 | 20     | 388        |
| 211 -220 | 63     | 134        | 271 -280 | 10     | 398        |
| 221 -230 | 71     | 205        | 281 -290 | 1      | 400        |

Bovenstaande resultaten kun je weergeven op normaal waarschijnlijkheidspapier. Uit de grafiek bepaal je het gemiddelde en de standaarddeviatie.

Ik geef hier het gemiddelde  $\mu \approx 229$  en  $\sigma \approx 19$ . Dit komt in de buurt van de waarden gevonden onder a).

**b)** In de grafiek kun je ook aflezen wat de kans is op een uitbetaling tussen 224 en 255. Ik geef het resultaat van de kans:  $88\% - 39\% = 49\% \Rightarrow 0.49$ .

Met de GR:  $P(224 \leq T \leq 255) \Rightarrow \text{Distr.Normalcdf}(223.5, 255.5, 230, 21.26) = 0.5049$ . De schatting uit de grafiek, 0.49, komt goed overeen met de GR, 0.5049.

### Opgave 8 van Hoofdstuk 2, § 12

Drie echtparen a-A, b-B en c-C hebben een dansclubje. Elke dinsdagavond gaan ze dansen. Wie met wie danst wordt elke Dinsdag opnieuw door het lot bepaald.

**a)**  $X$  is het aantal personen dat met de eigen partner danst.

Per dansavond gelden de volgende kansen:  $P(X = 0) = \frac{1}{3}$ ,  $P(X = 1) = \frac{1}{2}$ , en  $P(X = 3) = \frac{1}{6}$ .

Zie ook de vraagstukken Blok 1, les 1, vraagstuk 13 en Blok 3, les 1, vraagstuk 6.

Dus in een bak zitten drie briefjes met A, B en C. Op hoeveel manieren kunnen A, B en C over a, b en c worden verdeeld? Met een boomdiagram, Blok 1 Les 1, vind je dat er  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 = 3!$  manieren zijn om de hoofdletters over de kleine letters te verdelen.

$X$  is het aantal kleine letters dat bij de juiste hoofdletter hoort of anders om. Door te tellen vind je dan het aantal:

-  $X = 0$ : 2 manieren. Bij elke hoofdletter horen 2 verkeerde kleine letters  $\Rightarrow P(X = 0) = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}$ .

-  $X = 1$ : 3 manieren. Bij een kleine letter hoort 1 hoofdletter  $\Rightarrow$  a bij A, b bij B, en c bij C  $\Rightarrow P(X = 1) = \frac{3}{3!} = \frac{1}{2}$ .

-  $X = 2 \equiv X = 3$ : 1 manier. Als er twee goed zijn is de derde ook goed  $\Rightarrow P(X = 3) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$ .

Controle:  $P(X = 0) = 1 - P(X = 1) - P(X = 3) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ .

**b)** Met de definities:

$$E(X) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 3 = 1.$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{3}(0 - 1)^2 + \frac{1}{2}(1 - 1)^2 + \frac{1}{6}(3 - 1)^2 = 1.$$

$$\text{Sd}(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = 1.$$

**c)** Vandaag viert het dansclubje het eerste lustrum: de afgelopen 5 jaren heeft het clubje geen dinsdagavond overgeslagen.  $S$  is het aantal keren dat in de vijfjaar de kleine letter de juiste hoofdletter trof.  $S$  is bij benadering normaal verdeeld.

$E(S)$  en  $\text{Sd}(S)$ ?

Het aantal weken in 5 jaren is 262. Er is 262 keer gedanst. Per keer is de verwachting  $E(X)$  dat de kleine letter de juiste hoofdletter treft 1. Dus  $E(S) = 262 \cdot 1 = 262$ .

$S$  is bij benadering normaal verdeeld:  $\text{Sd}(S) = \sqrt{262 \cdot \text{Var}(X)} = \sqrt{262} = 16.2$ .

**d)** De kans dat een kleine letter niet meer dan 250 keer(in de 5 jaren) de juiste hoofdletter trof?

Met de normale verdeling:  $\text{Distr.Normalcdf}(0, 250, 262, 16.2) = 0.229$ .

Ook met de standaardnormale verdeling tabel:

$$z = \frac{250 - 262}{16.2} = -0.74 \Rightarrow \Phi(-0.74) = 0.229.$$

**Overzichtsvraag 3** Hoofdstuk 2, § 12

a)  $X$  en  $Y$  zijn twee onafhankelijke stochasten met standaard afwijking 3, respectievelijk 4.

Standaard afwijking  $X + Y$ ?

Bij de standaard afwijking van onafhankelijke stochasten geldt voor de variantie:

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) = [\sigma(X)]^2 + [\sigma(Y)]^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma(X + Y) = \sqrt{Var(X + Y)} = \sqrt{25} = 5.$$

b)  $X_1, \dots, X_{64}$  zijn vier en zestig onafhankelijke stochasten, elk met een standaard afwijking 3.

Standaard afwijking van  $X_1 + \dots + X_{64}$ ?

Bij de standaard afwijking 3 hoort een variantie van 9.

$$\text{Onafhankelijke stochasten: } Var(X_1 + \dots + X_{64}) = 64 \cdot Var(X_1) = 64 \cdot 9 \Rightarrow \sigma(\sum_{i=1}^{64} X_i) = \sqrt{64 \cdot Var(X_1)} = \sqrt{64 \cdot 9} = 24.$$

**Overzichtsvraag 4** Hoofdstuk 2, § 12

De uitkomst  $X$  van een experiment kan twee waarden aannemen: de waarde 5 met een kans van  $1/3$  en een waarde 8 met een kans van  $2/3$ . Het experiment wordt 100 keer herhaald; de herhalingen zijn onafhankelijk van elkaar.  $S$  is de som van 100 uitkomsten. Omdat het aantal herhalingen groot is, is  $S$  bij benadering normaal verdeeld.

a) Gemiddelde en standaard afwijking van deze normale verdeling?

$$E(X) = P(X = 5) \cdot 5 + P(X = 8) \cdot 8 = \frac{1}{3} \cdot 5 + \frac{2}{3} \cdot 8 = 7.$$

$$Var(X) = P(X = 5) \cdot [5 - E(X)]^2 + P(X = 8) \cdot [8 - E(X)]^2 = \frac{1}{3} \cdot (-2)^2 + \frac{2}{3} \cdot (1)^2 = 2.$$

$$\text{Gemiddelde: } E(S) = 100 \cdot 7 = 700,$$

$$\text{Variantie: } Var(S) = 100 \cdot Var(X) = 100 \cdot 2 = 200,$$

$$\text{Standaard afwijking: } Sd(S) = \sqrt{Var(S)} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}.$$

b) Kans dat  $S > 697$ ?

Dit kunnen we bepalen met de  $z$ -waarde:  $z = \frac{\text{waarneming} - \mu}{\sigma}$ .

$$\text{Dus: } \frac{S - 700}{\sigma} > \frac{697 - 700}{10\sqrt{2}} = -0.2121.$$

We maken gebruik van de standaard normale tabel. De  $z$  waarde vinden we daar niet in 4 decimalen. De dichtstbijzijnde waarde is  $z = -0.21$ . de bijbehorende  $\Phi = 0.4618$ . Nu,  $S > 697$ . Het gebied ligt rechts van  $\Phi = 0.4618$  in de normale verdeling. Dat wil zeggen:  $P(S > 697) = 1 - 0.4618 = 0.5382$ .

- Oefenen

Maken:

De opgaven van paragraaf 12

## Toets De Normale Verdeling

**Opgave 1** Kortingsbonnen

a) Bij de kassa van een DIY-zaak staan twee bakken. Beide bakken zijn gevuld met kortingsbonnen. Er zijn bonnen ter waarde van 1 euro en bonnen ter waarde van 5 euro. Er wordt voor gezorgd dat in beide bakken steeds evenveel bonnen zitten. Een klant die voor een bedrag van tussen de 10 en 50 euro besteedt, mag uit één van de bakken een bon pakken.  $X$  is het bedrag aan korting dat deze klant trekt.  $E(X)$ ,  $VAA(X)$  en  $Var(X)$ ?

Tabel met mogelijke kortingsbonnen:

|            |               |               |
|------------|---------------|---------------|
| $x$        | 1<br>€        | 5 €           |
| $P(X = x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} = 3,$$

$$VAA(X) = \sum_{k=0}^n p_k |x_k - E(X)| = \frac{1}{2} |1 - 3| + \frac{1}{2} |5 - 3| = 2,$$

$$Var(X) = \sum_{k=0}^n p_k (x_k - E(X))^2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - 3)^2 + \frac{1}{2} \cdot (5 - 3)^2 = 4.$$

**b)** Een klant die voor minstens 50 euro besteedt, mag uit beide bakken een bon nemen.  $S$  is het totale bedrag aan korting dat deze klant trekt.

$E(S)$  en  $Var(S)$ ?

Tabel met mogelijke kortingsbonnen:

|            |               |               |               |
|------------|---------------|---------------|---------------|
| $s$        | 2             | 6             | 10            |
| $P(S = s)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

Dus, twee maal 1 euro, twee maal 5 euro. De kans voor 6 euro vraagt iets meer beschouwing: Als je 1 euro trekt uit de ene bak is de kans daarop  $\frac{1}{2}$ . Dan trek je 5 euro met 100% kans, want 2 keer 1 euro heb je al gehad.

$$E(S) = \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 6 + \frac{1}{4} \cdot 10 = 6,$$

$$Var(S) = \frac{1}{4} \cdot (2 - 6)^2 + \frac{1}{2} \cdot (6 - 6)^2 + \frac{1}{4} \cdot (6 - 10)^2 = 8.$$

**c)** Een klant besteedt voor 60 euro en mag dus uit beide bakken een bon trekken. De klant kan niet zo goed bij de tweede bak komen en daarom spreekt de klant met de kassière af dat alleen een bon uit de eerste bak getrokken wordt. Dat kortingsbedrag wordt verdubbeld.

$T$  is het totale kortingsbedrag.

$E(T)$  en  $Var(T)$ ?

Tabel met de mogelijke kortingen:

|            |               |               |
|------------|---------------|---------------|
| $t$        | 2             | 10            |
| $P(T = t)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

$$E(T) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 10 = 6,$$

$$Var(T) = \frac{1}{2} \cdot (2 - 6)^2 + \frac{1}{2} \cdot (10 - 6)^2 = 16.$$

**d)** Er is een verband tussen de standaardafwijking van  $X$  enerzijds en de standaardafwijkingen van  $S$  en  $T$  anderzijds. Deze verbanden zijn:

$$Sd(S) = a \cdot Sd(X), \text{ en } Sd(T) = b \cdot Sd(X).$$

Verband tussen  $a$  en  $b$ ?

*Somregel voor de verwachtingswaarde:*

$$\text{Voor elk tweetal stochasten geldt: } E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

*Somregel voor de variantie:*

$$\text{Voor elk tweetal **onafhankelijke** stochasten geldt: } Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y),$$

de somregel geldt ook voor drie of meer stochasten.

$$Sd(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{4} = 2.$$

$$Sd(S) = \sqrt{Var(S)} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \Rightarrow Sd(S) = a \cdot Sd(X) \Rightarrow a = \sqrt{2}.$$

$$Sd(T) = \sqrt{Var(T)} = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow Sd(T) = b \cdot Sd(X) \Rightarrow b = 2.$$

Verklaring:

$$Var(S) = 2 \cdot Var(X) \Rightarrow a = \sqrt{2}.$$

$$Var(T) = 4 \cdot Var(X) \Rightarrow b = 2.$$

## Opgave 2 Verwerkingstijden

Een bedrijfskundige doet onderzoek naar de snelheid waarmee de binnengekomen orders in een bedrijf worden verwerkt. Dit levert voor 100 onderzochte orders het overzicht op dat in onderstaande tabel op de volgende bladzijde wordt weergegeven.

**a)** Bereken van de verwerkingstijd het gemiddelde en de standaardafwijking, bijvoorbeeld met de GR(Grafische

Rekenmachine). Voor het aantal uren nemen we het klassengemiddelde (voorbeeld: van de klasse 0-<6 is het klassengemiddelde 3 uren).

Met de GR werken met List1 en List2.

Stat L1, L2, waarbij L1 het aantal uren, en L2 de frequentieverdeling

Samenvatting:

Het gemiddelde van de cijfers is alle cijfers opgeteld en gedeeld door  $n$ :

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{n} x_i.$$

Nu noemen we  $\frac{f_i}{n} = p_i$ .

Let op: er is geen sprake van één waarde van  $p$ . Het is geen binomiaal experiment!

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n p_i x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i x_i$$

Hier zien we de relatie met de verwachtingswaarde:

$$E(X = x_i) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i x_i = \bar{x}.$$

De standaarddeviatie vinden we:

$$Sd(X) = \sqrt{Var(X)}$$

en

$$Var(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2.$$

De kans is frequentie/100. Gelet op de hoeveelheid informatie kun je dit ook zonder GR berekenen. Zie bovenstaande formules.

Het gemiddeld aantal uren:  $\bar{x} = 10.99 \cong 11.0$  en  $\sigma = 3.73 \cong 3.7$ .

VERWERKINGSTIJD IN UREN

| Aantal uren | Frequentie |
|-------------|------------|
| 0 -< 6      | 8          |
| 6 -< 8      | 9          |
| 8 -< 10     | 18         |
| 10 -< 12    | 30         |
| 12 -< 14    | 16         |
| 14 -< 16    | 10         |
| 16 -< 20    | 9          |
| Totaal      | 100        |

**b)** Als de verwerkingstijden normaal verdeeld zijn, zouden de frequenties in de tabel moeten passen bij een normale verdeling met het gemiddelde en de standaardafwijking die we onder a) gevonden hebben.

Stel dat er inderdaad sprake is van een normale verdeling.

De kans op een verwerkingstijd tussen de 8 en 14 uren?

Overeenstemming met de tabel?

De kans met GR:  $\text{normalcdf}(8, 14, 11, 3.7) = 0.58$ .

Uit de tabel volgt met behulp van de frequenties:  $18 + 30 + 16 = 64$ .

De kans is  $\frac{64}{100} = 0.64 > 0.58$ , hoger dan in de normale verdeling. De aanname van een normale verdeling is slechts bij benadering juist.

### Opgave 3 Percentielscores

Bij statistisch onderzoek speelt het begrip percentielscore een grote rol. Een percentielscore  $P_a$  is het waarnemingsgetal waar  $a\%$  van de populatie onder zit.

**a)** Gegeven is dat de lengte verdeling in een bepaalde leeftijdsgroep normaal verdeeld is met  $\mu = 176$  cm en  $\sigma = 12$  cm.

Percentielscore van een categorie met een lengte van 188 cm? We gebruiken de vuistregels.

Een vuistregel: het oppervlak van de normaalverdeling tussen  $\mu - \sigma$  en  $\mu + \sigma$  is 68%. Er geldt met de gegeven informatie:  $\mu + \sigma = 176 + 12 = 188$ . Het oppervlak van de normaalverdeling links van 188 cm is:

$50\% + \frac{1}{2} \cdot 68\% = 84\%$ . Gelet op de definitie van percentielscore vinden we voor de percentielscore  $P_a = P_{84}$ .

b) Een persoon uit de leeftijdscategorie heeft een lengte waarbij de percentielscore  $P_4$  hoort.

Met de tabel voor de normale verdeling weten we dus dat  $\Phi = 0.04 \Rightarrow z = -1.75$ .

$$z = \frac{\text{waarneming} - \mu}{\sigma} \Leftrightarrow \text{waarneming} = \mu + z \cdot \sigma \Rightarrow 176 - 1.75 \cdot 12 = 155 \text{ cm.}$$

#### Opgave 4 Vulmachine

a) Een machine vult pakken koffie waarvan het gewicht normaal verdeeld is. Als de fabrikant het gemiddelde instelt op 505 gram blijkt dat 3% van de pakken minder dan 500 gram weegt.

De standaardafwijking van deze machine?

$$\Phi(z) = 3\% = 0.03.$$

Met de standaard normaal tabel:  $\Phi(z) = 3\% = 0.03 \Rightarrow z = -1.88$ , of met de GR  $\Rightarrow \text{InvNorm}(0.03) = -1.88$ .

$$z = \frac{\text{waarneming} - \mu}{\sigma} \Rightarrow \sigma = \frac{500 - 505}{-1.88} = 2.66 \cong 2.7.$$

b) Een andere vulmachine heeft een standaardafwijking van 3.4 gram. De fabrikant wil de machine zo instellen, dat ook nu niet meer dan 3% van de pakken minder dan 500 gram weegt.

Op welk gewicht moet de fabrikant de machine instellen?

3% betekent  $z = -1.88$ .

$$z = \frac{\text{waarneming} - \mu}{\sigma} \Rightarrow \mu = 500 + 1.88 \cdot 3.4 = 506.4 \Rightarrow 507 \text{ gram als instelling van de vulmachine.}$$

#### Opgave 5 Dobbelen voor korting

a) De DIY-zaak van opgave 1 van deze Toets heeft een nieuwe actie. Bij besteding van minstens €50, mag de klant met een dobbelsteen werpen waarvan op vijf zijdes een '1' staat en op één zijde een '10'. Het geworpen getal is de korting  $K$  in euro's die de klant krijgt.

Toon aan door berekening dat  $Sd(K) = \sqrt{11.25}$ .

Tabel:

|            |       |       |
|------------|-------|-------|
| $k$        | 1     | 10    |
| $P(K = k)$ | $5/6$ | $1/6$ |

$$E(K) = \frac{5}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 10 = 2.5.$$

$$Var(K) = \frac{5}{6} \cdot (1 - 2.5)^2 + \frac{1}{6} \cdot (10 - 2.5)^2 = 11.25.$$

$$Sd(K) = \sqrt{11.25} \cong 3.35.$$

b) De winkelier verwacht dat er gedurende de actieperiode 400 klanten met de dobbelsteen een kortingsbedrag zullen werpen.  $Q$  is het aantal klanten dat een '10' werpt en  $T$  is het totale kortingsbedrag dat de winkelier moet uitkeren na deze 400 worpen.

$$E(Q) = n \cdot p = 400 \cdot \frac{1}{6} = \frac{200}{3}.$$

$$Var(Q) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 400 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{500}{9}.$$

$$Sd(Q) = \sqrt{\frac{500}{9}} = \frac{10}{3} \sqrt{5}.$$

Met de somregel en onafhankelijke stochasten:

$$E(T) = n \cdot E(K) = 400 \cdot 2.5 = 1000.$$

$$Var(T) = 400 \cdot Var(K) = 400 \cdot 11.25 = 4500.$$

$$Sd(T) = \sqrt{4500} = 30\sqrt{5}.$$

De kans dat het totale kortingsbedrag meer is dan 1100 euro. We gebruiken de normale verdeling.

Kies voor de bovengrens in de normale verdeling een groot getal, bijvoorbeeld  $10^{99}$ . Denk aan het histogram effect:  $1100 \Rightarrow 1100.5$ ; de verwachtingswaarde is 1000.

$$\text{normalcdf}(1100.5, 10^{99}, 1000, 30\sqrt{5}) = 0.067 \Rightarrow \text{de kans is dus } 0.067.$$

Of met de tabel van de normale verdeling:

$$z = \frac{\text{waarneming} - \mu}{\sigma} = \frac{1100 - 1000}{30\sqrt{5}}, \text{ etc.}$$

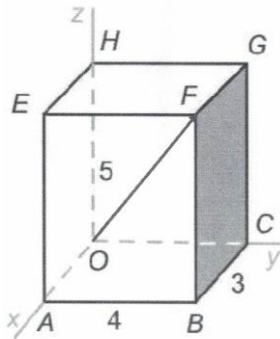
## Blok 6 Inproduct

### Blok 6 Les 1 Lijnen in de ruimte

Deze les sluit aan bij het lespakket In Product van de Wageningse methode 2010. Inmiddels is er een nieuwe uitgave 2017 met de nodige aanpassingen.

<http://wageningse-methode.nl/456V%20wiskunde%20D/5.%20Inproduct/>

- Notaties en afspraken



- Punten met coördinaten:  $F(3,4,5)$

- Vector  $\overrightarrow{OF} = \vec{f} = (3,4,5)$ .

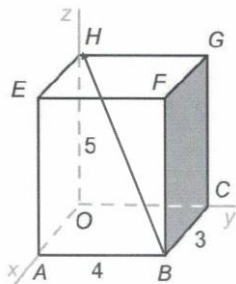
*Opmerking: de vector in de 2010 uitgave wordt zoals hier weergegeven in de rij-notatie. Dat kan worden gedaan omdat het handig is bij de productie van tekst. Maar het is niet gebruikelijk. Voor een vector wordt de kolom notatie gebruikt, zoals in de 2017 uitgave:*

- Vector  $\overrightarrow{OF} = \vec{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

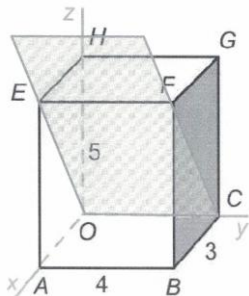
*Vectoren zijn grootheden die een grootte en een richting hebben. De grootte en de richting kunnen worden weergegeven door een pijl. Verplaatsingen, snelheden en krachten zijn bijvoorbeeld met een vector weer te geven, omdat ze een grootte en een richting hebben. Een vector met een beginpunt A en een eindpunt B noteer je als  $\overrightarrow{AB}$ .*

*Ook worden kleine letters gebruikt, zoals  $\vec{a}$  en  $\vec{f}$ , om vectoren aan te geven.*

*- De lengte van een vector noteer je als  $|\overrightarrow{AB}|$  of als  $|\vec{a}|$ . De vector  $2\vec{a}$  heeft dezelfde richting als de vector  $\vec{a}$ , maar is twee keer zo lang. De vector  $-\vec{a}$  is even lang als  $\vec{a}$ , maar heeft de tegengestelde richting. Je noemt de vectoren  $\vec{a}$  en  $-\vec{a}$  tegengesteld.*



- Vector  $\overrightarrow{BH} = (-3, -4, 5)$  is de verplaatsing van  $B$  naar  $H$ . Zie bovenstaande figuur. Wat opvalt zijn de negatieve waarden voor  $x$  en  $y$ . De verplaatsing is in de negatieve richting van de  $x$  en  $y$  coördinaten. Ook hier “werkt” het beeld van een kracht. Nota Bene: hier is weer de rij-notatie gebruikt volgens de 2010 uitgave.



- Een vlak,  $EOCF$ , vlak door  $E, O, C, F$ , loopt oneindig door naar alle kanten.  
 - Vectoren kunnen we optellen en/of aftrekken met als resultaat een nieuwe vector:

Bijvoorbeeld:  $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BH} = (3, 4, 0) + (-3, -4, 5) = (0, 0, 5)$ . Een vector vanuit de oorsprong langs de  $z$ -as:  $\overrightarrow{OH}$ .

De somvector  $\vec{p} + \vec{q}$  van twee vectoren  $\vec{p}$  en  $\vec{q}$  vind je door eerst ‘traject’  $\vec{p}$  af te leggen en daar achteraan ‘traject’  $\vec{q}$ . De richting van vector  $\vec{p} + \vec{q}$  is dan vastgelegd door het beginpunt van  $\vec{p}$  en het eindpunt van  $\vec{q}$ . Dit heet de kop-staart methode.

De verschilvector  $\vec{p} - \vec{q}$  is de somvector van  $\vec{p}$  en  $-\vec{q}$ . Dus  $\vec{p} - \vec{q} = \vec{p} + (-\vec{q})$ .

De som van twee tegengestelde vectoren is de nulvector  $\vec{0}$ . De nulvector heeft lengte nul en geen richting.

- In een assenstelsel kun je vectoren beschrijven met behulp van kentallen. De vector  $\overrightarrow{OF}$  hebben we beschreven met drie kentallen: Een drie dimensionaal assenstelsel.

In een twee dimensionaal assenstelsel,  $x, y$  wordt de vector beschreven door twee kentallen.

- De kentallen van de vector  $\overrightarrow{AP}$  vind je uit de punten  $A(a, b)$  en  $P(p, q)$  met de berekening:  $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - a \\ q - b \end{pmatrix}$

of in rijpresentatie:  $\overrightarrow{AP} = (p, q) - (a, b) = (p - a, q - b)$ .

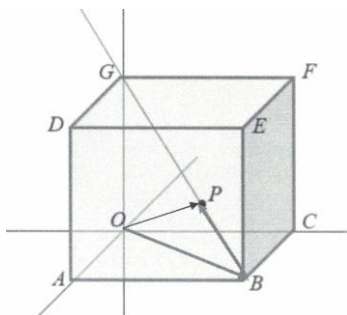
Voorbeeld:

- Kubus  $ABCDEFGH$  met ribbe 3 cm. (Zie onderstaande figuur).

- Punt  $P$  ligt op de lijn  $BG$ .

-  $BP = \frac{1}{3} BG$ .

Gevraagd de coördinaten van  $P$ .



$$\overrightarrow{BG} = (-3, -3, 3)$$

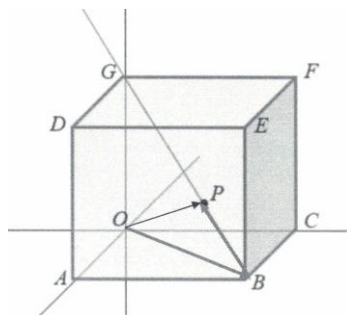
$$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3} \cdot (-3, -3, 3) = (-1, -1, 1)$$

$$\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} = (3, 3, 0) + (-1, -1, 1) = (2, 2, 1).$$

Er moet een onderscheid gemaakt worden tussen een plaats- en een richtingsvector. Zie hierna bij de parametervoorstelling van een lijn.

- Parametervoorstelling

Voorbeeld:



Gegeven

- Kubus  $ABCODEFG$  met ribbe 3 cm.

- Punt  $P$  ligt op de lijn  $BG$ .

-  $BP = \frac{1}{3} BG$ .

$$\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{BG}.$$

Met de vergelijking

$$\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OB} + t \cdot \overrightarrow{BG},$$

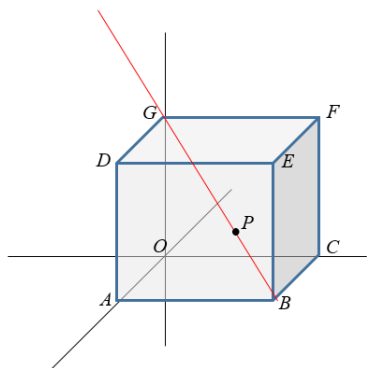
kun je alle punten  $P$  op de oneindige lijn door  $BG$  berekenen.  $t$  is een willekeurig te kiezen reëel getal.

Voorbeeld:

- kubus  $ABCODEFG$  met ribbe van 3 cm, zie volgende pagina.

- punt  $P$  ligt op de lijn  $BG$ .

Ga na of het punt  $P(-93, -93, -90)$  op de lijn  $BG$  ligt.

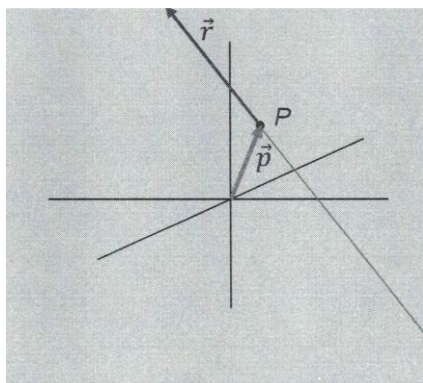


$$(-93, -93, -90) = \overrightarrow{OB} + t \cdot \overrightarrow{BG} = (3, 3, 0) + t \cdot (-3, -3, 3) = (3 - 3t, 3 - 3t, 3t).$$

De elementen van de vectoren aan elkaar gelijkstellen (ik doe dat nu in kolomrepresentatie als een reminder):

$$\begin{pmatrix} -93 \\ -93 \\ -90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 3t \\ 3 - 3t \\ 3t \end{pmatrix} \rightarrow t = -30 \rightarrow 3 - 3t = 93 \neq -93.$$

$P$  ligt niet op de lijn.



Gegeven: zie bovenstaande figuur,

-  $P$  met vector  $\vec{p} = (a, b, c)$ . Deze vector begint in de oorsprong van het assenstelsel en wordt de **plaatsvector** of wel **steunvector** genoemd

- vector  $\vec{r} = (d, e, f)$ . Deze vector begint aan het einde van de plaats vector (soms ook steunvector genoemd), dus bij  $P$ , en wordt de **richtingsvector** genoemd.

Dan geldt  $(x, y, z) = \vec{p} + t \cdot \vec{r} = (a, b, c) + t \cdot (d, e, f) = (a + t \cdot d, b + t \cdot e, c + t \cdot f)$ .

Dit noemen we een **parametervoorstelling** of vectorvoorstelling van de lijn door  $P$  en met richting  $\vec{r}$  waarop  $(x, y, z)$  ligt.

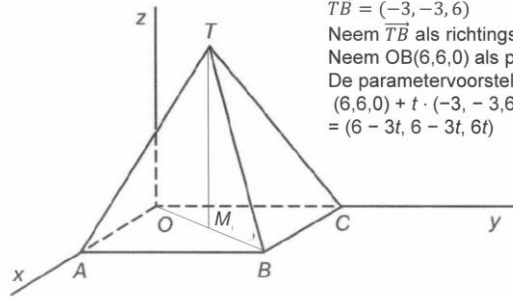
$t$  is een vrij te kiezen reëel getal, de **parameter**.

$\vec{p}$  is de **plaatsvector**.

$\vec{r}$  is de **richtingsvector**.

Voorbeeld:

Gegeven:  $A(6,0,0)$ ,  $B(6,6,0)$ ,  $C(0,6,0)$ ,  $T(3,3,6)$   
 Bereken het snijpunt van het vlak door BCT en de z-as.



$\vec{TB} = (-3, -3, 6)$   
 Neem  $\vec{TB}$  als richtingsvector.  
 Neem  $OB(6,6,0)$  als plaatsvector.  
 De parametervoorstelling is:  
 $(6,6,0) + t \cdot (-3, -3, 6) =$   
 $= (6 - 3t, 6 - 3t, 6t)$

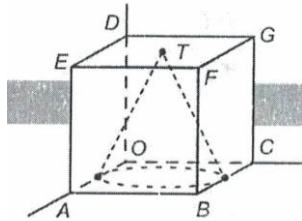
Aanpak: Kijk eerst goed naar de figuur en de ligging van het vlak ten opzichte van de z-as. Kies een lijn in het vlak  $TBC$  die de z-as snijdt. Dat is het gevraagde snijpunt.

$M$  is het snijpunt van de loodlijn uit  $T$  op het grondvlak.  $M$  ligt op  $OB$ . De lijn door  $TB$  ligt in het vlak door de z-as en  $OB$ . Deze lijn snijdt dus de z-as. De richtingsvector  $\vec{TB}$  begint in het punt  $B$ . Met de parametervoorstelling  $(6 - 3t, 6 - 3t, 6t)$  vind je het snijpunt met de z-as.

Het snijpunt met de z-as:  $x, y = 6 - 3t = 0 \rightarrow t = 2$  en het snijpunt  $(0,0,12)$ .

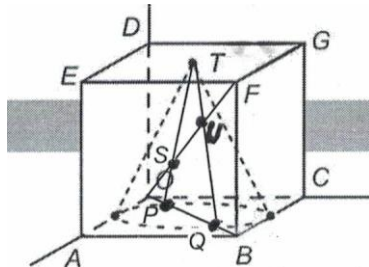
Oefenen en uitgewerkte Oefenopgave.

#### Opgave 5 §1



$OABC.DEFG$  is een recht blok met  $A(40,0,0)$ ,  $C(0,30,0)$  en  $D(0,0,40)$ . In het blok zit een kegel met top  $T(20,15,40)$ . De grondcirkel van de kegel ligt in het  $Oxy$ -vlak. De lijn  $OF$  snijdt de kegel in twee punten  $S$  en  $U$ . Het punt dat het dichtst bij  $O$  ligt is  $S$ .

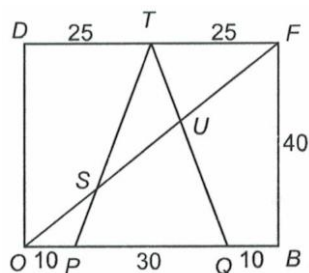
a) In onderstaande figuur zijn de punten  $S$  en  $U$  getekend.



De snijpunten liggen in het vlak  $OBFD$ .

b) In onderstaande Figuur is de rechthoek  $OBDF$  getekend. De doorsnede van de kegel is getekend met de punten  $S, U, P$  en  $Q$ .

We gaan de hoogte van  $S$  en  $U$  berekenen en maken daarbij gebruik van gelijkvormigheid.



$\Delta TSF$  is een uitvergroting  $\Delta SOP$ : gelijkvormigheid  $\Rightarrow$  De hoeken van de driehoeken zijn gelijk.

Uit de gegevens (coördinaten) volgt dat  $OA = 40$ , en  $AB = 30 \Rightarrow OB = \sqrt{OA^2 + AB^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = \sqrt{2500} = 50$ .

$\Delta QUO$  is een vergroting van  $\Delta TUF$ : gelijkvormigheid  $\Rightarrow$  De hoeken van de driehoeken zijn gelijk.

$PQ = 30 (= AB) \Rightarrow OP = 10 = QB$ . Verder  $TF = TD = \frac{50}{2} = 25$ .

Op deze wijze vinden we dat  $\frac{TF}{OP} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$ ,  $\Rightarrow$  de hoogtelijn uit  $S (= a)$  op  $DF$  staat tot de hoogtelijn uit  $S (= b)$  op  $OB$  is ook  $\frac{5}{2}$ . De beide hoogtelijnen opgeteld zijn gelijk aan  $FB (= DO) = 40 \Rightarrow a + b = 40 \Rightarrow \frac{5}{2} \cdot b + b = 40 \Rightarrow b = \frac{80}{7}$ .

Verder  $\frac{OQ}{TF} = \frac{40}{25} = \frac{8}{5}$ ,  $\Rightarrow$  de hoogtelijn uit  $U (= c)$  op  $OB$  staat tot de hoogtelijn uit  $U (= d)$  op  $DF$  is ook  $\frac{8}{5}$ . De beide hoogtelijnen opgeteld zijn gelijk aan  $FB (= DO) = 40 \Rightarrow c + d = 40 \Rightarrow \frac{8}{5} \cdot d + d = 40 \Rightarrow c = \frac{320}{13}$ .

**c)** We kunnen de coördinaten van  $S$  (en  $U$ ) ook met behulp van de parametervoorstellingen van lijnen berekenen. De coördinaten van  $P$ ?

Uit bovenstaande figuur volgt dat  $P$  op  $1/5$  van  $OB$  ligt  $\Rightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{1}{5} \overrightarrow{OB}$ .

We weten de coördinaten van  $B \Rightarrow (40, 30, 0)$ . Dus uit  $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{5} \overrightarrow{OB}$  volgt  $P = (8, 6, 0)$ .

**d)** De parametervoorstelling van de lijn  $TP$ ?

Voor punt  $T$  geldt:  $T = (20, 15, 40)$ . We hebben ook een plaatsvector  $\overrightarrow{OP} = (8, 6, 0)$ .

Een punt op de lijn  $TP$ :  $(x, y, z) \Rightarrow (x, y, z) = \vec{p} + t \cdot \vec{r}$ ,

met  $\vec{p}$  als plaatsvector en  $\vec{r}$  als richtingsvector.

Dus,  $(x, y, z) = \vec{p} + t\vec{r} = (8, 6, 0) + t \cdot \vec{r}$ .

Hoe vinden we de richtingsvector? Daartoe maken we een handige keuze voor een punt  $(x, y, z)$  op de lijn

$TP \Rightarrow$  het punt  $T = (20, 15, 40)$ . Voor de parameter  $t$  kiezen we  $t = 1$ .

Dit vullen we in:  $(x, y, z) = (8, 6, 0) + t \cdot \vec{r} \Rightarrow (20, 15, 40) = (8, 6, 0) + \vec{r} \Rightarrow \vec{r} = (12, 9, 40)$ .

De parametervoorstelling van de lijn  $TP$ :  $(x, y, z) = (8, 6, 0) + t(12, 9, 40) = (8 + 12t, 6 + 9t, 40t)$ .

Opmerking: we kunnen ook  $\overrightarrow{PT}$  als richtingsvector kiezen. Voor  $\overrightarrow{PT}$  vind je:  $\overrightarrow{PT} = (12, 9, 40)$ . Deze coördinaten vind je door van  $P$  naar  $T$  langs de lijn  $PT$  te gaan  $\Rightarrow$  25 de diagonaal  $OB$  en 40 omhoog.

$15 = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow$  dat wil zeggen:  $+12$  in de  $x$ -richting en  $+9$  in de  $y$ -richting  $\Rightarrow \overrightarrow{PT} = (12, 9, 40)$ .

**e)** Alle punten van de lijn  $OF$  hebben twee coördinaten gelijk.

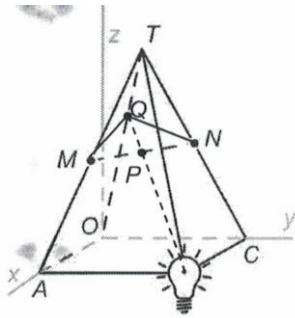
De twee coördinaten?

De coördinaten van  $F$  zijn  $(40, 30, 40)$ .  $\Rightarrow$  De  $x$  en  $z$  coördinaat zijn gelijk. In de  $x$  en  $z$  richting heeft het blok gelijke afmetingen. Op de lijn  $OF$  hebben alle punten gelijke  $x$  en  $z$  coördinaten.

De coördinaten van het punt  $S$ : dit punt ligt op de lijn  $OF$  en door  $P$  en  $T$ . Nu gebruiken we  $x = z$ . Dan vinden we met de parametervoorstelling van de lijn  $TP$ :  $(x, y, z) = (8 + 12t, 6 + 9t, 40t) \Rightarrow 8 + 12t = 40t \Rightarrow t = \frac{2}{7}$ .

De coördinaten van het punt  $S$ :  $(8 + 12 \cdot \frac{2}{7}, 6 + 9 \cdot \frac{2}{7}, 40 \cdot \frac{2}{7}) = (\frac{80}{7}, \frac{60}{7}, \frac{80}{7})$ .

### Opgave 6 § 1



$T$ .  $OABC$  is een regelmatig vierzijdige piramide met  $A(4,0,0)$ ,  $C(0,4,0)$  en  $T(2,2,6)$ .  $M$  is het midden van ribbe  $AT$  en  $N$  van ribbe  $CT$ . In  $B$  schijnt een lampje.

**a)** Teken de schaduw van lijnstuk  $MN$  op de zijvlakken  $AOT$  en  $COT$  van de piramide.

Begin met een rechte lijn van  $B$ , het lampje, naar het midden van  $MN \rightarrow P$ . Verleng de lijn  $BP$  tot deze  $OT$  snijdt in  $Q$ . De schaduw van lijnstuk  $MN$  op de zijvlakken  $AOT$  en  $COT$  van de piramide is  $MQN$ .

**b)** Geef een parametervoorstelling (PV) van de lijn  $OT$ . Geef ook een PV van de lijn door  $B$  en het midden van  $MN$ , met parameter  $s$ .

Hiertoe gebruiken we de PV van de lijn  $OT$ .

De coördinaten van  $T$  zijn:  $(2,2,6)$ . De richtingsvector van een lijn door  $OT$  is  $(2,2,6) \rightarrow t = (2,2,6)$ , de parameter. Deze kan je vereenvoudigen tot  $(1,1,3)$ . Een PV een lijn door  $OT$ :  $(0,0,0) + t \cdot (1,1,3) = (t, t, 3t)$ , steunvector + richtingsvector. In dit geval is de steunvector eenvoudig de nulvector.

De coördinaten van  $B$  zijn  $(4,4,0)$  en van het midden van  $MN$  zijn  $(2,2,3)$ . Nota Bene: deze laatste coördinaten volgen rechtstreeks uit de coördinaten van  $T \rightarrow (2,2,\frac{6}{2})$ . Een PV van de lijn door  $B(4,4,0)$  en het midden van  $MN(2,2,3)$  heeft als steunvector  $(4,4,0)$  en richtingsvector  $(-2,-2,3)$ , ofwel:

$$(x, y, z) = (4,4,0) + s \cdot (-2, -2, 3) = (4 - 2s, 4 - 2s, 3s).$$

**c)** Wat moet je voor  $s$  en  $t$  nemen om in beide PV's hetzelfde punt te krijgen?

Je moet vergelijken:  $(4 - 2s, 4 - 2s, 3s)$  en  $(t, t, 3t)$ . Dus  $t$  met  $4 - 2s$  en  $3t$  met  $3s$ . Twee vergelijkingen met twee onbekenden:  $t = s$  en  $3t = 4 \rightarrow t = s = \frac{4}{3} \rightarrow Q = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, 4)$ .

**d)** Hoe hoog bevindt de knik van de schaduw zich?

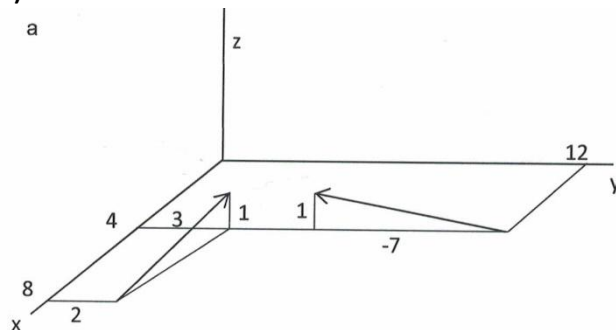
De  $z$ -coördinaat is 4.

### Opgave 8 van § 1

In een woestijnachtig oorlogsgebied stijgen vliegtuigen op om de vijandelijke stellingen te bestoken.

Luchtafweergeschut probeert de vliegtuigen neer te halen. In een assenstelsel kunnen we de situatie als volgt beschrijven. In punt  $(4,12,0)$  starten de vliegtuigen in de richting  $(0,-7,1)$ . In punt  $(8,2,0)$  worden raketten afgeschoten in de richting  $(-4,1,1)$ .

**a)** Een schets van de situatie:



**b)** Snijden de banen van de vliegtuigen en de raketten elkaar?

De banen in parametervoorstelling:

- de vliegtuigen:  $(x, y, z) = (4, 12, 0) + t(0, -7, 1) = (4, 12 - 7t, t)$ ,

- de raketten:  $(x, y, z) = (8, 2, 0) + s(-4, 1, 1) = (8 - 4s, 2 + s, s)$ .

Als er een snijpunt is, dan moeten de coördinaten voor bepaalde waarden van  $t$  en  $s$  gelijk zijn.

Voor de x-coördinaat moet dan gelden  $s = 1$ . Hieruit volgt voor de z-coördinaat  $s = t = 1$ .

Maar dit geeft een ongelijkheid voor de y-coördinaat:  $12 - 7t = 12 - 7 = 5$ , en  $2 + s = 2 + 1 = 3$ .

De banen snijden elkaar niet.

**c)** De afvuurrichting van de raketten zodat de banen elkaar snijden?

Kies voor de afvuurrichting een variabele z-coördinaat  $a$ :  $(-4, 1, a) \Rightarrow (x, y, z) = (8 - 4s, 2 + s, a \cdot s)$ .

Als deze lijn van de afvuurrichting de lijn van de vliegtuigen moet snijden, dan geldt voor  $t$  en  $s$ :

$$4 = 8 - 4s,$$

$$12 - 7t = 2 + s,$$

en

$$t = a \cdot s.$$

Uit de eerste vergelijking volgt  $s = 1$ ,

dan volgt uit de tweede vergelijking  $t = \frac{9}{7}$ ,

en uit de derde vergelijking  $a = \frac{9}{7}$ .

De afvuurrichting is dan:  $(-4, 1, \frac{9}{7})$ .

Opmerking bij de parametervoorstelling:

Als je het snijpunt van twee lijnen waarvan je parametervoorstelling hebt, wil berekenen, moet je verschillende variabelen nemen voor de parameters. Zie ook bijvoorbeeld opgave 6b.

Als je dezelfde variabelen neemt, ga je ervanuit dat je op hetzelfde moment in het snijpunt bent.

## Oefenen

De opgaven van paragraaf 1.

## Blok 6 Les 2 Loodrechte stand en inproduct.

Deze les sluit aan bij het lespakket Inproduct van de Wageningse Methode, 2010.

<http://www.wageningse-methode.nl/m/456%20wiskunde%20D/5.%20Inproduct/>

- **Snijden, evenwijdig of kruisen?**

Doel is het bepalen van de hoek tussen twee lijnen in de ruimte. Snijden de lijnen elkaar, kruisen ze elkaar of staan ze loodrecht op elkaar. Ook wordt nagegaan of twee lijnen loodrecht op elkaar staan.

- *Snijdende en evenwijdige lijnen liggen in één vlak.*

- *Kruisende lijnen liggen niet in één vlak.*

In de ruimte kunnen lijnen evenwijdig lopen. Dan liggen ze weer in één vlak.

als twee lijnen elkaar snijden, heb je vier hoeken. Als de lijnen loodrecht op elkaar staan, zijn de vier hoeken even groot, namelijk  $90^\circ$ . Als ze niet loodrecht op elkaar staan heb je twee even grote stompe hoeken en twee even grote scherpe hoeken. Met de hoek tussen twee lijnen bedoelen we de grootte van de scherpe hoeken.

- **Hoek tussen twee kruisende lijnen bepalen.**

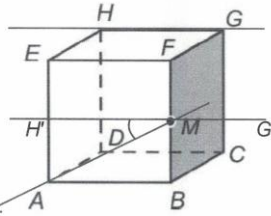
Voorbeeld:

Lijnen door  $AM$  en  $HG$  kruisen elkaar.

Verplaats lijn  $HG$  evenwijdig aan zichzelf zodat lijn  $H'G'$  in één vlak ligt met  $AM$ .

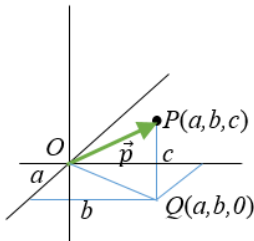
De hoek tussen de kruisende lijnen is de hoek tussen de twee snijdende lijnen.

NB: Je had ook lijn  $AM$  naar  $HG$  kunnen verplaatsen. De gevraagde hoek zit dan bij  $G$ .



Dus: Verschuif één van de lijnen zodanig dat beide dat beide lijnen in één vlak liggen. Dan snijden de lijnen elkaar en kun je de hoek tussen de lijnen bepalen. Echter, dat zal niet altijd zo eenvoudig gaan. Construeer dan een hulplijn.

- Lengte van een vector.

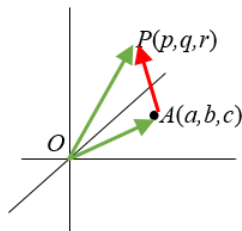


$|\vec{p}| = |\vec{OP}|$  is de lengte van de vector vanuit de oorsprong van het assenstelsel naar  $P$  met coördinaten  $(a, b, c)$ :  $\vec{OP} = (a, b, c)$  of  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ .

Met Pythagoras  $|\vec{OP}|^2 = a^2 + b^2 + c^2$

en  $|\vec{p}| = |\vec{OP}| = \sqrt{|\vec{OQ}|^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ .

Een ander voorbeeld:



Nu stellen we  $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$ , met  $\vec{OA}$  een vector uit de oorsprong van het assenstelsel.

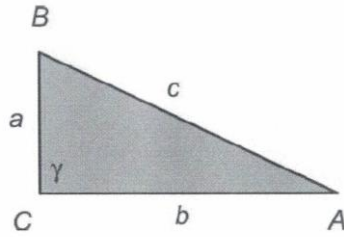
We kiezen nu andere coördinaten voor  $P$ :  $(p, q, r)$ . Voor  $\vec{OA}$  nemen we nu  $\vec{OA} = (a, b, c)$ .

We hebben dan  $\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA} = (p, q, r) - (a, b, c) = (p - a, q - b, r - c)$ .

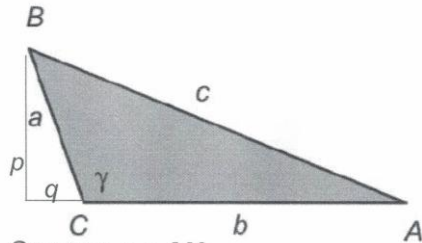
$|\vec{AP}|$  is de lengte van de vector  $\vec{AP}$ .

$|\vec{AP}|^2 = (p - a)^2 + (q - b)^2 + (r - c)^2$ .

- Rechte hoeken



$$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow \gamma = 90^\circ \text{ (Stelling van Pythagoras)}$$



Gegeven  $\gamma > 90^\circ$

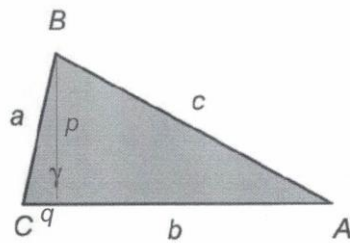
$$a^2 = p^2 + q^2$$

$$(b + q)^2 + p^2 = c^2$$

$$b^2 + 2bq + q^2 + p^2 = c^2$$

$$b^2 + 2bq + a^2 = c^2$$

$$\text{Dus } a^2 + b^2 < b^2 + 2bq + a^2 = c^2$$



Gegeven  $\gamma < 90^\circ$

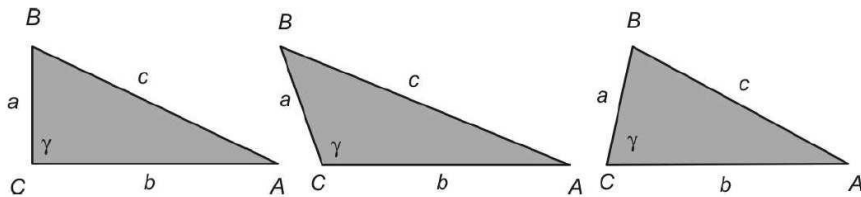
$$a^2 = p^2 + q^2$$

$$(b - q)^2 + p^2 = c^2$$

$$b^2 - 2bq + q^2 + p^2 = c^2$$

$$b^2 - 2bq + a^2 = c^2$$

$$\text{Dus } a^2 + b^2 > b^2 - 2bq + a^2 = c^2$$



$$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow \gamma = 90^\circ \left( \equiv \frac{\pi}{2} \right)$$

$$a^2 + b^2 < c^2 \Leftrightarrow \gamma > 90^\circ$$

$$a^2 + b^2 > c^2 \Leftrightarrow \gamma < 90^\circ$$

In feite is bovenstaand in plaats van  $\Leftrightarrow$  alleen de richting  $\Leftarrow$  bewezen.

De pijlen  $\Leftarrow$  mogen ook worden omgekeerd  $\Rightarrow$ .

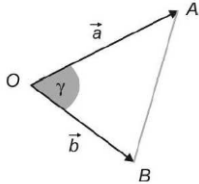
Uitwerking:

Uit het ongerijmde.

Stel  $a^2 + b^2 = c^2$  en  $\gamma \neq 90^\circ$ .

Dan is  $\gamma > 90^\circ$  of  $\gamma < 90^\circ$ . In beide gevallen geeft dat een tegenspraak met de aanname dat  $a^2 + b^2 = c^2$ .

De beide andere beweringen bewijs je op dezelfde wijze.



Gegeven  $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  en  $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ .

Dan is  $\overrightarrow{BA} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$ .

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BA}|^2 &= (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = \\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2a_1b_1 - 2a_2b_2 - 2a_3b_3, \end{aligned}$$

en

$$|a|^2 + |b|^2 = |\overrightarrow{BA}|^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3).$$

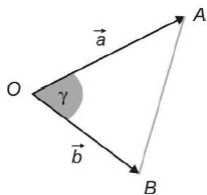
Volgens het voorafgaande:

$$\gamma = 90^\circ \Leftrightarrow |a|^2 + |b|^2 = |\overrightarrow{BA}|^2 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$$

$$\gamma < 90^\circ \Leftrightarrow |a|^2 + |b|^2 > |\overrightarrow{BA}|^2 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 > 0.$$

$$\gamma > 90^\circ \Leftrightarrow |a|^2 + |b|^2 < |\overrightarrow{BA}|^2 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 < 0.$$

- Het inproduct.



Gegeven  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  en  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ .

$\gamma$  is de hoek tussen  $\vec{a}$  en  $\vec{b}$ .

Dan is

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

het **inproduct** van  $\vec{a}$  en  $\vec{b}$ .

$\gamma$  is de hoek tussen  $\vec{a}$  en  $\vec{b}$ .

Er geldt, gelet op het voorafgaande

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \gamma = 90^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow \gamma < 90^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow \gamma > 90^\circ$$

Eigenschappen van het inproduct

$$1 \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \text{De commutatieve eigenschap}$$

$$2 \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad \text{De distributieve eigenschap}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \quad \text{idem}$$

$$3 \quad (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k\vec{a} \cdot \vec{b} \quad \text{de scalaire vermenigvuldiging met } k.$$

$$4 \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \quad \text{het kwadraat van de lengte van } \vec{a}.$$

Gegeven:

$\vec{a}$  en  $\vec{b}$  hebben dezelfde richting dus  $\vec{b} = k\vec{a}$  en  $k > 0$

Laat zien dat  $|\vec{b}| = k|\vec{a}|$

Uitwerking

$$|\vec{b}|^2 = \vec{b} \cdot \vec{b} = (k\vec{a}) \cdot (k\vec{a}) = k^2|\vec{a}|^2.$$

$$\text{Dus } |\vec{b}| = \sqrt{k^2|\vec{a}|^2} = \sqrt{k^2}\sqrt{|\vec{a}|^2} = k|\vec{a}|$$

Gegeven:

$\vec{a}$  en  $\vec{b}$  hebben tegengestelde richting dus  $\vec{b} = k\vec{a}$  en  $k < 0$

Laat zien dat  $|\vec{b}| = -k|\vec{a}|$

Uitwerking

$$|\vec{b}|^2 = \vec{b} \cdot \vec{b} = (k\vec{a}) \cdot (k\vec{a}) = k^2|\vec{a}|^2.$$

$$\text{Dus } |\vec{b}| = \sqrt{k^2|\vec{a}|^2} = \sqrt{k^2}\sqrt{|\vec{a}|^2} = -k|\vec{a}|$$

Gegeven:

$$\vec{b} = k\vec{a}$$

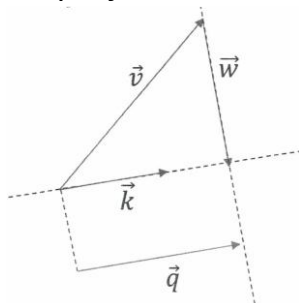
Laat zien dat  $\text{abs}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

Uitwerking

$$\text{Gebruik } |\vec{b}| = \text{abs}(k)|\vec{a}|$$

$$\text{abs}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \text{abs}(\vec{a} \cdot k\vec{a}) = \text{abs}[k(\vec{a} \cdot \vec{a})] = \text{abs}(k)|\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$$

- De projectie van een vector op een lijn



De vector  $\vec{q}$  is de loodrechte projectie van de vector  $\vec{v}$  op de richtingsvector  $\vec{k}$ .

Bereken  $|\vec{q}|$ .

De vector  $\vec{w}$  staat loodrecht op  $\vec{k}$ .

Dan geldt:

$\vec{k}$  en  $\vec{q}$  hebben dezelfde richting.

$$\vec{q} = \vec{v} + \vec{w}.$$

Dus  $\text{abs}(\vec{q} \cdot \vec{k}) = |\vec{q}| |\vec{k}|$  (Let op: dit geldt alleen als  $\vec{k}$  en  $\vec{q}$  dezelfde richting hebben)

$$\text{en } |\vec{q}| = \frac{\text{abs}(\vec{q} \cdot \vec{k})}{|\vec{k}|}.$$

We weten  $\vec{q} \cdot \vec{k} = (\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{k} = \vec{v} \cdot \vec{k} + \vec{w} \cdot \vec{k} = \vec{v} \cdot \vec{k}$  want  $\vec{w}$  staat loodrecht op  $\vec{k}$ .

$$\text{Dus } |\vec{q}| = \frac{\text{abs}(\vec{v} \cdot \vec{k})}{|\vec{k}|}.$$

- **Het inwendig- of inproduct.**

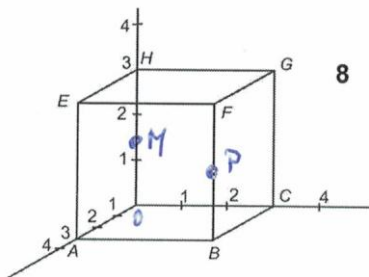
Het inwendig product is geen vector maar een reëel getal. Reële getallen worden ook wel scalair genoemd. Vandaar de benaming scalair product voor het inproduct.

Etymologie. Latijn: scalaris van scala(ladder).

Als er een inwendig product is zal er ook een uitwendig product zijn. Ik kom daarop terug bij de vergelijkingen van vlakken.

[Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven.](#)

**Opgave 8:**



Bovenstaande kubus heeft ribben met lengte 3

a) Laat met behulp van het inproduct zien dat de lijnen  $AC \perp OF$ .

$OC$  noemen we  $\vec{c}$  en  $OA \rightarrow \vec{AC} = \vec{c} - \vec{a} = (0,3,0) - (3,0,0) = (-3,3,0)$ , eindvector min de beginvector.

$\vec{OF} = (3,3,3)$ ,  $\therefore \vec{AC} \cdot \vec{OF} = (-3,3,0) \cdot (3,3,3) = -3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 0 \cdot 3 = 0$ . Dus  $AC \perp OF$ .

b)  $P$  is een punt op de lijn  $FB$ , dus  $P$  heeft de coördinaten  $(3,3,z)$ , voor zekere waarden van  $z$ .  $M$  is het midden van  $OH$ .

Bereken  $z$  als gegeven is dat  $OP$  en  $HB$  elkaar loodrecht snijden.

$$\vec{OH} + \vec{HB} = \vec{OB} \rightarrow \vec{HB} = \vec{OB} - \vec{OH} = (3,3,0) - (0,0,3) = (3,3,-3).$$

Gegeven is dat  $OP$  en  $HB$  elkaar loodrecht snijden:  $\vec{OP} \cdot \vec{HB} = 0 \Leftrightarrow (3,3,z) \cdot (3,3,0) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 - 3 \cdot z = 0 \Leftrightarrow z = 6$ . Dus het punt  $P$  ligt buiten de kubus.

c) Bereken  $z$  als gegeven is dat  $CM \perp HP$ .

$M$  is het midden van  $OH \rightarrow \vec{OM} = (0,0,\frac{3}{2})$ .

$$\vec{OC} + \vec{CM} = \vec{OM} \Leftrightarrow \vec{CM} = \vec{OM} - \vec{OC} \therefore \vec{CM} = (0,0,\frac{3}{2}) - (0,3,0) = (0,-3,\frac{3}{2}).$$

$$\vec{OH} + \vec{HP} = \vec{OP} \Leftrightarrow \vec{HP} = \vec{OP} - \vec{OH} \therefore \vec{HP} = (3,3,z) - (0,0,3) = (3,3,-z).$$

$$CM \perp HP \rightarrow \vec{CM} \cdot \vec{HP} = (0,-3,\frac{3}{2}) \cdot (3,3,-z) = 0 \therefore 0 - 9 + \frac{3}{2} \cdot z = 0 \Leftrightarrow z = 9.$$

d) Geef vier verschillende vectoren (met verschillende richting) die loodrecht op de lijn  $OF$  staan.

De richtingsvector van de lijn  $OF$ :  $\vec{OF} = (3,3,3) \rightarrow$  de richtingsvector  $\vec{f} = (3,3,3)$ . Deel de kentallen van deze richtingsvector door  $3 \rightarrow (1,1,1)$ . Dit is ook de richtingsvector van de lijn  $OF$ . Neem een vector met de willekeurige

kentallen  $(p, q, r)$ . Het inproduct met de richtingsvector  $(1,1,1) \rightarrow (p, q, r) \cdot (1,1,1) = p + q + r$ . Als  $p + q + r = 0$ , dan staat de vector  $(p,q,r)$  loodrecht op de lijn OF.

$p + q + r = 0 \rightarrow$  oneindig veel mogelijkheden voor  $p, q$  en  $r$ .

Voorbeeld:  $(1,-1,0)$ ,  $(1,0,-1)$ ,  $(0,1,-1)$  en  $(1,1,-2) \perp (1,1,1)$ .

**Opgave 13** de projectie van een vector op een lijn

**a)** de grootte van de projectie van  $\vec{v}$  op een lijn met richtingsvector  $\vec{r}$ ?

$\vec{v} = (5, -3, -3)$  en  $\vec{r} = (1, 2, 2)$ .

De formule:  $|\vec{q}| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{r}|}{|\vec{r}|} = \frac{|(5, -3, -3) \cdot (1, 2, 2)|}{|((1, 2, 2))|} = \frac{|5 \cdot 1 + (-3 \cdot 2) + (-3 \cdot 2)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{7}{3}$ .

**b)** idem

$\vec{v} = (5, -3, 1)$  en  $\vec{r} = (4, 4, -7)$ .

de grootte van de projectie:

$$\frac{|5 \cdot 4 + (-3 \cdot 4) + (1 \cdot -7)|}{\sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2}} = \frac{1}{9}.$$

**c)** idem

$\vec{v} = (5, -3, -1)$  en  $\vec{r} = (3, 1, 12)$ .

de grootte van de projectie:

$$\frac{|5 \cdot 3 + (-3 \cdot 1) + (-1 \cdot 12)|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 12^2}} = 0.$$

**Opgave 14 § 2**

**a)** Gegeven de vector  $(2, 3)$ .

Voor welk getal  $a$  geldt: de vector  $(3, a)$  staat loodrecht op de vector  $(2, 3)$ ?

Als de vectoren loodrecht op elkaar staan is het inproduct gelijk aan 0:

Dus,  $(2, 3) \cdot (3, a) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 3 + 3 \cdot a = 0 \Leftrightarrow a = -2$ .

**b)** Een vector die loodrecht op  $(7, -2)$  staat?

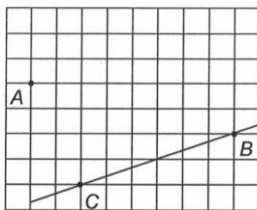
Een willekeurige vector  $(x, y) \Rightarrow (x, y) \cdot (7, -2) = 0 \Leftrightarrow 7x - 2y = 0$ .

Je kiest nu een  $x$  en een  $y$ , zodat aan  $7x - 2y = 0$ , wordt voldaan. Hiervoor zijn oneindig veel mogelijkheden, bijvoorbeeld  $x = 2$  en  $y = 7$ .

**c)** Ga met het inproduct na dat de vectoren  $(a, b)$  en  $(a, -b)$  loodrecht op elkaar staan.

$(a, b) \cdot (b, -a) = a \cdot b - b \cdot a = 0$ .

**Opgave 15 § 2**



**a)** In het rooster hierboven zijn de punten  $A(1,5)$ ,  $B(9,3)$  en  $C(3,1)$  getekend.

De vergelijking van de lijn  $BC$ ?

- Snelle methode: de vergelijking van de lijn door twee punten is hier een rechte  $y = ax + b$ . Twee onbekende  $a$  en  $b$ . Twee punten  $\Rightarrow 3 = a \cdot 9 + b$ , en  $1 = 3 \cdot a + b \Rightarrow a = \frac{1}{3}$ ,  $b = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x$ .

- Met  $\vec{CB}$  als richtingsvector:  $\vec{CB} = \vec{b} - \vec{c} = (9,3) - (3,1) = (6,2)$ . De richtingscoëfficiënt(rc) van de lijn is  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ .

De lijn gaat door  $(3,1)$ , dus moet gelden met  $x = 3, y = 1$ , en  $rc = \frac{1}{3}$ :

$y = ax + b \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{3} \cdot 3 + b \Leftrightarrow b = 0$ . De vergelijking van de lijn  $BC$  is dan  $y = \frac{1}{3}x$ .

**b)** Parametervoorstelling van de lijn door  $A$  loodrecht op de lijn  $BC$ ?

De lijn door  $A$  loodrecht op de lijn  $BC$ :  $y = cx + d$ . De lijn  $\perp BC$  heeft als  $rc = -3$ , want  $\frac{1}{3} \cdot -3 = -1$ . De lijn door  $A$

is  $y = -3x + d$ . Deze lijn gaat ook door het punt  $A(1,5)$ :  $5 = -3 + b \Rightarrow b = 8 \Rightarrow y = -3x + 8$ .

Nu de parametervoorstelling. Kies een steunvector:  $\overrightarrow{OA} = (1,5)$ . De richtingsvector staat loodrecht op de richtingsvector van de lijn  $BC$ , dus loodrecht op  $(6,2)$ . Dus bijvoorbeeld  $(-1,3)$ . Dit is dan de gevraagde richtingsvector. Voor de parametervoorstelling hebben we dan:  $(x, y) = (1,5) + t \cdot (-1,3) = ((1-t), (5+3t))$ .

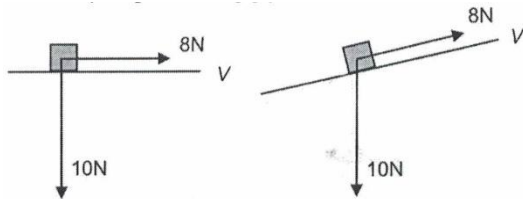
c) De coördinaten van het snijpunt  $S$  van de loodrechte projectie van  $A$  op de lijn  $BC$ ?

Uit de parametervoorstelling van de lijn  $\perp BC$  volgt:  $x_S = 1 - t, y_S = 5 + 3t$ . Het punt  $(x_S, y_S)$  ligt ook op de lijn  $y = \frac{1}{3}x \Rightarrow x_S = 3y_S$ . Met deze gegevens:  $3y_S = 1 - t, y_S = 5 + 3t \Rightarrow t = -\frac{7}{5} \Rightarrow x_S = \frac{12}{5}, y_S = \frac{4}{5}$ .

### Opgave 16 § 2

Een voorwerp met een gewicht van 10N kan wrijvingsloos bewegen over een vlak  $V$ .

Zie onderstaande tekening.



Er wordt met een kracht van 8N aan het gewicht getrokken. Als het vlak  $V$  onder een hoek wordt gehouden, krijgt de trekkracht tegenwerking van de zwaartekracht. Als de hoek verder wordt vergroot, zal het gewicht langs  $V$  omlaaggliden. We brengen het gebruikelijke assenstelsel aan: de positieve  $x$ -as naar rechts en de positieve  $y$ -as naar boven.

a) Neem aan dat  $V$  de helling 2 heeft. Dat wil zeggen 1 naar rechts en 2 omhoog. De tangens van de hellingshoek is 2. De richting van  $V$  is  $(1,2)$ , en de zwaartekracht (het gewicht) heeft de richting  $(0,10)$ .

De grootte van de projectie van de kracht van 10N in de richting van het vlak  $V$ ? Zie de formule voor de projectie op bovenstaande bladzijden 182 en 183. Volgens de definitie geldt  $\vec{q} = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{k}|}{|\vec{k}|}$ .

Met  $\vec{v} = (0,10)$ , en  $\vec{k} = (1,2)$  vinden we:

$$|\vec{v} \cdot \vec{k}| = (0,10) \cdot (1,2) = 0 \cdot 1 + 10 \cdot 2 = 20,$$

$$|\vec{k}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Dus met  $\vec{q} = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{k}|}{|\vec{k}|} = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5} > 8\text{N}$ , met als gevolg dat het gewicht naar beneden zal glijden.

b) Neem nu aan dat de helling 1 is.

Glijdt het gewicht naar beneden?

Nu hebben we:  $\vec{k} = (1,1)$ .

$$|\vec{v} \cdot \vec{k}| = (0,10) \cdot (1,1) = 0 \cdot 1 + 10 \cdot 1 = 10,$$

$$|\vec{k}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Dus met  $\vec{q} = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{k}|}{|\vec{k}|} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} < 8\text{N}$ , met als gevolg dat het gewicht niet naar beneden zal glijden.

c) We gaan de kritische waarde van de helling bepalen, het helling getal van  $V$  waarbij het gewicht in evenwicht is met de kracht van 8N.

$\vec{k} = (1, a)$ .

$$|\vec{v} \cdot \vec{k}| = (0,10) \cdot (1, a) = 0 \cdot 1 + 10 \cdot a = 10a,$$

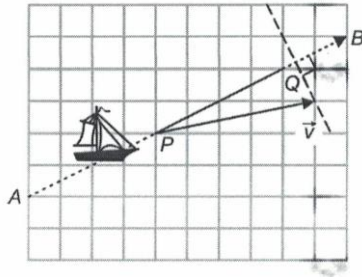
$$|\vec{k}| = \sqrt{1^2 + a^2}.$$

De projectie  $\vec{q} = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{k}|}{|\vec{k}|} = \frac{10a}{\sqrt{1^2 + a^2}}$ , en deze projectie moet gelijk zijn aan 8N.

$$\frac{10a}{\sqrt{1^2 + a^2}} = 8 \Leftrightarrow 8\sqrt{1^2 + a^2} = 10a \Leftrightarrow 64(1^2 + a^2) = 100a^2 \Leftrightarrow 64 = 36a^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{64}{36} \Leftrightarrow a = \pm \frac{4}{3}.$$

De positieve waarde heeft hier betekenis, dus de kritische waarde is  $\frac{4}{3}$ .

### Opgave 17 § 2 De Trekschuit



Een trekschuit beweegt in de richting  $\vec{r} = (2,1)$  van A naar B. De trekschuit wordt voortgetrokken door een paard. De trekkracht van het paard wordt gegeven door de vector  $\vec{v} = (5,1)$ . Zie bovenstaande schets. Voor de voortbeweging van de schuit is alleen de grootte van de projectie van  $\vec{v}$  op de richting waarin de trekschuit beweegt van belang.

De grootte van de projectie?

Volgens de definitie geldt  $\vec{q} = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{k}|}{|\vec{k}|}$ .

In dit geval is de formule  $\vec{q} = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{k}|}{|\vec{k}|} = \vec{q} = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{r}|}{|\vec{r}|} = \frac{|(5,1) \cdot (2,1)|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{5 \cdot 2 + 1 \cdot 1}{\sqrt{5}} = \frac{11}{\sqrt{5}}$ .

- Oefenen

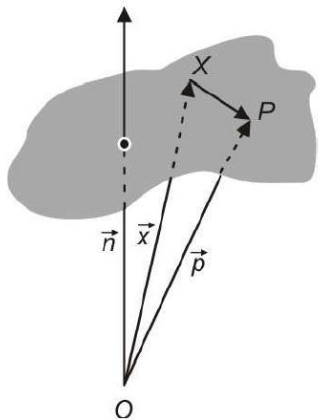
Maken: De opgaven van paragraaf 2

### Blok 6 Les 3 Vergelijkingen van vlakken

Deze les sluit aan bij het lespakket Inproduct van de Wageningse methode 2010

<http://www.wageningse-methode.nl/m/456%20wiskunde%20D/5.%20Inproduct/>

- Vergelijking en inproduct



Gegeven(zie bovenstaande figuur):

- vergelijking  $x + y + 2z = 12$ ,
- $P(12,0,0)$ , voldoet aan de vergelijking.

Stel  $\vec{n} = (1,1,2)$ , of  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{x} = (x, y, z)$ , of  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , en  $\vec{p} = (12,0,0)$ , of  $\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

dan kun je de vergelijking schrijven als

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = (1,1,2) \cdot (x,y,z) = x + y + 2z = 12.$$

$$\text{Dus } \vec{n} \cdot \vec{x} = 12.$$

$$\text{Tevens geldt: } \vec{n} \cdot \vec{p} = 12$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = \vec{n} \cdot \vec{x} - \vec{n} \cdot \vec{p} = 12 = 12 - 12 = 0.$$

Dus de vector  $\overrightarrow{XP} = \vec{x} - \vec{p}$  staat loodrecht op  $\vec{n}$ .

Conclusie:

De punten  $X(x, y, z)$  die voldoen aan de vergelijking  $x + y + 2z = 12$  liggen in een vlak door  $P$  dat loodrecht staat op  $\vec{n}$ .

De vergelijking  $ax + by + cz = d$  kun je schrijven als  $\vec{n} \cdot \vec{x} = d$  waarbij

$\vec{n} = (a, b, c)$  en  $\vec{x} = (x, y, z)$ .

De vector  $\vec{n}$  heet de normaalvector van het vlak.

De vergelijking  $ax + by + cz = 0$  past bij een vlak door de oorsprong  $O$ , dat vlak staat loodrecht op  $\vec{n} = (a, b, c)$ . De vector  $\vec{n}$  noemen we de normaalvector van het vlak.

De vergelijking  $ax + by + cz = d$ , ( $d \neq 0$ ), past bij een vlak dat evenwijdig aan het vlak door  $O$  ( $d = 0$ ) verschoven is.

De punten  $X(x, y, z)$ , coördinaten die voldoen aan de vergelijking van het vlak  $ax + by + cz = d$ .<sup>1</sup>

Voorbeeld:

De kubus heeft ribben van lengte 4.

Laat zien dat  $OF$  loodrecht staat op het vlak door  $B, E, G$ .

Met ruimtemeetkunde:

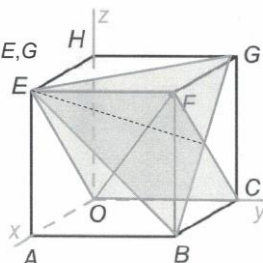
→  $OF$  kruist  $EG$  loodrecht. (1)

$OF$  ligt ook in vlak  $OCFE$ .

$OCFE$  staat loodrecht op  $BG$ .

→  $OF$  kruist  $BG$  loodrecht. (2)

Uit (1) en (2) volgt dat  $OF$  loodrecht staat op het vlak  $BEG$ .



Met inproduct:

$$\overrightarrow{OF} = (4,4,4) \text{ en } \overrightarrow{EG} = (-4,4,0).$$

$$\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{EG} = -16 + 16 + 0 = 0 \text{ dus } \overrightarrow{OF} \perp \overrightarrow{EG}.$$

$$\overrightarrow{EB} = (0,4,-4)$$

$$\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{EB} = 0 + 16 - 16 = 0 \text{ dus } \overrightarrow{OF} \perp \overrightarrow{EB}.$$

Conclusie:  $\overrightarrow{OF} \perp$  op het vlak door punten  $B, E$  en  $G$ .

- Snijpunten met de assen van het coördinatenstelsel

Gegeven het vlak  $V$  met de vergelijking  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ .

De snijpunten van  $V$  met de assen van het coördinatenstelsel:

<sup>1</sup> Nota Bene: Steeds weer coördinaten van vectoren onderscheiden. Hier zou het bijvoorbeeld handiger zijn om de vectoren in de gebruikelijke kolom notatie te presenteren.

met de x-as,  $y = 0, z = 0$ :  $(a, 0, 0)$ ,

met de y-as,  $x = 0, z = 0$ :  $(0, b, 0)$ ,

met de z-as,  $x = 0, y = 0$ :  $(0, 0, c)$ . De normaalvector is  $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$ .

Gegeven het vlak  $V$  evenwijdig met de z-as:  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ .

Een vlak evenwijdig met de z-as met als normaalvector  $(b, a, 0)$  of  $ab(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, 0)$ . De factor  $ab$  is niet relevant (maakt de normaal korter of langer).

De snijpunten van dit vlak  $V$  met de assen zijn:

$(a, 0, 0)$  met de x-as

$(0, b, 0)$  met de y-as.

Gegeven het vlak  $V$  met als vergelijking  $\frac{x}{a} = 1$ .

De snijpunten van  $V$  met de assen zijn:

$(a, 0, 0)$  met de x-as,

$V$  is evenwijdig met het y-z vlak met als normaalvector  $(a, 0, 0)$ .

Nota bene:  $(a, 0, 0) = a^2(\frac{1}{a}, 0, 0)$ . Je kan de normaal vector met een willekeurig getal vermenigvuldigen. De richting verandert niet, maar wel de grootte.

- Vlak gegeven door 3 punten

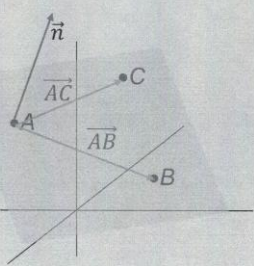
Gegeven drie punten  $A, B$  en  $C$  in de ruimte.

Vlak  $V$  gaat door  $A, B$  en  $C$ .

De vectoren  $\overrightarrow{AB}$  en  $\overrightarrow{AC}$  liggen in het vlak.

De normaal vector  $\vec{n}$  staat loodrecht op  $\overrightarrow{AB}$  en  $\overrightarrow{AC}$ .

Bereken  $\vec{n}$  om de vergelijking te bepalen.



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB},$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}.$$

Nota bene: Je kan ook voor  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$  en  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$  nemen. Dit leidt tot hetzelfde resultaat.

$$\overrightarrow{AB} = (d, e, f) \text{ en } \overrightarrow{AC} = (g, h, i). \text{ Stel } \vec{n} = (p, q, r).$$

Dan moet gelden:  $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$  en  $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0$ :

$$dp + eq + fr = 0 \text{ en } gp + hq + ir = 0.$$

Dit zijn twee vergelijkingen met drie onbekenden. Door de eerste vergelijking met  $g$  te vermenigvuldigen en de tweede  $d$  kun je  $p$  verwijderen door de twee vergelijkingen van elkaar af te trekken. Je houdt 1 vergelijking over met twee onbekenden. Je kunt nu  $q$  vrij

kiezen en  $r$  uitrekenen. Daarna kun je met één van de vergelijkingen  $p$  uitrekenen. Nu heb je  $(p, q, r)$  bepaald. De vergelijking voor het vlak:  $px + qy + rz = d$ .  $d$  vinden we door bijvoorbeeld de coördinaten van  $A$  in deze laatste vergelijking te substitueren.

Voorbeeld:

$$A(1,2,3), B(2,4,5), C(2,6,0),$$

$$\overrightarrow{AB} = (2,4,5) - (1,2,3) = (1,2,2),$$

$$\overrightarrow{AC} = (2,6,0) - (1,2,3) = (1,4,-3).$$

Voor  $\vec{n} = (p, q, r)$  moet gelden:  $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$  en  $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0$ .

Dus:  $p + 2q + 2r = 0$  en  $p + 4q - 3r = 0$ .

Trek beide vergelijkingen van elkaar af, dan verdwijnt  $p$  en hou je over:  $2q - 5r = 0$ .

Opmerking: je hebt twee vergelijkingen met drie onbekenden. Je kunt er dus altijd 1 onbekende vrij kiezen.

Kies  $q = 5 \rightarrow 2q - 5r = 0 \rightarrow r = 2 \rightarrow p + 2q + 2r = 0 \rightarrow p = -10 - 4 = -14$ .

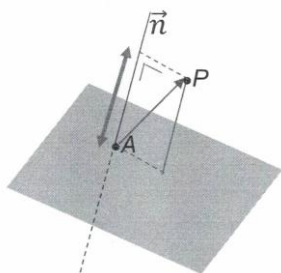
$\rightarrow \vec{n} = (p, q, r) \rightarrow (-14, 5, 2)$ .

Als controle kun je laten zien dat  $\vec{n} = (-14, 5, 2)$  loodrecht staat op  $(1, 2, 2)$  en  $(1, 4, -3)$ : het inproduct moet 0 zijn  $\rightarrow (-14, 5, 2) \cdot (1, 2, 2) = 0$

Een vergelijking van het vlak is:

$14x + 5y + 2z = d$ . Het getal  $d$  vind je door van 1 van de gegeven punten de coördinaten in de vergelijking te substitueren.

- De afstand van een punt tot een vlak.



Gegeven het punt  $P(p_1, p_2, p_3)$ ,  $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$  en het vlak  $V$  door  $ax + by + cz = d$ .

Kies een punt  $A(a_1, a_2, a_3)$  in het vlak.

De afstand van  $P$  tot het vlak  $V$  is de lengte van de projectie  $\overrightarrow{AP}$  op de normaal van het vlak  $\vec{n}$ .

$$\overrightarrow{AP} = (p_1 - a_1, p_2 - a_2, p_3 - a_3), \vec{n} = (a, b, c).$$

De lengte van de projectie is:  $\frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$ .

Met bovenstaande gegevens:

$$\frac{|\vec{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|(p_1 - a_1, p_2 - a_2, p_3 - a_3) \cdot (a, b, c)|}{|a, b, c|} = \frac{|(ap_1 - aa_1 + bp_2 - ba_2 + cp_3 - ca_3)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} =$$

$$= \frac{|(ap_1 + bp_2 + cp_3) - (aa_1 + ba_2 + ca_3)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|(ap_1 + bp_2 + cp_3) - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{p} - d|}{|\vec{n}|}.$$

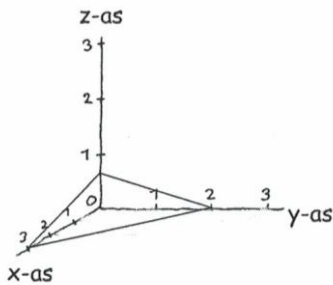
Nota Bene: de formule voor de afstand wordt afgeleid uit de projectie op de normaalvector. Zie ook Blok 6 Les 2 van deze samenvatting.

### Oefenen en uitgewerkte Oefenopgave.

#### Opgave 8 § 3

a) De snijpunten van het vlak  $2x + 3y + 12z = 6$ , met de coördinaat assen?

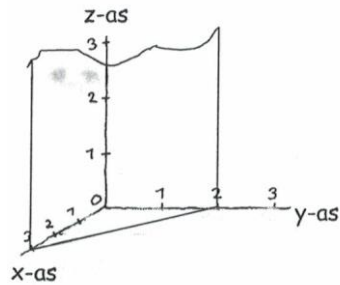
x-as:  $y, z=0 \Rightarrow x = 3$ ; y-as:  $x, z=0 \Rightarrow y = 2$ ; z-as:  $x, y=0 \Rightarrow z = \frac{1}{2}$ .



b) De snijpunten van het vlak  $2x + 3y = 6$ , met de coördinaat assen?

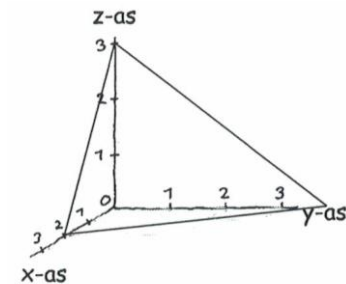
Een vlak  $\parallel$  aan de z-as.

x-as:  $y=0 \Rightarrow x = 3$ ; y-as:  $x=0 \Rightarrow y = 2$ .



c) De snijpunten van het vlak  $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1$ , met de coördinaat assen?

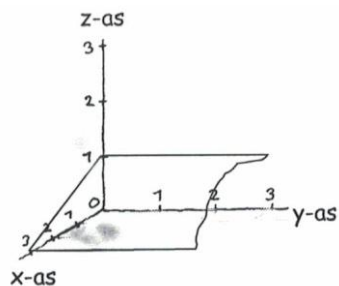
x-as:  $y, z=0 \Rightarrow x = 2$ ; y-as:  $x, z=0 \Rightarrow y = 4$ ; z-as:  $x, y=0 \Rightarrow z = 3$ .



d) De snijpunten van het vlak  $x + 3z = 3$ , met de coördinaat assen?

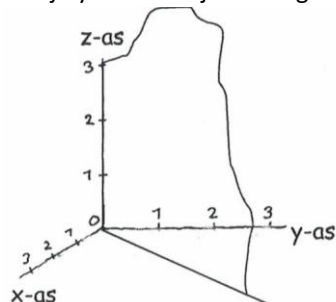
x-as:  $z=0 \Rightarrow x = 3$ ; z-as:  $x=0 \Rightarrow z = 1$ .

Een vlak  $\parallel$  aan de y-as.



e) De snijpunten van het vlak  $x - y = 0$ , met de coördinaat assen?

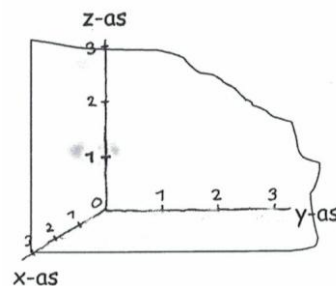
De lijn  $y=x$  is een lijn in het grondvlak. De  $z$ -as ligt in het vlak  $x - y = 0$ .



f) De snijpunten van het vlak  $2x = 6$ , met de coördinaat assen?

$x$ -as:  $x=3$ .

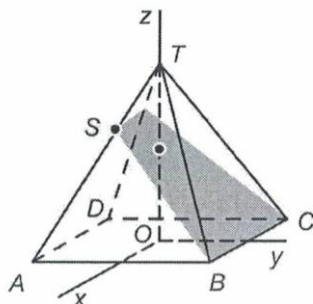
Een vlak  $\parallel y,z$ -as.



### Opgave 10 § 3

$T$ .  $ABCD$  is een regelmatige vierzijdige piramide met:  $A(3, -3, 0)$ ,  $B(3, 3, 0)$ ,  $C(-3, 3, 0)$ ,  $D(-3, -3, 0)$  en  $T(0, 0, 6)$ .

Zie onderstaande figuur.



$V$  is het vlak met vergelijking  $y + z = 3$ .

$V$  snijdt de ribbe  $AT$  van de piramide in het punt  $S$ .

De coördinaten van  $S$ ?

Een vergelijking voor de lijn, ribbe,  $AT$ . Laten we de parametervoorstelling voor  $AT$  kiezen.

Eerst de plaatsvector:  $OA: (3, -3, 0)$ .

Nu de richtingsvector: de lijn door  $AT$ . Welke stappen moeten we nemen om van  $A$  naar  $T$  te komen?

De stappen:  $x = -3, y = 3$  en  $z = 6$ . De richtingsvector is:  $(-3, 3, 6) = 3(-1, 1, 2) \Rightarrow t(-1, 1, 2)$ .

De parametervoorstelling van de lijn  $AT$ :  $(x, y, z) = (3, -3, 0) + t(-1, 1, 2)$ .

Elk punt van de lijn  $AT$  moet voldoen aan  $(x, y, z) = (3 - t, -3 + t, 2t)$ . Het punt ligt ook in het vlak  $y + z = 3$ .

Dus:  $-3 + t + 2t = 3 \Leftrightarrow t = 2$ .

De coördinaten van  $S$  zijn:  $S = (1, -1, 4)$ .

### Opgave 12 § 3

Vlak  $U$  heeft vergelijking  $2x + 3y + 4z = 6$ , vlak  $V$  heeft vergelijking  $4x + 6y + 8z = 20$ .

a) Vlak  $V$  kunnen we schrijven als  $4x + 6y + 8z = 10$ .

b) Hebben  $U$  en  $V$  gemeenschappelijke punten?

Neen, want  $2x + 3y + 4z$  kan niet tegelijkertijd 6 en 10 zijn.

$U$  en  $V$  zijn evenwijdig.

c)  $W$  is het vlak met vergelijking  $x + ay + bz = 20$ .

Vlak  $U$  is evenwijdig met vlak  $W$ .

$a, b$ ?

We herschrijven  $U$ :  $2x + 3y + 4z = 6 \Rightarrow x + \frac{3}{2}y + 2z = 3$ .

De vlakken  $U$  en  $W$  zijn evenwijdig:  $a = \frac{3}{2}, b = 2$ .

Reminder: de vlakken zijn evenwijdig  $\Rightarrow$  de normaal vectoren zijn gelijk.

$U$ : de normaal vector is  $(2, 3, 4) = 2(1, \frac{3}{2}, 2)$ .

$W$ : de normaal vector is  $(1, a, b) \parallel U \Rightarrow (1, \frac{3}{2}, 2)$ .

### Opgave 16 § 3

Stel van het volgende vlak een vergelijking op:

- het vlak door de punten  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(2, 1, -3)$  en  $C(7, 0, 5)$ .

Gegeven 3 punten die in een vlak moeten liggen.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2, 1, -3) - (1, 2, 3) = (1, -1, -6),$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (7, 0, 5) - (1, 2, 3) = (6, -2, 2).$$

De normaalvector  $\vec{n} = (p, q, r)$ .

Twee inproducten:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow p - q - 6r = 0,$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow 6p - 2q + 2r = 0.$$

$q$  elimineren:  $2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} - \overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} \Leftrightarrow -4p + 0 - 14r = 0$ .  $p$  of  $r$  vrij te kiezen.

Kies  $p = 7 \rightarrow r = -2$ .

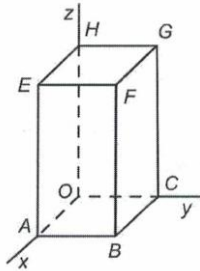
$q$  vind je door de resultaten voor  $p$  en  $r$  in  $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$  of  $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0$  te substitueren  $\rightarrow q = 19 \rightarrow \vec{n} = (7, 19, -2)$ .

De vergelijking van het vlak is:  $7x + 19y - 2z = d$ .

$A(1, 2, 3)$  invullen in  $7x + 19y - 2z = d \rightarrow d = 39 \rightarrow$  De vergelijking van het vlak:  $7x + 19y - 2z = 39$ .

Nota Bene: Je kunt één van de kentallen van de normaalvector kiezen door de kentallen van de vectoren die het vlak opspannen te analyseren en gebruik maken van  $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$  en  $\overrightarrow{AC}$ . Stel dat  $\overrightarrow{AB} = (0, 2, 3)$ , dan staat  $\vec{n} = (p, -3, 2) \perp \overrightarrow{AB}$ .

### Opgave 18 § 3



Het blok in bovenstaande figuur is 4 hoog, 2 breed en 3 diep.

**a)** De vergelijking van het vlak  $ACH$ ?

We hebben de coördinaten van 3 punten. Daarmee liggen de coördinaten van de overige punten vast:

$A(3,0,0)$ ,  $C(0,2,0)$  en  $H(0,0,4)$ .

Stel de vector representatie van de normaal op het vlak:  $\vec{n} = (p, q, r)$ . Dus  $(p, q, r) \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ .

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (0,2,0) - (3,0,0) = (-3,2,0) \Rightarrow (p, q, r) \cdot (-3,2,0) = -3p + 2q = 0.$$

Kies  $p = 2$ , dan  $q = 3$ .

We hebben ook  $(p, q, r) \cdot \overrightarrow{AH} = 0$ .

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = (0,0,4) - (3,0,0) = (-3,0,4) \Rightarrow (2,3,r) \cdot (-3,0,4) = 0 \Rightarrow r = \frac{3}{2}.$$

De normaal op het vlak  $\vec{n} = (2, 3, \frac{3}{2}) \Rightarrow (4, 6, 3)$ .

Voor de vergelijking van het vlak  $ACH$  hebben we  $4x + 6y + 3z = d$ .

Neem nu bijvoorbeeld  $H(0,0,4)$ . Substitutie in de vergelijking van het vlak geeft  $d = 12$ .

Het vlak:  $4x + 6y + 3z = 12$ .

Een alternatief voor deze oplossing:

We weten als

$$y = z = 0 \Rightarrow x = 3 \Leftrightarrow \frac{x}{3} = 1,$$

$$x = z = 0 \Rightarrow y = 2 \Leftrightarrow \frac{y}{2} = 1,$$

$$x = y = 0 \Rightarrow z = 4 \Leftrightarrow \frac{z}{4} = 1.$$

$$\text{Dus } \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1 \Leftrightarrow 4x + 6y + 3z = 12.$$

**b)** De afstand van  $O$  tot het vlak  $ACH$ ?

Op pagina 189 van deze aantekeningen staat de formule voor de afstand van een punt  $P$  tot een vlak  $V$ :

$$\frac{|(ap_1 + bp_2 + cp_3) - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

De vergelijking van het vlak is  $ax + by + cz = d$ . De coördinaten van het punt  $P = (p_1, p_2, p_3)$  en de coördinaten van de normaalvector  $\vec{n} = (a, b, c)$ . Soms kan het eenvoudiger zijn om de formule af te leiden in plaats van te onthouden: de formule voor de afstand wordt afgeleid uit de projectie op de normaalvector.

In deze opgave is  $P$  de oorsprong van het assenstelsel:  $P = (0,0,0)$ . Voor de afstand vinden we :

$$\frac{|-12|}{\sqrt{4^2 + 6^2 + 3^2}} = \frac{12}{\sqrt{61}}.$$

**c)** De inhoud van  $OACH$ ?

De inhoud van een piramide is  $\frac{1}{3}$  maal de hoogte van de piramide maal de oppervlakte van het grondvlak. De hoogte is 4, de oppervlakte van het grondvlak (een rechthoekige driehoek) is  $\frac{1}{2}$  maal de lengte van de zijden die de rechthoek vormen. Dus de inhoud is:  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4$ .

**d)** We kennen nu de inhoud van de piramide. Voor de berekening van de inhoud had je ook  $ACH$  kunnen kiezen. De hoogte van deze piramide is de afstand van  $O$  tot het vlak  $ACH$ . Met de gegevens die zojuist berekend zijn kun je dan het oppervlak van  $ACH$  berekenen. In formule vorm:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{12}{\sqrt{61}} \cdot (\text{Oppervlak } ACH) = 4 \Rightarrow \text{Oppervlak } ACH = 4 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{61}}{12} = \sqrt{61}.$$

### Opgave 21 § 3

$k$  is de lijn door de punten  $(1, -1, 2)$  en  $(3, 3, 3)$ .  $V$  is het vlak met vergelijking  $x + 2y - 2z = 12$

a) Parametervoorstelling van de lijn  $k$ ?

We kiezen als steunvector  $(1, -1, 2)$  en als richtingsvector  $(3, 3, 3) - (1, -1, 2) = (2, 4, 1)$ .

De parametervoorstelling voor  $k$ :  $\vec{k} = (1, -1, 2) + t(2, 4, 1) = (1 + 2t, -1 + 4t, 2 + t)$ .

b) De punten van  $k$  die de afstand 3 tot  $V$  hebben?

De formule voor de afstand:  $\frac{|(ak_1 + bk_2 + ck_3) - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ , en  $a = 1, b = 2, c = -2, d = 12$ .

Dus,  $\frac{|1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 - 2 \cdot k_3 - 12|}{3} = 3$ .

We maken gebruik van de parametervoorstelling:  $|1 + 2t - 2 + 8t - 4 - 2t - 12| = 9 \Leftrightarrow |8t - 17| = 9 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 8t - 17 = 9$ , of  $8t - 17 = -9$ .

$\Rightarrow t = \frac{13}{4}$ , of  $t = 1$ .

We vinden twee punten op de lijn  $k$ . Met de parametervoorstelling hebben we voor de punten de coördinaten:  
 $(\frac{15}{2}, 12, \frac{21}{4})$ , en  $(3, 3, 3)$ .

De vraag kan gesteld worden: vind je dezelfde resultaten bij de keuze van de steunvector  $(3, 3, 3)$  en de richtingsvector  $(1, -1, 2) - (3, 3, 3) = (-2, -4, -1)$ ? De parametervoorstelling is  $\vec{k} = (3, 3, 3) + s(-2, -4, -1)$ . Je vindt dan hetzelfde resultaat. Ook kun de relatie tussen  $s$  en  $t$  uit rekenen:  $s = 1 - t$ .

- Oefenen

De opgaven van § 3.

### Extra: Het uitwendig product

Bovenstaand, onder de bullet “Vlak gegeven door drie punten” is de normaalvector bepaald met behulp van het inproduct. Dit kan ook met een andere methode. Ik heb gebruik gemaakt van Een experimentele uitgave voor VWO Wiskunde, Radboud Universiteit (2012).

Keuzevak: *De Wetten van Kepler*. Zie ook De Wageningse Methode.

Het gaat om een vector te vinden die loodrecht staat op twee gegeven vectoren.

Twee gegeven vectoren:  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  en  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ .

Beide vectoren zijn ongelijk aan de nulvector.

Gevraagd:  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$  en ook ongelijk aan de nulvector.

Er moet gelden:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow n_1 u_1 + n_2 u_2 + n_3 u_3 = 0,$$

en

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow n_1 v_1 + n_2 v_2 + n_3 v_3 = 0.$$

Keuze: elimineer  $n_1$ .

Vermenigvuldig de eerste vergelijking met  $v_1$  en de tweede vergelijking met  $u_1$ :

$$n_1 u_1 v_1 + n_2 u_2 v_1 + n_3 u_3 v_1 = 0,$$

en

$$n_1 u_1 v_1 + n_2 u_1 v_2 + n_3 u_1 v_3 = 0.$$

Neem het verschil van beide laatste vergelijkingen:

$$(u_2 v_1 - u_1 v_2) n_2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) n_3 = 0.$$

We kunnen de volgende keuze maken:

$$n_3 = (u_2 v_1 - u_1 v_2) \text{ en } n_2 = (u_3 v_1 - u_1 v_3).$$

Vul deze waarden voor  $n_2$  en  $n_3$  in, in  $n_1u_1 + n_2u_2 + n_3u_3 = 0$  :

$$n_1u_1 + u_2u_3v_1 - u_1u_2v_3 + u_1u_3v_2 - u_2u_3v_1 = 0 \Leftrightarrow n_1u_1 = u_1u_2v_3 - u_1u_3v_2.$$

Deelen door  $u_1 \rightarrow n_1 = u_2v_3 - u_3v_2, u_1 \neq 0$ .

Op vergelijkbare wijze worden de overige kentallen van de normaalvector gevonden:

$$\mathbf{n} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Opmerking: je hebt gedeeld door  $u_1 \neq 0$ . Echter,  $u_1 = 0$ , is ook mogelijk. Door bovenstaande berekening te herhalen met  $u_1 = 0$ , vind je ook  $\mathbf{n} \perp \mathbf{u}, \mathbf{v}$ .

Als  $\mathbf{u}$  en  $\mathbf{v}$  in elkaars verlengde liggen:  $\mathbf{n}=(0,0,0)$ .

Nu het uitwendig product. Daarvoor gebruiken we:

$$\mathbf{n} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Wat valt op? Ik vervang (1,2,3) door (x, y, z):

$$n_x = u_yv_z - u_zv_y,$$

$$n_y = u_zv_x - u_xv_z, \text{ en}$$

$$n_z = u_xv_y - u_yv_x.$$

Een cyclische permutatie. Goed te onthouden.

Het *uitwendige product* of *uitproduct*  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  van de vectoren  $\mathbf{u}$  en  $\mathbf{v}$  wordt gedefinieerd door:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Dit,  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ , is dus weer een vector in tegenstelling tot het inproduct dat een reëel getal is.

De vergelijking van een vlak vinden we door het uitproduct te nemen van twee onafhankelijke vectoren die het vlak opspannen. Zo vind je de normaalvector en daarmee de vergelijking van het vlak.

## Blok 6 Les 4 Hoeken en inproduct

Deze les sluit aan bij het lespakket Inproduct van de Wageningse Methode 2010.

<http://www.wageningse-methode.nl/m/456%20wiskunde%20D/5.%20Inproduct/>



- De tangens van een hoek

In een Cartesiaans assenstelsel geldt:

$$\tan \varphi = \frac{y}{x}.$$

Je kunt uit de verhouding  $\frac{y}{x}$ , de bijbehorende hoek vinden met:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \text{ of } \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}.$$

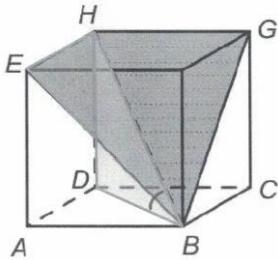
In woorden:  $\varphi$  is de hoek waarvan de tangens  $= \frac{y}{x}$ .

Met de Grafische Rekenmachine:  $\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ .

Zet de GR op graden of radialen!

Voorbeeld:

**Opgave 1 § 4** De kilgoot is een verbindingsgoot tussen twee daken



$ABCD.EFGH$  is een kubus.

$BH$  is de snijlijn van de vlakken  $BEH$  en  $BGH$ .

Bereken de hellinghoek van de lijn  $BH$ .

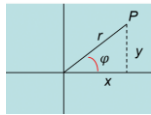
De hellinghoek is  $\angle(DBH)$  in driehoek  $BDH$ .

$$DH = 1, BD = \sqrt{2}$$

$$\tan \angle(DBH) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Met de GR:  $\angle(DBH) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 35.26^\circ$

Let op: zet de GR op 'degree'.



- De cosinus van een hoek:

$r$  is de afstand van de oorsprong,  $O$ , van het assenstelsel tot een punt  $P$ .

In het Polaire assenstelsel geldt:

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \text{ waarbij } r = |\sqrt{x^2 + y^2}|.$$

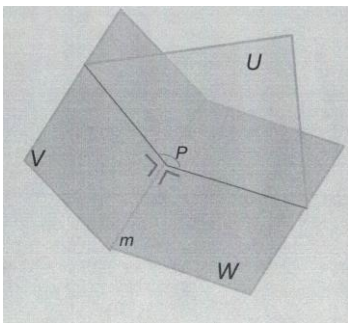
Je kunt uit de verhouding  $\frac{y}{x}$ , de bijbehorende hoek vinden met:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{x}{r}\right), \text{ of } \varphi = \cos^{-1} \varphi. \text{ In woorden } \varphi \text{ is de hoek waarvan de cosinus} = \frac{x}{r}.$$

Met de Grafische Rekenmachine:  $\varphi = \cos^{-1} \varphi$ .

Zet de GR op graden of radialen!

- De hoek tussen twee vlakken



$V$  en  $W$  zijn twee vlakken die elkaar snijden.

- Bepaal de snijlijn  $m$  van beide vlakken.
- Kies een punt  $P$  op de snijlijn
- Kies in  $V$  een lijn door  $P$  loodrecht op  $m$ .
- Kies in  $W$  een lijn door  $P$  loodrecht op  $m$ .

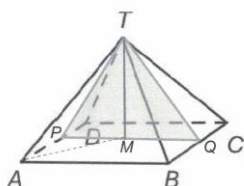
De hoek tussen beide zojuist geconstrueerde lijnen is de hoek tussen beide vlakken.  
Deze hoek heet de standhoek.

Deze hoek is de hoek die je “ziet” als je in de richting van de snijlijn kijkt.

De standhoek staat loodrecht op de snijlijn.

Soms zal het nodig zijn om een hulplijn te construeren.

#### Opgave 5 § 4:



$ABCD.T$  is een piramide waarvan alle ribben de lengte 6 hebben.

- Hoe bepaal je de hoek die zijvlak  $ADT$  maakt met het grondvlak?

-  $TM$  staat loodrecht op het grondvlak. Bereken de lengte van  $TM$ .

$AD$  is de snijlijn tussen beide vlakken: te weten het grondvlak en het vlak  $ADT$ .

Nota Bene,  $D$  is de oorsprong van het assenstelsel.

$P$  is het midden van  $AD$  en  $Q$  is het midden van  $BC$ .

→  $PQ$  staat loodrecht op  $AD$ .

→  $TP$  staat loodrecht op  $AD$  ( $TP$  de middelloodlijn van de gelijkbenige  $\triangle ATD$ ).

→  $\angle TPQ$  is de hoek tussen beide vlakken.

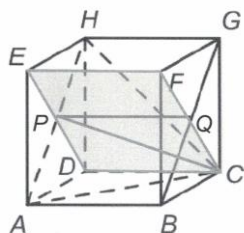
$$\tan \angle TPQ = \frac{TM}{PM} = \frac{TM}{3}, \text{ want } PM = \frac{PQ}{2} = 3.$$

$$(TM)^2 + (AM)^2 = (AT)^2 = 36.$$

$$AM = \frac{AC}{2} = 3\sqrt{2} \rightarrow (TM)^2 = 36 - 18 \rightarrow TM = 3\sqrt{2}$$

$$\tan \angle TPQ = \frac{TM}{3} = \sqrt{2} \rightarrow \angle TPQ = 54.7^\circ.$$

#### Opgave 8 § 4:



$ABCD.EFGH$  is een kubus.

Bepaal de hoek tussen de vlakken  $ACH$  en  $ABGH$ .

$AH$  is de snijlijn tussen beide vlakken.

Vlak  $EFCD$  staat loodrecht op  $AH$ .

$P$  is het midden van  $AH$  en  $Q$  is het midden van  $BG$ .

→  $PQ$  en  $PC$  staan loodrecht op  $AH$ .  $PC$  ligt in het vlak  $ACH$ .

Dus  $\angle QPC$  is de standhoek, de gevraagde hoek.

Ga uit van een ribbe met lengte 1.

Driehoek  $PQC$  is rechthoekig.

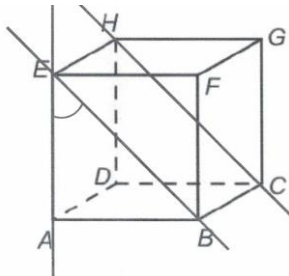
$$QC = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ en } PQ = 1.$$

$$\tan \angle QPC = \frac{QC}{PQ} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ en } \angle QPC = 35.26^\circ.$$

- De hoek tussen twee lijnen.

Onder de hoek tussen twee lijnen zullen we verstaan de hoek die je krijgt door één van de lijnen te verschuiven totdat deze verschoven lijn de andere lijn snijdt.

Voorbeeld:



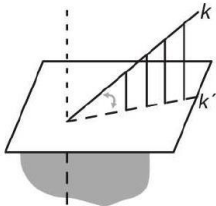
De lijnen  $AE$  en  $CH$  kruisen elkaar.

Hoe groot is de hoek tussen deze lijnen?

Verplaats de lijn  $CH$  evenwijdig aan zichzelf zodat die lijn de lijn  $AE$  snijdt.

In dit geval is de hoek  $45^\circ$ .

- De hoek tussen een lijn en een vlak.

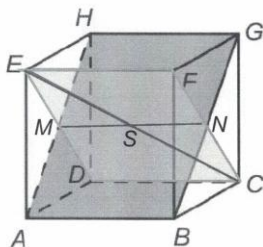


De lijn  $k$  snijdt het vlak  $V$ .

$k'$  is de loodrechte projectie van  $k$  op  $V$ .

De hoek die  $k$  met  $V$  maakt is de hoek tussen  $k$  en  $k'$ .

**Opgave 20 § 4:**



Bereken de hoek tussen de lijn  $EC$  en het vlak  $ABGH$ .

Vlak  $CDEF$  staat loodrecht op vlak  $ABGH$ .

$MN$  is de snijlijn van beide vlakken.  $S$  is het snijpunt van de lijnen  $MN$  en  $EC$ .

$EM$  staat loodrecht op vlak  $ABGH$ , dus  $MS$  is de loodrechte projectie van  $ES$  op het vlak  $ABGH$ .

De hoek  $ESM$  is de gevraagde hoek.

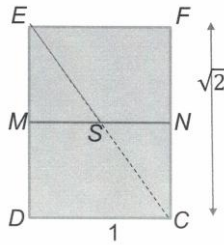
De grootte van de hoek:

Voorbeeld (opgave 20b)

Teken vlak  $CDEF$ .

$$\tan(\angle ESM) = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

$$\angle ESM = 54,7^\circ$$



Nota bene: de hoek is op geometrische wijze bepaald.

## • Hoeken en inproduct

Gegeven een vector  $\vec{v}$  en een lijn  $k$  met richtingsvector  $\vec{w}$ .

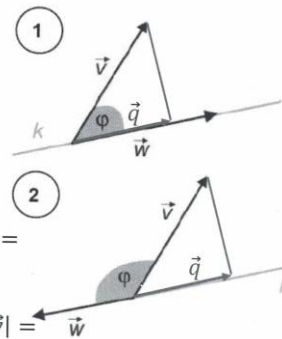
$\vec{q}$  is de loodrechte projectie van  $\vec{v}$  op  $k$ .

In de driehoek bij 1 geldt:  $|\vec{q}| = |\vec{v}| \cdot \cos(\varphi)$ .

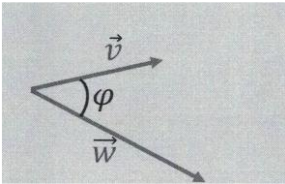
In de driehoek bij 2 geldt:  $|\vec{q}| = -|\vec{v}| \cdot \cos(\varphi)$ .

$$\begin{aligned} \text{Bij 1 geldt } \vec{v} \cdot \vec{w} &= \vec{q} \cdot \vec{w} = |\vec{q}| \cdot |\vec{w}| = |\vec{v}| \cdot \cos(\varphi) \cdot |\vec{w}| = \\ &= |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Bij 2 geldt } \vec{v} \cdot \vec{w} &= \vec{q} \cdot \vec{w} = -|\vec{q}| \cdot |\vec{w}| = |\vec{v}| \cdot \cos(\varphi) \cdot |\vec{w}| = \\ &= |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\varphi) \end{aligned}$$



Gegeven een vector  $\vec{v}$  en een vector  $\vec{w}$ .



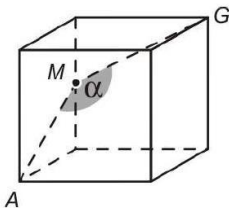
$\varphi$  is de hoek tussen beide vectoren.

Dan geldt:  $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \varphi$ .

We hebben nu een snelle en elegante manier om hoeken tussen vectoren te berekenen:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| |\vec{w}|}$$

### Opgave 14 § 4



$M$  is het midden van de opstaande ribbe in de kubus.

Bereken de hoek  $\alpha$  tussen  $AM$  en  $MG$ .

Kies een assenstelsel.

Stel de ribbe heeft een lengte 2.

Coördinaten  $M: (0,0,1)$ .

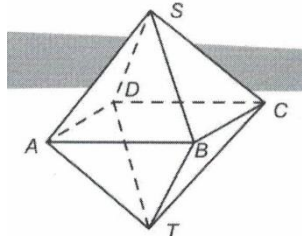
Dan is  $\overrightarrow{MA} = (2,0,-1)$  en  $\overrightarrow{MG} = (0,2,1)$ .

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MG}}{|\overrightarrow{MA}| \cdot |\overrightarrow{MG}|} = \frac{-1}{\sqrt{4+0+1} \cdot \sqrt{0+4+1}} = \frac{-1}{5} = -0.2.$$

$$\alpha = \cos^{-1}(-0.2) = 101.53^\circ.$$

Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven.

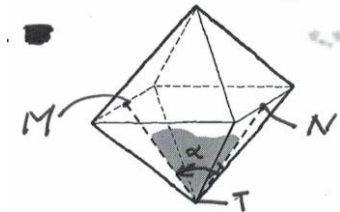
#### Opgave 10 § 4



$ABCD.ST$  is een regelmatig achthoek.

a) De standhoek tussen de grensvlakken  $TAD$  en  $TBC$ ?

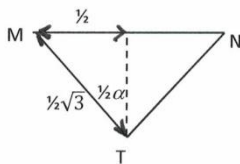
De standhoek  $\alpha$  is aangegeven door het grijs getinte vlak in de onderstaande Figuur  $\alpha = \angle MTN$ :



$M$  is het midden van  $AD$  en  $N$  is het midden van  $BC$ . Een regelmatige achthoek. Het is handig om de lengte van de ribbe gelijk aan 1 te stellen. Hieruit volgt dat de lengte van  $MN$  ook gelijk aan 1 is.

De driehoek  $ADT$  is een gelijkzijdige driehoek met ribben van lengte 1. De hoogtelijn  $MT$  in deze driehoek heeft dus de lengte  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ .

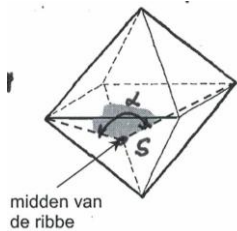
In onderstaande figuur is de benodigde informatie verzameld:



$$\text{Dus: } \sin \frac{1}{2}\alpha = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2}\alpha = 35.26^\circ \Leftrightarrow \alpha = 70.52^\circ.$$

b) De standhoek tussen de grensvlakken  $TAD$  en  $TDC$ ?

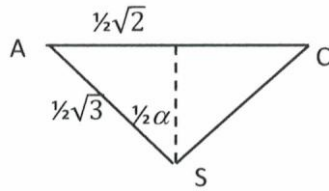
De standhoek  $\alpha$  is aangegeven door het grijs getinte vlak in de onderstaande Figuur de hoek  $\angle ASC^2$



$AC$  is de diagonaal van het vierkant  $ABCD$  en heeft de lengte  $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ .  $AS$  is de hoogtelijn in de gelijkzijdige driehoek  $\triangle ADT$  en heeft dus ook de lengte  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ . Alle informatie is weer aanwezig om

<sup>2</sup> De  $S$  in deze hoek is een "andere"  $S$  dan in het regelmatig achthoek boven a).

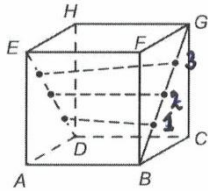
de hoek  $\alpha$  ui te rekenen. Zie onderstaande Figuur:



$$\text{Dus: } \sin \frac{1}{2} \alpha = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{2}}{\frac{1}{2} \sqrt{3}} = \frac{1}{3} \sqrt{6} \Rightarrow \frac{1}{2} \alpha = 54.74^\circ \Leftrightarrow \alpha = 109.48^\circ.$$

#### Opgave 16 § 4

De zijvlak diagonalen van de kubus met ribbe 4, zie onderstaande Figuur, worden door horizontale lijnstukken op hoogte 1, 2 en 3 verbonden. De punten 1, 2 en 3 verdelen de diagonalen in vier gelijke stukken.

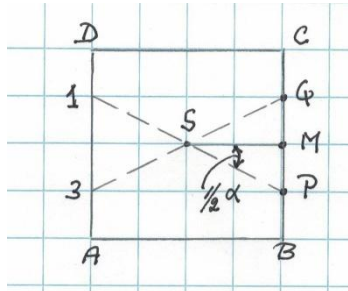


De hoek die de lijnstukken op hoogte 1 en hoogte 3 met elkaar maken?

We definiëren de hoek die de projectie van de lijnen 1 en 3 in het grondvlak  $ABCD$  met elkaar maken als de gevraagde hoek.

Nota Bene: als je de hoek zou nemen tussen de lijnen 1 en 3 in het verticale vlak geprojecteerd, bijvoorbeeld in  $ABEF$ , ben je snel klaar. Deze hoek is  $0^\circ$ .

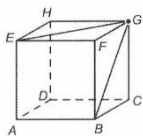
Van de projectie in het vlak  $ABCD$  is onderstaande schets gemaakt: "Je kijkt boven op snijdende lijnen".



Met de bovenstaande aanname dat de diagonalen  $BG$  en  $ED$  in vier gelijke delen zijn verdeeld, zijn ook  $BC$  en  $DA$  in vier gelijke delen verdeeld.

$$SM = PQ = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{PM}{SM} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 2 \tan^{-1} \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = 53.13^\circ.$$

#### Opgave 17 § 4



$ABCD.EFGH$  is een kubus. We bekijken alle lijnen door  $G$ , die een hoek van  $45^\circ$  met ribbe  $FG$  maken.

a) Teken de snijpunten van deze lijnen met vlak  $ABFE$ . (Twee punten zijn  $E$  en  $B$ ).

De lijn  $EG$  maakt een hoek van  $45^\circ$  met lijn  $FG$ . Roteer nu driehoek  $EFG$  om de as  $FG$ , dan blijft  $EF$  steeds een hoek van  $45^\circ$  maken met  $FG$ . Punt  $E$  beschrijft dan een cirkel om middelpunt  $F$  in vlak  $ABFE$ .

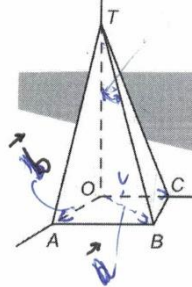
b) Bepaal de ligging van de lijnen door  $G$  die een hoek van  $90^\circ$  met lijn  $FG$  maken.

Een zelfde soort aanpak als bij a). De lijn GH maakt een hoek van  $90^\circ$  met FG. Roteer nu om de as FG en al de lijnen liggen in het vlak DCGH.

#### Opgave 21 § 4

$T.OABC$  is een piramide met  $A(6,0,0)$ ,  $B(6,6,0)$ ,  $C(0,4,0)$ ,  $T(0,0,10)$ .

Zie onderstaande figuur:



a)  $\angle ABC$ ? We maken gebruik van het inner product. Algemeen:  $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos \varphi$ , waarbij  $\varphi$  de hoek is tussen de vectoren  $\vec{v}$  en  $\vec{w}$ .

$\angle ABC$  is de hoek tussen  $\vec{BA}$  en  $\vec{BC}$ . In bovenstaande figuur zijn de vectoren  $\vec{a} \equiv \vec{OB}$  en  $\vec{b} \equiv \vec{OA}$  aangegeven.

$$\vec{BA} = \vec{b} - \vec{a} = (6,0,0) - (6,6,0) = (0,-6,0),$$

$$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{a} = (0,4,0) - (6,6,0) = (-6,-2,0).$$

$$\cos \angle ABC = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{(0,-6,0) \cdot (-6,-2,0)}{\sqrt{0^2+(-6)^2+0^2} \cdot \sqrt{(-6)^2+(-2)^2+0^2}} = \frac{12}{6 \cdot 2\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$$\angle ABC = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{10}} = 71,57^\circ.$$

-  $\angle BTC$ ?

$\angle BTC$  is de hoek tussen  $\vec{TB}$  en  $\vec{BC}$ .

$$\vec{TB} = \vec{a} - \vec{OT} = (6,6,0) - (0,0,10) = (6,6,-10),$$

$$\vec{TC} = \vec{OC} - \vec{OT} = (0,4,0) - (0,0,10) = (0,4,-10).$$

$$\cos \angle BTC = \frac{\vec{TB} \cdot \vec{TC}}{|\vec{TB}| \cdot |\vec{TC}|} = \frac{(6,6,-10) \cdot (0,4,-10)}{\sqrt{6^2+6^2+(-10)^2} \cdot \sqrt{0^2+4^2+(-10)^2}} = \frac{124}{\sqrt{172} \cdot \sqrt{116}} = 0.8779.$$

$$\angle BTC = \cos^{-1}(0.8779) = 28.61^\circ.$$

- De hoek( $\angle$ ) tussen de lijnen  $BT$  en  $OC$ ?

$$\vec{BT} = \vec{OT} - \vec{a} = (0,0,10) - (6,6,0) = (-6,-6,10),$$

$$\vec{OC} = (0,4,0).$$

$$\cos \angle = \frac{\vec{BT} \cdot \vec{OC}}{|\vec{BT}| \cdot |\vec{OC}|} = \frac{(-6,-6,10) \cdot (0,4,0)}{\sqrt{(-6)^2+(-6)^2+10^2} \cdot \sqrt{0^2+4^2+0^2}} = \frac{-24}{\sqrt{172} \cdot 4} = \frac{-3}{\sqrt{43}} = -0.4575.$$

$$\angle = \cos^{-1}(-0.4575) = 117^\circ.$$

b) De hoek tussen de lijn  $TB$  ten opzichte van het vlak  $ABC$ ? In jargon: hoeveel graden staat de lijn  $TB$  uit het lood ten opzichte van het vlak  $ABC$ ?

Anders geformuleerd: wat is de hoek tussen de normaal op het vlak en de lijn  $TB$ ? De normaal op het vlak  $ABC$  is ook de  $z$ -as. Dus de vraag luidt:  $\angle OTB$ ?

$$\vec{TB} = \vec{a} - \vec{OT} = (6,6,0) - (0,0,10) = (6,6,-10),$$

$$\vec{OT} = (0,0,10).$$

$$\cos \angle OTB = \frac{\vec{TB} \cdot \vec{OT}}{|\vec{TB}| \cdot |\vec{OT}|} = \frac{(6,6,-10) \cdot (0,0,10)}{\sqrt{6^2+6^2+(-10)^2} \cdot \sqrt{0^2+0^2+10^2}} = \frac{100}{\sqrt{172} \cdot 10} = 0.762.$$

$$\angle OTB = \cos^{-1}(0.762) = 40.3^\circ.$$

#### Opgave 22 § 4

Hoeken uitrekenen zonder gebruik te maken van een tekening.

Gegeven de punten  $A(1,2,3)$ ,  $B(7,-2,1)$ ,  $C(8,1,5)$ .

a)  $\angle ACB$ ?

Wil je toch een beeld hebben van de hoek, dan is  $\angle ACB$  de hoek tussen  $\overrightarrow{CA}$  en  $\overrightarrow{CB}$ .

$$\cos \angle ACB = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} = \frac{[(1,2,3)-(8,1,5)] \cdot [(7,-2,1)-(8,1,5)]}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} = \frac{(-7,1,-2) \cdot (-1,-3,-4)}{\sqrt{(-7)^2+1^2+(-2)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2+(-3)^2+(-4)^2}} = \frac{12}{\sqrt{54}\sqrt{56}} = \frac{2}{\sqrt{39}}.$$

$$\angle ACB = \cos^{-1} \frac{2}{\sqrt{39}} = 71.32^\circ.$$

b)  $\angle CAB$ ?

$$\cos \angle CAB = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{[(8,1,5)-(1,2,3)] \cdot [(7,-2,1)-(1,2,3)]}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{(7,-1,2) \cdot (6,-4,-2)}{\sqrt{7^2+(-1)^2+2^2} \cdot \sqrt{6^2+(-4)^2+(-2)^2}} = \frac{42}{\sqrt{54}\sqrt{56}} = \frac{\sqrt{21}}{6}.$$

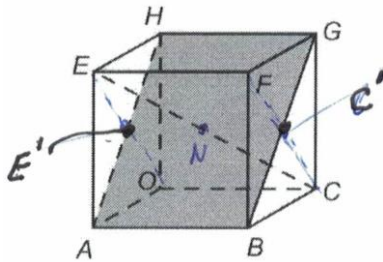
$$\angle CAB = \cos^{-1} \frac{\sqrt{21}}{6} = 40.2^\circ.$$

c) De hoek tussen twee vectoren waarvan het inproduct negatief is: Als het inproduct negatief is, is de cos van de door de vectoren ingesloten hoek negatief. De hoek is dan groter dan  $90^\circ$  en kleiner dan  $270^\circ$ . Een stompe hoek. De hoek tussen twee vectoren waarvan het inproduct positief is: Als het inproduct positief is, is de cos van de door de vectoren ingesloten hoek positief. De hoek ligt tussen  $0^\circ$  en  $90^\circ$  en tussen  $270^\circ$  en  $360^\circ$ .

#### Opgave 23 § 4

Gegeven kubus  $OABC.EFGH$  met  $A(4,0,0)$ ,  $C(0,4,0)$ ,  $H(0,0,4)$ .

Zie onderstaande figuur



a) De vector  $\perp$  diagonaal vlak  $ABGH$ ?

We maken het ons gemakkelijk. Uit de figuur volgt dat de normaal op het genoemde vlak  $\overrightarrow{OE}$  is:  
 $\overrightarrow{OE} = (4,0,4)$ .

b) De projecties van  $E$  en  $C$  op  $ABGH$ ?

$EC$  ligt in het diagonaal vlak  $OCFE$ .

$OE \perp AH$ ,  $CF \perp BG$ . De snijpunten van  $OE$  en  $AH$ , en van  $CF$  en  $BG$  zijn de respectievelijke projecties  $E'$  en  $C'$ .

c) De hoek tussen het diagonaal vlak  $ABGH$  en de diagonaal  $EC$ ?

We maken gebruik van het inproduct. In de bovenstaande samenvatting van Les 4 is de hoek op geometrische wijze bepaald.

Onder a) hebben we de normaal op het vlak bepaald:  $\overrightarrow{OE} = (4,0,4)$ .

$N$  is het snijpunt van  $E'E$  met het diagonaalvlak  $ABGH$ .

De gevraagde hoek is:  $\angle ENE' = 90^\circ - \angle CEO$ .

$$\cos(\angle CEO) = \frac{\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{OE}}{|\overrightarrow{CE}| \cdot |\overrightarrow{OE}|} = \frac{(4,-4,4) \cdot (4,0,4)}{\sqrt{3 \cdot 4^2} \cdot \sqrt{2 \cdot 4^2}} = \frac{1}{3} \sqrt{6}.$$

$$\angle ENE' = 90^\circ - \cos^{-1} \left( \frac{1}{3} \sqrt{6} \right) = 54.74^\circ = \cos^{-1} \left( \frac{1}{3} \sqrt{3} \right).$$

- Oefenen

De opgaven van § 4.

#### Blok 6 Toets Inner Products

##### Opgave 1

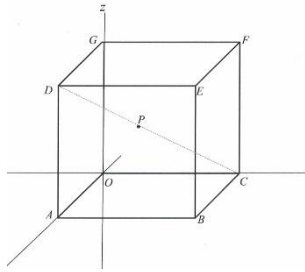
Gegeven de kubus  $ABCODEFG$ , zie onderstaande figuur.

a)  $P$  is het midden van  $CD$ .

Bereken de coördinaten van  $P$ .

$CD$  is de diagonaal van het vlak  $ACFD$ . Dus  $P$  ligt in het midden van de kubus  $\Rightarrow P(1,1,1)$ .

- b)** Lijn  $m$  gaat door  $P$  en is evenwijdig aan de lijn door  $OF$ .  
De parametervoorstelling van  $m$ ?



Als steunvector kiezen we  $\overrightarrow{OP} = (1,1,1)$  en we kiezen de richting van  $\overrightarrow{OF} = (0,2,2) \Rightarrow$  de parametervoorstelling van  $m = (1,1,1) + t(0,2,2) = (1,1 + 2t, 1 + 2t)$ .

Nota bene  $t(0,2,2) = 2t(0,1,1)$ .  $2t \equiv s \Rightarrow m = (1,1 + s, 1 + s)$ .

Een ander benadering: gebruik het midden  $M$  van  $EF$ . De coördinaten van  $M$ :  $(1,2,2)$ .

Als richtingsvector kiezen we  $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = (1,2,2) - (1,1,1) = (0,1,1)$ .

Als steunvector kiezen we weer  $\overrightarrow{OP} = (1,1,1) \Rightarrow m = (1,1,1) + t(0,1,1) = (1,1 + t, 1 + t)$ .

**c)** Het snijpunt van  $m$  met het zijvlak  $BCEF$ ? De coördinaten van dat punt hebben we al gevonden:  $(1,2,2)$ . We doen de berekening nog eens maar nu met behulp van de parametervoorstelling van  $m = (1,1 + t, 1 + t)$ .

Voor het snijpunt geldt  $y = 2 \Rightarrow 1 + t = 2 \Rightarrow t = 1$ .

Voor de coördinaten vinden we weer:  $(1,2,2)$ .

Nota bene: bij gebruik van de eerder gevonden parametervoorstelling  $m = (1,1 + 2t, 1 + 2t)$ , onder a), vinden we voor deze waarde van  $t$ :  $y = 2 \Rightarrow 1 + 2t = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$ . De coördinaten zijn weer:  $(1,2,2)$ .

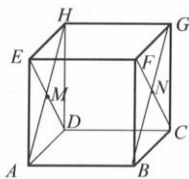
**d)** De meetkundige constructie van het snijpunt van  $m$  met het zijvlak  $BCEF$ ?

Construeer de lijn door  $P \parallel OF$ . Deze lijn snijdt  $EF$  in het midden:  $(1,2,2)$ .

## Opgave 2

Gegeven de kubus  $ABCDEFGH$ .

$M$  en  $N$  zijn de middens van de zijvlakken.



**a)** De lijnenparen  $(MF, AB)$ ,  $(EN, DC)$ ,  $(MF, DN)$  snijden deze elkaar, kruisen deze elkaar, of zijn deze evenwijdig?

$(MF, AB)$ : deze kruisen elkaar,

$(EN, DC)$ : deze snijden elkaar. De lijnen liggen in het vlak  $EDCF$ ,

$(MF, DN)$ : deze zijn evenwijdig.

**b)** Voorbeeld van een lijnenpaar dat elkaar loodrecht kruist?

$FC$  en  $AH$  kruisen elkaar loodrecht.

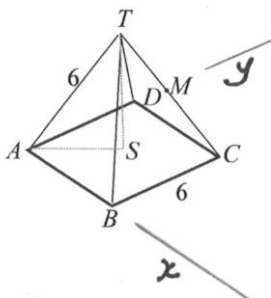
Bewijs:  $FC \perp BG$  en  $BG \parallel AH$ .

## Opgave 3

Gegeven piramide  $ABCD.T$  met een vierkant grondvlak.

Alle ribben zijn 6 eenheden lang.

Kies een assenstelsel met de oorsprong  $O$  in  $A$ , de  $x$ -as langs  $AB$  en de  $y$ -as langs  $AD$ . Zie onderstaande Figuur.



**a)** Coördinaten van  $T$ ?

De projectie van  $T$ ,  $S$ , de loodlijn op het grondvlak  $ABCD$ , ligt in het snijpunt van de diagonalen van  $ABCD$ .

De coördinaten van  $S$ :  $(3,3,0)$ . De lengte van  $AS = 3\sqrt{2}$ , de lengte van de halve diagonaal.

De  $z$ -as loopt parallel aan  $TS$ .

$$\text{De } \triangle ATS: |TS|^2 + |AS|^2 = 36 \Rightarrow |TS|^2 = 36 - |3\sqrt{2}|^2 = 18 \Rightarrow TS = 3\sqrt{2}.$$

De coördinaten van  $T$ :  $(3,3,3\sqrt{2})$ .

**b)** De kentallen van de vector  $\overrightarrow{BT}$ ?

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT} = \overrightarrow{AT} \Leftrightarrow \overrightarrow{BT} = \overrightarrow{AT} - \overrightarrow{AB} = (3,3,3\sqrt{2}) - (6,0,0) = (-3,3,3\sqrt{2}).$$

**c)**  $M$  is het midden van  $CT$ .

$$|\overrightarrow{AM}|?$$

De kentallen van  $\overrightarrow{AM}$ .

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AM}.$$

De  $z$ -coördinaat van  $M$  is de helft van  $z$ -coördinaat van  $T$ , dus  $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ .

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CT} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CS} + \overrightarrow{ST}) = (6,6,0) + \frac{1}{2}(-3,-3,0) + \frac{1}{2}(0,0,3\sqrt{2}) = \left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right).$$

Dit resultaat wordt ook gevonden door de coördinaten van de projectie van  $M$  op het grondvlak  $ABCD$  te bepalen.

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2} = 3\sqrt{5}.$$

#### Opgave 4

Rekenregels van het inproduct:  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = ?$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \rightarrow \text{distributief},$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \rightarrow \text{commutatief}.$$

$$\text{Dus: } (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2.$$

#### Opgave 5

Gegeven het vlak  $V: 3x + y - 2z = 9$  en de lijn  $m$  met parametervoorstelling  $(x, y, z) = (1, 0, 1) + t(-1, 1, 1)$ .

**a)** Het snijpunt van  $m$  met  $V$ ?

$$\text{De lijn } m: (x, y, z) = (1 - t, t, 1 + t). \text{ Vul deze waarden van } (x, y, z) \text{ in } 3x + y - 2z = 9 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3(1 - t) + t - 2(1 + t) = 9 \Leftrightarrow t = -2.$$

$$\text{De coördinaten van het snijpunt: } (1 - t, t, 1 + t) = (3, -2, -1).$$

**b)** De hoek tussen  $m$  en  $V$ ?

$$\text{De normaal van het vlak: } \vec{n} = (3, 1, -2).$$

Gevraagd wordt de hoek tussen  $m$  en de projectie van  $m$  op het vlak  $V$ .

De hoek tussen de normaal en  $m$ , de richtingsvector  $\vec{r}$  van  $m$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{(-1, 1, 1) \cdot (3, 1, -2)}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{14}} = -\frac{4}{\sqrt{42}} \Rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(-\frac{4}{\sqrt{42}}\right) = 128^\circ.$$

$$\text{Dus de hoek tussen } m \text{ en } V: 128^\circ - 90^\circ = 38^\circ.$$

#### Opgave 6

Gegeven de punten  $A(1, 2, 0)$ ,  $B(3, 0, 4)$ ,  $C(5, 6, 0)$ .

Een vergelijking van het vlak door  $A$ ,  $B$  en  $C$ .

Een vlak is gegeven door drie punten. De vectoren  $\overrightarrow{AB}$  en  $\overrightarrow{AC}$  liggen in het vlak.

De normaal van het vlak staat  $\perp$  op  $\overrightarrow{AB}$  en  $\overrightarrow{AC}$ .

We berekenen de normaal  $\vec{n}$  en vinden zo de vergelijking van het vlak.

Noem  $O$  de oorsprong van het assenstelsel.

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3,0,4) - (1,2,0) = (2, -2, 4).$$

Evenzo

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (5,6,0) - (1,2,0) = (4,4,0).$$

$\vec{n} \perp$  op  $\overrightarrow{AB}$  en  $\overrightarrow{AC}$ .

Stel  $\vec{n} = (p, q, r)$ .

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (2, -2, 4) \cdot (p, q, r) = 2p - 2q + 4r = 0,$$

en

$$\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (4, 4, 0) \cdot (p, q, r) = 4p + 4q = 0.$$

We hebben nu twee vergelijkingen. Vermenigvuldig de eerste vergelijking met 2 en trek beide vergelijkingen van elkaar af:  $8q - 8r = 0 \therefore q = r$ .

Tel daarna de genoemde vergelijkingen bij elkaar op:  $8p + 8r = 0 \therefore p = -r$ .

Aangezien we drie onbekenden hebben, kiezen we  $p = 1$ :

$$2p - 2q + 4r = 0 \rightarrow 2 - 2q - 4 = 0 \rightarrow q = -1.$$

We vinden voor de normaal:  $\vec{n} = (p, q, r) = (1, -1, -1)$ .

De vergelijking van het vlak wordt:  $x - y - z = d$ .

Met punt  $A(1,2,0) \Rightarrow 1 - 2 = d \Leftrightarrow d = -1$ .

We hebben voor de vergelijking van het vlak:  $x - y - z = -1$  of  $-x + y + z = 1$ .

## 7 Discrete dynamische modellen

### Blok 7 Les 1 Dynamische systemen, Dynamical Systems

Deze les sluit aan bij de paragraaf 1 en de eerste helft van paragraaf 2 van Hoofdstuk 3 Discrete dynamische modellen van de Wageningse Methode 2015.

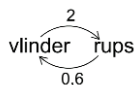
<http://www.wageningse-methode.nl/methode/het-lesmateriaal/?S=y456v-d>

#### • Wat is een dynamisch model/systeem?

##### Opgave 2

Van vlinder naar eieren naar rupsen naar poppen naar vlinders.

Aanname: elke vlinder produceert twee rupsen per jaar en elke rups produceert 0,6 vlinders.



$v_n$  is het aantal vlinders in jaar  $n$

$r_n$  is het aantal rupsen in jaar  $n$

$n = 1, 2, 3, \dots$

Aanname in regels:

$$r_n = 2 \cdot v_{n-1}$$

$$v_n = 0,6 \cdot r_{n-1}$$

Met startwaarden

$$v_0 = 1000$$

$$r_0 = 3000$$

Zo kun je voor elke waarde van  $n$  het aantal vlinders en rupsen berekenen.

## Berekening

| Vlinders                                      | Rupsen                     |
|-----------------------------------------------|----------------------------|
| $v_0 = 1000$                                  | $r_0 = 3000$               |
| $v_1 = 0,6 \cdot r_0 = 0,6 \cdot 3000 = 1800$ | $r_1 = 2 \cdot v_0 = 2000$ |
| $v_2 = 0,6 \cdot r_1 = 0,6 \cdot 2000 = 1200$ | $r_2 = 2 \cdot v_1 = 3600$ |
| $v_3 = 0,6 \cdot r_2 = 0,6 \cdot 3600 = 2160$ | $r_3 = 2 \cdot v_2 = 2400$ |
| $v_4 = 0,6 \cdot r_3 = 0,6 \cdot 2400 = 1440$ | $r_4 = 2 \cdot v_3 = 4320$ |

Wat verder opvalt is dat het aantal vlinders en rupsen exponentieel groeit:

$$v_2 = 1,2 \cdot v_0$$

$$v_4 = 1,2 \cdot 1,2 \cdot v_0 = (1,2)^2 v_0 \text{ en } v_n = (1,2)^{n/2} v_0, \text{ a powerlaw, met } n \text{ is even.}$$

Vragen waarvoor je een antwoord wil weten, zijn

zal de populatie uitsterven, zal de populatie exploderen, zal de populatie stabiliseren?

Andere voorbeelden van dynamische systemen:

- het weer
- stroming in een havenmond
- prijsontwikkeling
- griep epidemie

- **Wat is een discreet dynamisch model?**

- *Dynamisch: nieuwe toestand wordt bepaald door de vroegere toestand of toestanden.*

- *Discreet: vaste stappen in de tijd. Bijvoorbeeld om het jaar, om de dag, enz. Wat er in de tussenliggende periodes gebeurt is onbekend.*

- *Model: door aannamen te maken vereenvoudig je de werkelijkheid. Feitelijk werk je met gemiddelde waarden en omstandigheden die niet (te veel) mogen veranderen.*

Een dynamisch systeem ontwikkelt zich in de loop van de tijd. Er spelen verschillende variabelen een rol. Die variabelen beïnvloeden elkaar: als één ervan verandert, veranderen de anderen ook.

De praktijk is ingewikkeld. Daarom zal je om de praktijk te onderzoeken vereenvoudigingen doorvoeren: Het Model.

Overtuig je ervan dat je zo dicht mogelijk bij de werkelijkheid blijft.

- **Formules**

**Opgave 6 § 2 Rijen**

Je hebt € 235 op je spaarrekening staan en spaart elke week € 23 erbij.

$B_n$  is het gespaarde bedrag op week  $n$ .

**a)** Een recursieve formule met startwaarde:

$B_0 = € 235$ , dat wil zeggen: na 0 weken is het bedrag € 235.

$B_n = B_{n-1} + € 23$ , het bedrag na  $n$  weken is 23 euro meer dan na  $n - 1$  weken.

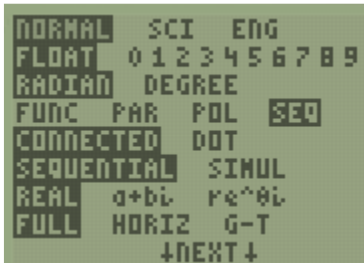
**b)** Een directe formule:

$B_n = € 235 + 23n$ , na  $n$  weken is bij het start bedrag van €235 bijgekomen  $n$  keer €23.

**c)** Het aantal weken voor het passeren van de €1000 grens?

$235 + 23n > 1000 \rightarrow n > 33,2 \rightarrow$  na 34 weken.

We werken met een rijgetallen. Soms beginnen we bij 0 te tellen, soms bij 1. Een rij is (meestal) oneindig lang. Zoals we gezien hebben, zijn er twee manieren om een rij vast te leggen: direct en recursief. In beide gevallen kan gebruik gemaakt worden van de Grafische Rekenmachine (GR) via MODE.

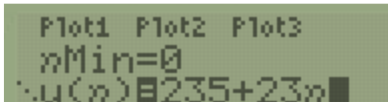


#### Opgave 6 sparen

- Direct (via Y=),  $n_{\text{Min}} = 0$ ,

$$u(n) = 235 + 23n.$$

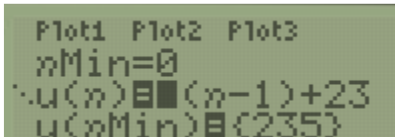
Bij  $u(n_{\text{Mn}})$  hoeft je niets in te voeren.



- Recursief (Via Y=):  $n_{\text{Min}} = 0$ ,

$$u(n) = u(n-1) + 23 \text{ (n vind je onder de knop X, T, } \theta, \eta),$$

$$u(n_{\text{Mn}}) = 235.$$

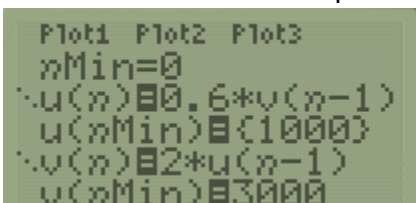


Met TABLE krijg je een tabel van de rij. Als je bijvoorbeeld  $u_{27}$  wilt weten, kun je met de cursorpijl door de tabel lopen tot de plaats  $n = 27$ . Maar dat kan ook sneller: ga naar het scherm met quit en toets in:  $u(27)$  ENTER

Resultaat

| $n$ | $u(n)$ |
|-----|--------|
| 0   | 235    |
| 1   | 258    |
| 2   | 281    |
| 3   | 304    |
| 4   | 327    |
| 5   | 350    |
| 6   | 373    |

Voorbeeld Vlinders en Rupsen met de GR



| $n$ | $u(n)$ | $v(n)$ |
|-----|--------|--------|
| 0   | 1000   | 3000   |
| 1   | 1800   | 2000   |
| 2   | 1200   | 3600   |
| 3   | 2160   | 2400   |
| 4   | 1440   | 4320   |
| 5   | 2592   | 2880   |
| 6   | 1728   | 5184   |

Het resultaat voor grotere waarden van  $n$  en het soort groei van de vlinders en rupsen kun je bestuderen aan de hand van grafieken zoals onderstaand wordt weergegeven.

- **Grafieken**

Zet de GR in mode  $\rightarrow$ SEQ $\rightarrow$ CONNECTED

Pas het WINDOW aan  $X \in [0,20]$ ,  $Y \in [0,5000]$

Druk op GRAPH



Ga je via  $Y=$  op het  $=$ -teken staan achter  $u(n)$  en druk op Enter, dan zie je alleen de grafiek van  $v(n)$ .

### Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven.

#### Opgave 3: Medicijn spiegel § 1

De bijsluiter over het gebruik van een medicijn bevat de volgende informatie:

- Elke dag verdwijnt 25% van het medicijn uit het lichaam door uitscheiding.
- Neem dagelijks 1500 mg van het medicijn in.

We gaan ervan uit dat de patiënt voor dag 1, dus dag 0, nog niets van het medicijn in het lichaam heeft. Op dag 1 neemt de patiënt voor het eerst, geheel volgens de regels van de bijsluiter, 1500 mg in. En dat zo elke volgende dag.

**a)** Hoeveel mg medicijn heeft de patiënt in het lichaam meteen nadat de dagelijkse dosis is ingenomen?

$m_n$  is het aantal mg medicijn in het lichaam, na de inname van de dagelijkse dosis op dag  $n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

We kunnen het voorgaande dan zo opschrijven:

- $m_1 = 1500$ ,
- $m_2 = 1500 \cdot 0.75 + 1500 = 2625$ ,
- $m_3 = 2625 \cdot 0.75 + 1500 = 3468.75$ ,
- $m_4 = 3468.75 \cdot 0.75 + 1500 = 4101.5625$ ,

$$- m_n = m_{n-1} \cdot 0.75 + 1500, (n = 2, 3, 4, \dots).$$

Algemeen, de recursieve formule:

$$- m_n = m_{n-1} \cdot 0.75 + 1500, (n = 2, 3, 4, \dots).$$

Hoe ziet de directe formule eruit?

$$- m_1 = 1500,$$

$$- m_2 = 1500 \cdot 0.75 + 1500 = 2625,$$

$$- m_3 = 2625 \cdot 0.75 + 1500 = 3468.75.$$

$$\text{Dus, } m_3 = m_2 \cdot 0.75 + 1500 = 3468.75 \Rightarrow (m_1 \cdot 0.75 + 1500) \cdot 0.75 + 1500 = \\ = 1500 \cdot (0.75)^2 + 1500 \cdot 0.75 + 1500 = [1 + 0.75 + (0.75)^2] \cdot 1500$$

Algemeen

$$m_n = [1 + (0.75)^{n-1} + (0.75)^{n-2} + (0.75)^{n-3} + \dots] \cdot 1500.$$

Nota Bene: Tussen vierkante haken staat een meetkundige reeks. Daarvan kan de som worden uitgerekend. De directe formule krijgt dan een elegante vorm. Deze reeks komt in de toekomstige lessen aan de orde.

De reeks is als volgt:  $[1 + (0.75)^{n-1} + (0.75)^{n-2} + (0.75)^{n-3} + \dots] \cdot 1500$ . De reeks loopt oneindig door.

Als je het geduld kunt opbrengen en lang genoeg doorrekent krijg je het vermoeden dat de term tussen vierkante haken gelijk is aan 4. Dat betekent dat  $m_n$  voor grote waarden van  $n$ , naar 6000 convergeert.

Nog een aantal getallen:  $m_4 = 4101.6$ ,  $m_5 = 4576.2$ , ... ..

Zie ook opgave 12 § 2 hieronder.

#### Opgave 4 Ratten § 1

Een rattenvrouwtje werpt gemiddeld elke veertig dagen een nest. Zo'n nest heeft gemiddeld zes jongen, waarvan er drie vrouwtje zijn. De jonge rattenvrouwtjes zijn de eerste tijd niet vruchtbaar. Na tachtig dagen werpt een rattenvrouwtje voor het eerst een nest met zes jongen.

We beginnen met één rattenpaar, dus met 1 rattenvrouwtje. Na 40 dagen zijn er dan  $1 + 3 = 4$  vrouwtjes, waarvan er maar 1 vruchtbaar is. Na 80 dagen zijn er  $1 + 3 + 3 = 7$  rattenvrouwtjes, waarvan er  $1 + 3 = 4$  vruchtbaar zijn.

**a)** Het aantal rattenvrouwtjes na 120 dagen? Na 120 dagen zijn er  $4 \cdot 3$  vrouwtjes bij gekomen. Dus totaal  $4 \cdot 3 + 7 = 19$ , waarvan er 7 vruchtbaar zijn.

Na 160 dagen zijn er  $7 \cdot 3 + 19 = 40$ , waarvan er 19 vruchtbaar zijn.

Na 200 dagen zijn er 97 rattenvrouwtjes.

**b)** Het aantal vruchtbare rattenvrouwtjes na  $n$  periodes van 40 dagen noemen we  $r_n$ . Met dit gegeven kunnen we een recursieve formulering construeren.

Het aantal vruchtbare vrouwtjes na  $n$  periodes is het aantal vruchtbare uit de vorige periode plus 3 keer het aantal geworpen vrouwtjes uit één periode eerder:

$$r_n = r_{n-1} + 3 \cdot r_{n-2}.$$

Nota Bene: een directe formule is niet eenvoudig te vinden.

#### Opgave 5 §1

Bij de vorige opgaven 3 en 4 hebben we een aantal aannames gemaakt.

**a)** Bij opgave 3 hebben we aangenomen dat

- elke dag precies evenveel medicijn wordt afgebroken,
- elke inname is 1500 mg,
- de inname vindt op hetzelfde tijdstip plaats.

**b)** Bij opgave 4 hebben we aangenomen dat

- er gaan geen ratten dood,
- het aantal geboren ratten is elke cyclus hetzelfde,
- elke cyclus is even lang.

#### Opgave 7 § 2, Pakketje

Een groot stuk papier is 5 keer dubbelgevouwen.

**a)** Hoeveel lagen is het pakketje dik?

1<sup>e</sup> keer : 2 lagen,  $2^1$

2<sup>e</sup> keer : 4 lagen,  $2^2$

3<sup>e</sup> keer : 8 lagen,  $2^3$

.....

5<sup>e</sup> keer : .....,  $2^5 = 32$  lagen.

**b)** Een recursie formule voor  $a_n$ ?

$$a_0 = 1,$$

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

**c)** Een directe formule?

Onder a) wordt de directe formule al aangedragen.

$$a^n = 2^n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Bij 7b wordt aangegeven hoe je, als je de  $n^{de}$  term hebt, de  $n + 1^{ste}$  kunt uitrekenen. Daarvoor heb je een startwaarde nodig.

De formule onder 7c zegt hoe je direct de term bij een gegeven rangnummer  $n$  kunt berekenen.

In deze opgave is sprake van een rij getallen. Soms beginnen we bij 0 te tellen, soms bij 1. Een rij is (meestal) oneindig lang.

Zowel voor de recursieve manier en de directe manier kun je de rij in de Grafische Rekenmachine (GR) invoeren.

Zie de samenvatting van de theorie hierboven.

### **Opgave 8 § 2 Taxes**

In een bepaalde stad is de hondenbelasting als volgt samengesteld:

Voor de eerste hond moet €88 worden betaald; voor elke volgende hond €132.

$H_n$  is de belasting voor  $n$  honden met  $\{n \in \mathbb{N}\}$ .

**a)** Iemand heeft 7 honden.

De te betalen belasting?

$$H_7 = 88 + 6 \cdot 132 = \text{€}880.$$

**b)** De directe formule. Onder a) is de formule in getallen weergegeven.

$$H_n = 88 + (n - 1) \cdot 132, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

**c)** Recursief  $H_8$ ?

$$H_8 = H_7 + 132.$$

**d)** De complete recursieve formule?

$$- H_1 = 88,$$

$$- H_{n+1} = H_n + 132, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

### **Opgave 9 § 2 Verdunnen**

In een bak zit zeven liter water, met daarin 320 gram zout opgelost. De volgende verdunning wordt uitgevoerd:

*Voeg 1 liter water toe aan de bak; roer goed; schep er liter water(mengsel) uit, zodat er weer 7 liter over blijft.*

**a)** Hoeveel gram zout is er nog over in de bak als je twee keer de verdunning hebt uitgevoerd?

Start waarde : 320 gram zout in 7 liter mengsel. 1 liter water erbij, goed roeren wordt 320 gram in 8 liter mengsel. Je haalt er 1 liter uit. Er resteert  $320(1-1/8)=280$  gram zout in 7 liter mengsel. Je voert de verdunning nog een keer uit, verwijdert weer 1 liter en er resteert  $280(1-1/8)=245$  gram zout in 7 liter mengsel. Dat wil zeggen: na 2 keer verdunnen resteert:  $320(1-1/8)^2$  gram zout.

**b)** Geef een recursieve formule voor het aantal gram  $g_n$  zout dat na  $n$  verdunningen in de bak over is. ( $n$  is een positief geheel getal.)

$$\text{Recursief: } g_0 = 320, \text{ en } g_{n+1} = g_n \cdot \frac{7}{8}, \quad n=0, 1, 2, 3, \dots$$

**c)** Maak een tabel op de GR.

GR: MODE, Seq, ENTER. De recursieve formule  $Y=$ , nMin=0,  $u_{n+1} = u_n \cdot \frac{7}{8}$  ( $n$  vindt je onder de knop  $X, T, \theta, n$ ),

$u(nMin)=320$ .

**d)** Geef een directe formule voor  $g_n$ .

$$g_n = 320 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^n, n = 0, 1, 2, \dots$$

**e)** Na hoeveel verdunningen is er minder dan 10 gram zout over in de bak?

Met de GR, uitproberen: dus  $g_n = 320 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^n < 10$ , of met logaritmen. Met de recursieve formule:  $n = 26$ :  $g_n = 11.4$  en

$$n = 27: g_n = 9.94 \therefore n = 27.$$

### Opgave 10 § 2 Samengestelde Interest

Bij de meeste banken wordt de rente jaarlijks berekend. Als je de rente niet opneemt, wordt die bij het spaartegoed opgeteld. Het jaar daarop levert deze rente ook weer rente op: samengestelde interest.

Stel dat je 4% rente ontvangt per jaar. In het eerste jaar had je €1207.  $n$  jaar later is dit kapitaal aangegroeid tot  $K_n$  euro.

**a)** Hoe kun je  $K_4$  (dat is het kapitaal na 4 jaar) berekenen als je  $K_3$  kent?

$$K_4 = K_3(1 + 0.04).$$

**b)** de recursieve formule voor  $K_n$ ?

$$- K_0 = 1207,$$

$$- K_{n+1} = K_n(1 + 0.04), n = (0, 1, 2, 3, \dots).$$

**c)** Met de GR kun je een tabel maken.

$$nMin = 0,$$

$$u(n) = u(n-1) \cdot 1.04,$$

$$u(nMin) = 1207.$$

**d)** Na hoeveel jaar wordt de €10000 grens overschreden?

Met de GR: ga naar het scherm met quit en toets  $u(100)$  Enter.

$$n = 100 \Rightarrow \text{€}60959, \text{ te hoog}; n = 50 \Rightarrow \text{€}8577, \text{ te laag}; n = 55 \Rightarrow \text{€}10436, \text{ te hoog}; n = 54 \Rightarrow \text{€}10035.$$

Na 54 jaar wordt de €10000 grens overschreden.

**e)**  $K_3 = 1207 \cdot (1.04)^3$ ?

$$K_1 = K_0 \cdot 1.04,$$

$$K_2 = K_1 \cdot 1.04 = K_0 \cdot (1.04)^2.$$

$$\text{Dus, } K_3 = 1207 \cdot (1.04)^3.$$

**f)** De directe formule:  $K_n = K_0 \cdot (1.04)^n, n = (0, 1, 2, 3, \dots)$ .

**g)**  $K_8 - K_7$  ?

$$K_8 - K_7 = K_0 \cdot [(1.04)^8 - (1.04)^7] = K_0 \cdot (1.04)^7 \cdot (1.04 - 1) = 1207 \cdot (1.04)^7 \cdot 0.04 = 63.53.$$

**h)** De betekenis van  $K_8 - K_7$ : de rente opgebouwd in het 8<sup>ste</sup> jaar. Dus de rente die je over het jaar  $n$  ontvangt.

### Opgave 11 § 2 Competitie

Vier ploegen spelen een halve competitie, dat wil zeggen dat elke ploeg één keer tegen elk van de andere drie ploegen speelt.

**a)** Hoeveel wedstrijden worden er in totaal gespeeld?

Het aantal wedstrijden is 6.

Zie onderstaand schema met de ploegen A, B, C, D.

|   | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| A |   |   |   |   |
| B |   |   |   |   |
| C |   |   |   |   |
| D |   |   |   |   |

Met dit schema tel je snel dat er 6 wedstrijden zijn. Ongeordend zonder terugleggen:  $\binom{4}{2} = 6$ . Een herhaling van

eerdere lessen.

Tellen:

A speelt tegen B, C, D

B speelt tegen A, C, D

C speelt tegen A, B, D

D speelt tegen A, B, C

Totaal  $4 \cdot 3 = 12 = \frac{4!}{2!}$ .

Maar let op. Op deze wijze wordt er twee keer tegen elkaar gespeeld en dat was niet de bedoeling. Dus het aantal wordt:  $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = \binom{4}{2} = 6$ .

**b)** Door te tellen met een vergelijkbaar schema als hierboven vind je dat bij een halve competitie van tien ploegen er in totaal 45 wedstrijden worden gespeeld.

Kijken we naar het schema van 4 ploegen dan is het aantal wedstrijden  $3 + 2 + 1 = 6$ .

Maken we een vergelijkbaar schema voor 10 ploegen:  $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$ .

Nota Bene: de bovenstaande reeks van getallen is een rekenkundige reeks. In de volgende lessen komen we daarop terug.

Hoeveel wedstrijden met 11 ploegen? Nu is het duidelijk dat met 11 ploegen het aantal wedstrijden gelijk is aan  $45 + 10 = 55$ . Nota Bene:  $\binom{11}{2} = 55$ .

**c)**  $n$  ploegen spelen een halve competitie,  $\{n \in \mathbb{N}\}$ .  $c_n$  is het aantal wedstrijden dat gespeeld wordt.

$c_{n+1}$ ? We hebben gezien uit de getallen voorbeelden dat  $c_{n+1} = c_n + n$ .

**d)** Recursieve formule voor  $c_n$ ?

Je begint niet met  $n = 1$ , want je speelt niet tegen jezelf:

$$c_2 = 1,$$

$$c_{n+1} = c_n + n.$$

We stellen dat de voorgaande recursie formule juist is. Leidt dit tot een tegenspraak? Dit onderzoeken we door nog een team toe te voegen:

$$c_{n+1} = c_n + n \Rightarrow c_{n+1} + (n+1) = c_n + n + (n+1) \Rightarrow c_{n+2} = c_{n+1} + n + 1 \Rightarrow \text{geen tegenspraak.}$$

**e)** Met de GR kun je een tabel van  $c_n$  maken.

**f)** Je weet nu dat voor bijvoorbeeld  $n = 6$ :

$c_7 = c_6 + 6$ ;  $c_6 = c_5 + 5$ ; ...;  $c_3 = c_2 + 1$ ;  $c_2 = 1$ , en  $c_7$  is de som van de eerste zes positieve getallen. Met behulp van de vondst van de wiskundige Gauss wordt deze som als volgt gevonden:

$$c_7 = 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1,$$

$$c_7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 1.$$

$$\text{Opgeteld: } 2 \cdot c_7 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 \Rightarrow 2 \cdot c_7 = 6 \cdot 7 = 42 \Rightarrow c_7 = 21.$$

$$\textbf{g)} } c_{11} \text{? } c_{11} = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 = 55.$$

**h)** Wat is de directe formule voor  $c_n$ ? Gelet op bovenstaande getallen reeks:  $c_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1)$ .

Dit resultaat kunnen we ook nog op een andere manier vinden:

$$c_n = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)!}{2(n-2)!} = \frac{1}{2} n \cdot (n-1) \frac{(n-2)!}{(n-2)!} = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1), \text{ QED.}$$

$$c_{n+1} \text{? } c_{n+1} = c_n + n = \frac{1}{2} n \cdot (n-1) + n = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n = \frac{1}{2} (n+1) \cdot n.$$

$$c_{n+1} = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1) \cdot n!}{2!(n+1-2)!} = \frac{n+1}{2} \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n+1}{2} \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{1}{2} (n+1) \cdot n, \text{ QED.}$$

**Opgave 12 § 2** Aanvulling medicijn spiegel bovenstaande **opgave 3 § 1**

Het aantal milligrammen medicijn in het lichaam, na de inname van de dagelijkse dosis op dag  $n$  is  $m_n$ ,

( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Voor de recursieve betrekking hebben we gevonden, opgave 3 § 1,

$$m_1 = 1500,$$

$$m_n = 0.75 \cdot m_{n-1} + 1500, \quad (n = 2, 3, 4, \dots).$$

**a)** Maak een tabel met gebruikmaking van de Grafische rekenmachine. Hoeveel milligrammen zitten er in het

lichaam, onmiddellijk na de inname op dag 20?

$$n = 20 : m_{20} = 5.98 \cdot 10^3 \text{ mg.}$$

**b)** Onderzoek met de GR wat het aantal milligrammen na een groot aantal dagen is.

$$n = 25 : m_{25} = 6 \cdot 10^3 \text{ mg,}$$

$$n = 35 : m_{35} = 6 \cdot 10^3 \text{ mg,}$$

$$n = 45 : m_{45} = 6 \cdot 10^3 \text{ mg,}$$

$$n = 60 : m_{60} = 6 \cdot 10^3 \text{ mg.}$$

Dit komt overeen met de som van de reeks in opgave 3 § 1 tussen vierkante haken gelijk aan 4, en  $4 \cdot 1500 = 6000$ .

Zoals eerder is opgemerkt zullen we met de theorie uit de volgende lessen bewijzen dat de som inderdaad gelijk is aan 4.

### Opgave 13 § 2 De rij van Fibonacci

Fibonacci konijnen gaan nooit dood. Vanaf het tweede levensjaar werpt een Fibonaccikonijn één jong per jaar.

Mannetjes en vrouwtjes kent het Fibonacci geslacht niet. Erg modern dus (2021). In het begin van het jaar 0 is er 1 Fibonaccikonijn.

**a)** Leg uit dat er in het begin van jaar 1 nog steeds 1 konijn is en dat in het begin van jaar twee er 2 konijnen zijn. Het ene konijn heeft nog geen jong geworpen; aan het begin van jaar 2 heeft het konijn 1 jong geworpen. Er zijn dan in totaal twee konijnen.

**b)** Een tabel van het aantal konijnen in de zes eerste jaren.

| jaar   | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6  |
|--------|---|---|---|---|---|---|----|
| aantal | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 |

**c)** Leg uit dat geldt:

$$u(n) = u(n-1) + u(n-2)$$

voor alle gehele getallen  $n \geq 2$ .

Aan het eind van het jaar  $(n-1)$  zijn er  $u(n-1)$  konijnen. Daarvan zijn er  $u(n-2)$  in hun tweede levensjaar en die krijgen jongen: er komen dus  $u(n-2)$  jongen bij; dus  $u(n) = u(n-1) + u(n-2)$ , ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ).

De recursieve formule luidt dus:

$$u(0) = 1,$$

$$u(1) = 1,$$

$$u(n) = u(n-1) + u(n-2), (n = 2, 3, 4, \dots).$$

**d)** Voer bovenstaande recursie formule in op de GR. Kies  $nMin = 0$ , Achter  $u(nMin)$  moet je nu invoeren:  $\{1,1\}$ .

Dat betekent:  $u(0) = 1$ , en  $u(1) = 1$ .

**e)** Je kunt nu een tabel maken van de rij op je GR. Je ziet dan dat er in het jaar 11 meer dan 100 konijnen zijn.

**f)** Hoeveel zijn er in het jaar 40?

$$u(40) = 165580141 \cong 1.66 \cdot 10^8.$$

*History:*

*The question of how many rabbits there will be after 12 years appears in the book Liber Abaci. That book appeared in 1202, written by Leonardo of Pisa, who was also called Fibonacci (= son of Bonacci). The book has contributed greatly to the spread of the decimal system in Western Europe. Partly because of this book, mathematics flourished in the Middle Ages. It is not so easy to draw up a direct formula for the Fibonacci series.*

Opmerking:

In de opgaven hebben we allerlei soorten rijen leren kennen.

- rekenkundige rijen: rijen met een constant verschil tussen de opvolgende termen,
- meetkundige rijen: rijen met een constante verhouding(reden) tussen opvolgende termen,
- kwadratische rijen: rijen van het type  $a_n = a + b \cdot n + c \cdot n^2$ , zie opgave 11.

- Oefenen  
Maak de opgaven van paragraaf 1 en van paragraaf 2 tot en met opgave 16.

## Blok 7 Les 2 Rijen, Series

Deze les sluit aan bij de paragraaf 1 en de eerste helft van paragraaf 2 van Hoofdstuk 3 Discrete dynamische modellen van de Wageningse Methode 2015

<http://www.wageningse-methode.nl/methode/het-lesmateriaal/?S=y456v-d>

- Rijen

Voorbeelden:

- 1, 2, 3, 4, 5,..... De rij van natuurlijke getallen.
- 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,..... De rij van priemgetallen.
- 1, 4, 9, 16, 25,..... De rij van kwadraten.
- $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$  De rij van breuken.

- Rekenkundige rijen, Arithmetic Series

*Dat zijn rijen met een constant verschil tussen opvolgende termen in de rij. Dus elke volgende term is de vorige term plus een vast getal  $G$ .*

*Directe formule:  $t_n = B + n \cdot G$*

*Recursieve formule:  $t_n = t_{n-1} + G$  en  $t_0 = B$ .*

Voorbeeld:

A. heeft € 235 op de spaarrekening staan.

Elke maand wordt de spaarrekening aangevuld met € 23 . Het overzicht per maand ziet er als volgt uit:

Maand 1 € 235

Maand 2 € 235 + € 23 = € 258

Maand 3 € 235 + € 23 + € 23 = € 281

Maand 4 € 235 + € 23 + € 23 + € 23 = € 304

Maand 5 .....

- Meetkundige rijen, Geometric Series

*Dat zijn rijen met een constante verhouding(reden) tussen de opvolgende termen in de rij.*

- *Definitie: elke volgende term is de vorige term keer een vaste factor  $r$ .*

- *Directe formule:  $t_n = B \cdot r^n$*

- *Recursieve formule:  $t_n = r \cdot t_{n-1}$  en  $t_0 = B$ .*

Voorbeeld:

A heeft € 1000 op de spaarrekening staan. De rente is 4% per jaar(heel lang geleden). De jaarlijkse rente wordt elk jaar op de rekening bijgeschreven.

Het jaar overzicht is:

Jaar 1 € 1000

Jaar 2 € 1000 + 0.04 x € 1000 = € 1040.

Jaar 3 € 1040 + 0.04 x € 1040 =  $(1.04)^2$  x € 1000 = € 1080.60

Jaar 4 € 1081.60 + 0.04 x € 1081.60 =  $(1.04)^3$  x € 1000 = € 1124.86

Jaar 5 .....

- Kwadratische rijen.

Dat is een rij van het type  $a_n = a + bn + cn^2$ .

Zo zijn er ook nog andere rijen te construeren.

Let op: hier wordt een voorbeeld gegeven waarbij de term  $a_n$  is weergegeven met een subscript of index  $n$  genoemd. Op de GR en in de literatuur wordt soms ook gewerkt met  $a(n)$ . Dit wordt de functienotatie genoemd.

- De som van een rekenkundige rij. The sum of an Arithmetic Series.

**Opgave 22 § 2**

$u_1 = 100$  en  $u_9 = 144$ .

a) Het constante verschil tussen opvolgende termen? In 8 stappen van 100 naar 144. Dat is 5.5 per stap.  
Het constante verschil is 5.5

b) De gemiddelde waarde van de negen termen? De rij is: 100, 105.5, 111, 116.5, 122, 127.5, 133, 138.5, 144.

Het gemiddelde van 116.5 en 127.5 is 122 (5.5 erbij en 5.5 eraf). Enzovoort, dus het gemiddelde van 111 en 133 is 122.

c) De som van de eerste 9 termen? Het gemiddelde van de eerste 9 termen is 122.

De som van de eerste 9 termen:  $9 \cdot 122 = 1098$ .

*De middelste term(en) van de eerste  $n$  termen van een rekenkundige rij is het gemiddelde van de termen.*

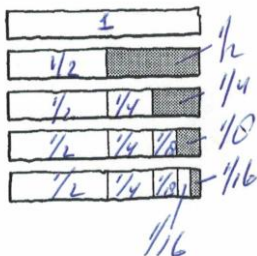
*Dat gemiddelde is ook het gemiddelde van de eerste en de laatste term:  $\frac{1}{2}(u_1 + u_n)$ .*

*De som van de eerste  $n$  termen is dus:*

$$n \cdot \frac{1}{2}(u_1 + u_n) = \frac{1}{2}n(u_1 + u_n).$$

- De som van een meetkundige rij. The sum of a geometric series.

**Opgave 27 § 2**



Hierboven is een balk verdeeld in twee helften. De rechter helft is weer verdeeld in twee helften, etc.

a) Voor de onderste helft kunnen we schrijven:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{16}.$$

De witte stukken zijn van links naar rechts  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ . Deze stukken opgeteld is de hele balk verminderd

met het grijze gedeelte.

**b)** We kunnen nu onmiddellijk uitrekenen:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} = 1 - \frac{1}{256}$ .

**c)** We zien dat:  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{256}$  een meetkundige reeks met reden  $\frac{1}{2}$ . Elk voorgaand getal wordt met  $\frac{1}{2}$  vermenigvuldigd om het volgende getal te verkrijgen.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= 1 - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} &= \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} &= \frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{256} &= 1 - \frac{1}{256} = \frac{255}{256}.\end{aligned}$$

*Algemeen:*

$1, r, r^2, r^3, \dots, r^n$  is een meetkundige rij met reden  $r$ .

$S_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n$  is de som van de eerste  $n + 1$  termen.

Dus geldt:

$$r \cdot S_n = r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots + r^{n+1},$$

$$\text{Dan vinden we, } S_n - r \cdot S_n = 1 - r^{n+1},$$

$$\text{Of } (1 - r)S_n = 1 - r^{n+1},$$

$$\text{Resultaat: } S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{r - 1} (r^{n+1} - 1), \text{ voor } r \neq 1.$$

**Opgave 29 § 2**

**a)** De formule  $S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{r - 1} (r^{n+1} - 1)$ , voor  $r \neq 1$ , is als volgt te bewijzen:

$$(r - 1) \cdot (r^0 + r^1 + \dots + r^{n-1} + r^n) = r^{n+1} - 1.$$

Dor de vermenigvuldiging ter linkerzijde van het gelijkteken uit te voeren, zie je dat het klopt. Alle termen vallen tegen elkaar weg behalve  $r^{n+1}$  en  $-1$ .

$$r^1 + r^2 + \dots + r^n + r^{n+1} - r^0 - r^1 - \dots - r^{n-1} - r^n = r^{n+1} - r^0 = r^{n+1} - 1.$$

**b)** Deel beide kanten van  $(r - 1) \cdot (r^0 + r^1 + \dots + r^{n-1} + r^n) = r^{n+1} - 1$  door  $(r - 1)$ :

$$S_n = r^0 + r^1 + \dots + r^{n-1} + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}.$$

Van een discreet dynamisch proces kun je een tijdgrafiek maken in de vorm van stippen. Horizontaal zet je de tijd uit, dat is dus wat door " $n$ " wordt aangegeven. Met de GR gaat het als volgt:

- Zet de GR met MODE in de stand Seq(regel 4) en de stand Dot(regel5).
- Voer de rij in met Y=
- Stel met WINDOW een geschikt window in
- Teken met GRAPH de tijdgrafiek.

De stand Dot zorgt ervoor dat er een stippengrafiek ontstaat.

[Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven.](#)

**Opgave 26 § 2**

Gegeven de reeks  $u_n = (-1)^n, n = 0, 1, 2, 3, \dots$

**a)** De rij of reeks is:  $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$  de termen van de rij zijn afwisselend  $-1$ , en  $1$ .

**b)** Een meetkundige reeks?

Dus:  $1, r, r^2, r^3, \dots, r^n$ . De reeks onder a) is een meetkundige reeks met reden  $r = -1$ .

**c)** De som van de reeks is  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ .

De som van de meetkundige reeks is:

$$S_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}, \text{ met reden } r = -1.$$

Nota bene:  $n = 0$  doet ook mee.

$$S_n = \frac{1}{2} [1 - (-1)^{n+1}] = \frac{1}{2} [1 + (-1)^n].$$

Deze som is 1 voor  $n$  is even, en de som is 0 voor  $n$  is oneven.

Hieruit volgt:

$$S_{100} = 1,$$

$$S_{101} = 0.$$

### Opgave 31 § 2

Bereken met de formule de sommen:

**a)**  $1+3+9+27+81+243+729+2187.$

Een meetkundige reeks met  $n + 1$  termen (=8) en reden  $r = 3$ .

$$S_7 = \frac{1}{r-1} (r^8 - 1) = \frac{1}{2} (3^8 - 1) = 3280.$$

**b)**  $10+30+90+270+810+2430+7290+21870.$

Na inspectie is het duidelijk dat de som van deze reeks 10 keer de som van de reeks onder a) is  $\therefore S_7 = 32800$ .

**c)** Na herschrijven van de breuken:  $\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} + 13\frac{1}{2} + \dots + 1093\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{9}{2} + \frac{27}{2} + \frac{81}{2} + \frac{243}{2} + \frac{729}{2} + \frac{2187}{2}.$

De som  $S_7 = \frac{1}{2} \cdot 3280 = 1640.$

### Opgave 32 § 2

Gegeven de meetkundige reeks  $u_0, u_1, u_2, \dots$  met directe formule  $u_n = 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n, n = 0, 1, 2, \dots$ .

**a)**  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n?$

De som ziet er als volgt uit:

$$S_n = 5 \cdot \left[1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] \Rightarrow \text{een meetkundige reeks met reden } \frac{1}{3}.$$

$$\text{Dus: } S_n = 5 \cdot \frac{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right]}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{15}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] = \frac{15}{2} - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

**b)** Als  $n$  willekeurig groot wordt, wordt  $\left(\frac{1}{3}\right)^n$  heel klein en gaat naar 0 toe. De limietwaarde is 0.

Voor  $n \rightarrow \infty \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow 0$ . De som van de meetkundige reeks wordt  $S_n \rightarrow \frac{15}{2}$  voor  $n \rightarrow \infty$ .

$$\text{Schrijfswijze: } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{15}{2} - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = \frac{15}{2}.$$

**c)** Voor welke waarde van  $n$  is:  $\frac{15}{2} - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \geq \frac{15}{2} - 10^{-6} \Rightarrow 3^n \geq \frac{5}{2} \cdot 10^6$ . Op te lossen met proberen of bijvoorbeeld met logaritme.

$$n \cdot \log_{10} 3 \geq \log_{10} 5 - \log_{10} 2 + 6 \Rightarrow n \geq \frac{6 + \log_{10} 5 - \log_{10} 2}{\log_{10} 3} \Rightarrow n \geq 14.$$

Met de GR:

Als de som  $\frac{15}{2} - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$  minder dan  $10^{-6}$  van de limietwaarde 7.5 verschilt, moet gelden dat  $\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n < 10^{-6}$ . We maken met de GR een tabel om uit te zoeken voor welke waarde van  $n$  dat geldt.

Zie onderstaande tabel:

Uit de tabel blijkt dat voor  $n \geq 14$ , de som  $\frac{15}{2} - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$  minder dan  $10^{-6}$  van de limietwaarde 7.5 verschilt.

| $n$ | $2,5 \cdot \frac{1^n}{3}$ |
|-----|---------------------------|
| 0   | 2,5                       |
| 1   | 0,83                      |
| ... | ...                       |
| 11  | $1,4 \times 10^{-5}$      |
| 12  | $4,7 \times 10^{-6}$      |
| 13  | $1,6 \times 10^{-6}$      |
| 14  | $5,2 \times 10^{-7}$      |

Een klassieke meetkundige reeks: De paradox van Achilles en de schildpad.

Soms ook de paradox van de haas en de schildpad genoemd.

De schildpad daagde Achilles uit voor een hardloop wedstrijd. De schildpad beweerde te winnen als Achilles de schildpad een kleine voorsprong gaf:

"Veronderstel," begon de Schildpad, "dat u me een voorsprong van 10 meter geeft. Zou u zeggen dat u die 10 meters tussen ons snel kunt afleggen?" "Zeer snel," bevestigde Achilles. "En hoeveel meter heb ik in die tijd afgelegd, denkt u?" "Misschien een meter - niet meer," zei Achilles na even nagedacht te hebben. "Zeer goed," antwoordde de Schildpad, "dus nu is er een meter afstand tussen ons. En zou u die achterstand snel inlopen?" "Zeer snel inderdaad!" "En toch zal ik in die tijd verder gegaan zijn, zodat u DIE afstand moet inhalen, ja?" "Eeh, ja" zei Achilles langzaam. "En terwijl u dat doet, zal ik een stukje verder gegaan zijn, zodat u steeds een nieuwe achterstand moet inlopen" ging de Schildpad stug door. Achilles zei niets. "En zo ziet u, elke periode dat u bezig bent uw achterstand in te halen zal ik gebruiken om een nieuwe afstand, hoe klein ook, aan die achterstand toe te voegen." "Inderdaad, daar valt geen speld tussen te krijgen," antwoordde Achilles, nu al vermoeid. "En zo kunt u nooit de achterstand inlopen," besloot de Schildpad met een sympathieke glimlach. "U heeft gelijk, zoals altijd," besloot Achilles droevig - en gaf de race gewonnen.

**a)** De paradox kan verklaard worden door naar het verloop van de tijd te kijken. Stel dat Achilles 5 meter per seconde loopt, en de schildpad 0.5 meter per seconde. Verder gaan we er van uit dat de schildpad 5 meter voorsprong krijgt.

Na hoeveel tijd heeft Achilles die 5 meter ingehaald en hoeveel verder is de schildpad dan?

Na 1 seconde heeft Achilles de 5 meter ingehaald, maar dan is de schildpad alweer 0.5 meter verder.

**b)** En hoeveel tijd is er totaal verstreken als Achilles ook die afstand (0.5 meter) heeft ingehaald, en hoeveel verder is de schildpad dan?

De 0.5 meter heeft Achilles na 0.1 seconde ingehaald, dus Achilles totaal tijd is 1.1 seconde. De schildpad is inmiddels weer 0.05 meter verder.

**c)** Weer opnieuw vraag b).

De 0.05 meter heeft Achilles na 0.01 seconde ingehaald, dus Achilles totaal tijd is 1.11 seconde. De schildpad is weer 0.005 meter verder.

**d)** Als we zo doorgaan hoeveel tijd verstrijkt er dan in totaal?

De tijd die Achilles gebruikt is:

$$1 + 0.1 + 0.001 + \dots = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots$$

**e)** Na hoeveel tijd heeft Achilles de schildpad ingehaald?

De reeks in onderdeel d) is blijkbaar een meetkundige reeks met reden  $r = \frac{1}{10}$  en startwaarde  $a = 1$ . Van deze

reeks kennen we de som:  $S = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$  seconde.

- Oefenen

Maak de opgaven van de tweede helft van paragraaf 2

### Blok 7 Les 3 Iteratie, Iterative Processes

Deze les sluit aan bij de paragraaf 3 en paragraaf 4 (bladzijden 27 tot en met 34) en de eerste helft van paragraaf 2 van Hoofdstuk 3 Discrete dynamische modellen van de Wageningse Methode 2015

<http://www.wageningse-methode.nl/methode/het-lesmateriaal/?S=y456v-d>

- Iteratie

Voorbeeld: De spaarrekening

Op jaar 1 staat € 100,- op de rekening. Elk jaar wordt € 100 bijgestort.

De jaarlijkse rente is 2%. De rente wordt elk jaar bijgeschreven.

$n$  is het aantal jaren vanaf jaar 1.

$S_n$  is de hoogte van de spaarrekening op jaar  $n$ .

De recursieve formule hierbij is:

$$S_{n+1} = 1.02 \cdot S_n + 100.$$

Stel de functie  $y = F(x)$ :  $y = 1.02 \cdot x + 100$ .

In woorden: De structuur van discrete dynamische modellen →

→ De volgende waarde vind je door de huidige waarde met een vast getal te vermenigvuldigen.

Het dynamische model wordt beschreven door herhaald toepassen van  $F$  op  $S_n$ .

De actie  $F$  wordt de **iteratiefunctie** genoemd. Iteratie betekent: herhaling.

$\dots \rightarrow S_{n-1} \rightarrow F \rightarrow S_n \rightarrow F \rightarrow S_{n+1} \rightarrow \dots$ .

De volgende waarde vind je door de functie  $F$  op de huidige waarde toe te passen.

Met andere woorden:  $waarde \rightarrow F \rightarrow nieuwe\ waarde$ .

#### Opgave 42 § 3

$F$  is de functie WORTEL:  $u_{n-1} \rightarrow \sqrt{\phantom{x}} \rightarrow u_n$ .

Dus  $u_n = F(u_{n-1}) = \sqrt{u_{n-1}}$

a) Een tabel met de GR. Neem  $u_0 = 20$ :

| $n$ | $u(n)$ |
|-----|--------|
| 0   | 20     |
| 1   | 4.4721 |
| 2   | 2.1147 |
| 3   | 1.4542 |
| 4   | 1.2059 |
| 5   | 1.0981 |

|      |        |
|------|--------|
| 6    | 1.0479 |
| .... | ....   |
| 100  | 1      |

**b)** Om te weten te komen hoe groot  $u_{100}$  is, hoef je niet de hele tabel vanaf  $n = 0$  te doorlopen. Toets in het gewone scherm van de GR:  $u(100)$  en druk op ENTER:

$$u(100) = 1$$

**c)** De limietwaarde van de iteratie is 1.

**d)** Bij andere startwaarden van  $u_0$  vind je eveneens de limietwaarde 1.

## • Iteratie in beeld.

**Opgave 59 § 3** (zie ook opgave 3 van § 1) De medicijnspiegel

- Elke dag verdwijnt 25% medicijn uit het lichaam.

- Dagelijks neemt de patiënt 1500 mg medicijn in.

$m_n$  is de hoeveelheid medicijn in het lichaam in mg op dag  $n (= 1, 2, 3, \dots)$ .

Het dynamisch model is:

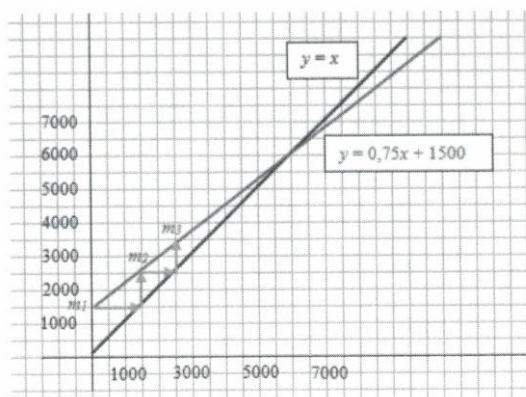
$$m_n = 0.75m_{n-1} + 1500,$$

$$m_1 = 1500.$$

Er geldt:  $m_n = F(m_{n-1})$ , waarbij de iteratiefunctie  $F$  is  $F(x) = 0.75x + 1500$ .

Met behulp van een webdiagram kan de iteratie worden uitgebeeld. Het webdiagram kan met de grafische rekenmachine worden gemaakt (Zie Bijlage 2). Dit is vooral interessant wanneer er sprake is van een limietwaarde. D.w.z.: de nieuwe waarde wordt steeds meer gelijk aan de vorige waarde.

Onderstaand webdiagram met een paar iteratiestappen:



**a)** Via de lijn  $y = x$ , wordt  $m_1, m_2, \dots$  Van de verticale as overgebracht op de horizontale as.

**b)** Op dezelfde wijze kunnen  $m_5$  en  $m_6$  in beeld worden gebracht (Nota bene: hier niet weergegeven). In het bovenstaande webdiagram wordt de "trede" steeds kleiner: Limiet.

**c)** Uit het webdiagram kun je aflezen dat de limiet ongeveer 6000 is: het snijpunt van de lijn  $F(x) = 0.75x + 1500$  met  $y = x$ .

**d)** De limietwaarde volgt uit de vergelijking:  $x = 0.75x + 1500 \Rightarrow x = 6000$ .

## • Iteratie.

*Bij een recursief gedefinieerde rij hoort een iteratiefunctie  $F$ .*

$$u_{n+1} = F(u_n).$$

*Een rij kan een limiet waarde  $L$  hebben.*

*Zoals eerder is geformuleerd naderen de waarden van  $u_n$  steeds dichter de waarde van*

de limiet  $L$  en wordt het verschil tussen de termen steeds kleiner. In het geval dat er een limiet is geldt:  $L = F(L)$ .

- De webgrafiek met de GR.

De tekst voor de te nemen stappen met de GR staat in Bijlage 2.

De rechtstreekse manier van itereren voor de medicijnspiegel met de GR:

0 ENTER

1500 = 0.75·ANS, ENTER, ENTER, ENTER,.....

Stelling: laat  $y = F(x)$  de iteratie functie zijn van  $u_n$ . Als  $F$  continu is en de rij  $u_n$  convergeert naar de limiet  $L$  dan geldt  $L = F(L)$ .

$F$  is continu wil zeggen dat  $F$  geen sprongen maakt. Als  $u_n$  willekeurig dicht bij  $L$  komt, komt  $F(u_n)$  ook willekeurig dicht bij  $F(L)$ .

- Twee dekpunten

Het dekpunt is het snijpunt van de lijn  $y = x$  met de iteratie functie  $F(x)$ .

Het dekpunt valt samen met de limiet. Dit wordt duidelijk gemaakt aan de hand van webdiagrammen.

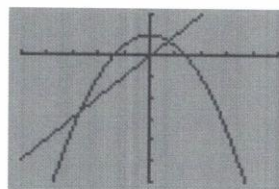
Iteratiefunctie  $F(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$

Het dekpunt is een snijpunt met de lijn  $y = x$ .

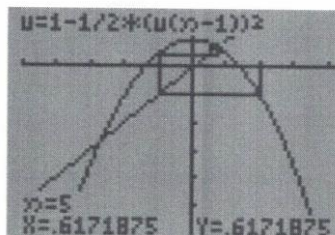
Voor het dekpunt geldt:  $F(x) = x$

Dus:

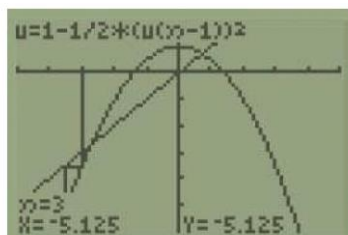
$$\begin{aligned} x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 \\ x^2 + 2x - 2 &= 0 \\ x &= -1 \pm \sqrt{3} \\ x &\approx -2,7; 0,7 \end{aligned}$$



Met  $u_0 = 2 \rightarrow$  Het webdiagram spiraliseert naar het rechter snijpunt met de parabool.



$u_0 = -3 \rightarrow$  Het webdiagram divergeert trapsgewijs weg van het linker snijpunt(dekpunt).



- Soorten webdiagrammen

*Convergente spiralen,*

*Divergente spiralen,*

*Convergente trappen,*

*Divergente trappen,*

*Periodieke stappen.*

Hoe teken je een webgrafiek bij  $u_{n+1} = F(u_n)$ ?

nota bene: in plaats van  $F$  wordt ook  $f$  gebruikt.

1. Teken de grafiek van  $y = f(x)$  en teken de lijn  $y = x$ .

2. Geef de beginwaarde van  $u_0$  aan op de  $x$ -as.

3. Ga verticaal naar de grafiek van  $f$  en vervolgens horizontaal naar de lijn  $y = x$ .

4. Herhaal stap 3 totdat je goed kunt zien hoe de webgrafiek zich gedraagt.

Je kunt de waarden van  $u_1, u_2$ , enzovoort aangeven op de  $x$ -as.

- De iteratie functie is lineair.

$$F(x) = ax + b :$$

Bij convergentie wordt de afstand tussen  $u_{n+1}$  en het dekpunt  $d$  bij elke stap kleiner.

Bij divergentie wordt die afstand bij elke stap groter.

Convergentie of divergentie hangt samen met de waarde van  $a$ .

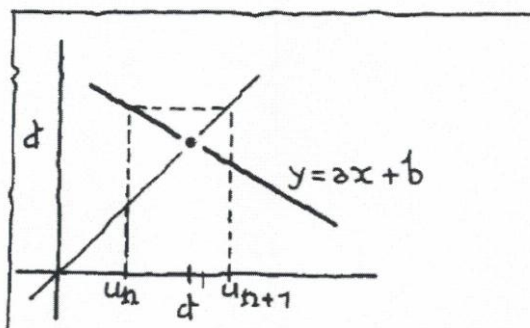
Voor het dekpunt  $d$  geldt:  $d = ad + b$ .

$$u_{n+1} = a \cdot u_n + b$$

$$u_{n+1} - d = a \cdot u_n - d + b = a \cdot u_n - ad - b + b = a(u_n - d).$$

Conclusie: de afstand tot het dekpunt wordt bij elke stap  $a$  keer zo groot.

Zie onderstaande figuur.



Dus wanneer geconcludeerd wordt dat de afstand tussen het dekpunt  $a$  keer zo groot wordt, is er alleen sprake van convergentie als  $|a| < 1$ .

### Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven.

#### Opgave 43 § 3

In opgave 42 (zie de samenvatting hierboven) gebruikten we de iteratie functie  $F$  en met de GR de functie WORTEL.

We gaan in vraagstuk 43 de iteratiefunctie  $F = \sqrt{u_{n-1} + 2}$  gebruiken in de iteratie keten  $\Rightarrow u_n = \sqrt{u_{n-1} + 2}$ , met  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

a) Neem  $u_0 = 20$ . De tabel voor  $u_n$ :

| $n$ | $u_n$ |
|-----|-------|
|-----|-------|

|     |        |
|-----|--------|
| 0   | 20     |
| 1   | 4.7    |
| ... | ...    |
| 8   | 2.0001 |
| 9   | 2      |

b)  $u_{100}$ ?

$$u_{100} = 2.$$

c) De limiet van de rij is 2.

d) De limiet bij een andere startwaarde.

We onderzoeken de vergelijking:  $x = \sqrt{x+2}$ .

$$x = \sqrt{x+2} \Rightarrow x^2 = x+2 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2. \text{ Notabene: } x = -1 \text{ convergeert niet.}$$

Conclusie: met bijvoorbeeld  $u_0 = 0.5$  vinden we ook de limiet gelijk aan 2.

### Opgave 68 § 3

Een opgave waarbij voor de onderstaande gevallen de webgrafiek gemaakt wordt. Zie Bijlage 2. Ik laat dat achterwege. We gaan naar de limieten onderzoeken, met  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

a)  $u_0 = 6$ , iteratie functie  $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ . De limiet is 2. Zie bovenstaande opgave 43.

b)  $u_0 = 6$ , iteratie functie  $u_{n+1} = \frac{5}{2} \cdot u_n - 3$ . Met de GR vinden we geen limiet. Echter met  $x = \frac{5}{2} \cdot x - 3$ , vinden we wel  $x = 2$ . Maar je ziet aan de iteratie functie dat  $u_{n+1} \rightarrow +\infty$

c)  $u_0 = 6$ , iteratie functie  $u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot u_n + \frac{1}{u_n}$ . De limiet is  $\sqrt{2}$ . Dit resultaat verkrijg je ook uit  $x = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ .

d)  $u_0 = 6$ , iteratie functie  $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$ . De limiet is  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ , de gulden snede. Dit resultaat vind je ook met

$$x = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}. \text{ Twee wortels. De negatieve wortel convergeert niet.}$$

e)  $u_0 = \frac{1}{2}$ , iteratie functie  $u_{n+1} = -u_n\sqrt{1 + u_n^2}$ . Geen limiet. Met  $x = -x\sqrt{1 + x^2}$  vind je  $x = 0$ . Dit vind je door kwadrateren van  $\sqrt{1 + x^2} = -1$ . Nota bene: je ziet aan de iteratie functie dat  $u_{n+1} \rightarrow -\infty$ .

f)  $u_0 = -1$ , iteratie functie  $u_{n+1} = 2 - u_n^2$ . Zonder GR zie je dat de limiet 1 is. Start met  $u_0 = -1$ , en alle volgende waarden  $u_{n+1}$  zijn gelijk aan 1.

### Opgave 71:

Gegeven is de rij  $u_0 = 5, u_{n+1} = 3 - 0.5u_n$  en  $n = 0, 1, 2, \dots$

a) Wat is de iteratiefunctie? Wat is het dekpunt  $d$ ?

$$\text{De iteratie functie: } f(x) = 3 - 0.5x.$$

$$\text{Het dekpunt } d: d = 3 - 0.5d \therefore d = 2.$$

b) Hoe groot zijn:  $|u_0 - d|$ ,  $|u_1 - d|$  en  $|u_2 - d|$ ?

$$|u_0 - d| = 5 - 2 = 3,$$

$$|u_1 - d|, \text{ de formule, afgeleid op bovenstaande bladzijde, } u_{n+1} - d = a(u_n - d) \Rightarrow |u_1 - d| = 0.5|u_0 - d| = \frac{3}{2},$$

$$|u_2 - d| = 0.5|u_1 - d| = 0.5 \cdot 0.5|u_0 - d| = \frac{3}{4}.$$

c) Bewijs dat  $|u_n - d| = 3 \cdot (0.5)^n$ .

$$|u_n - d| = 0.5|u_{n-1} - d| = 0.5 \cdot 0.5|u_{n-2} - d| = (0.5)^3|u_{n-3} - d| = \dots = (0.5)^n|u_0 - d| = 3 \cdot (0.5)^n.$$

d) Vanaf welke waarde van  $n$  geldt:  $u_n$  verschilt minder dan 0.00001 van de limiet?

$$\text{Dus voor welke waarde van } n \text{ geldt } |u_n - d| = 3 \cdot (0.5)^n < 0.00001 \Rightarrow 2^n > 3 \cdot 10^5 \therefore n > 18. \text{ Dus vanaf } n = 19.$$

### • Oefenen

Maak de opgaven van bladzijden 16 tot en met 19 en van de bladzijden 27 tot en met 33.

Deze les sluit aan bij paragraaf 4, de bladzijden 20 tot en met 26, 30 en 31 van Hoofdstuk 3 Discrete dynamische modellen van De Wageningse Methode, 2015.

<http://www.wageningse-methode.nl/methode/het-lesmateriaal/?S=y456v-d>

- Rijen, Rows

Voorbeeld 1:

Je hebt de rij  $u_n = \frac{1}{n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )  $\Rightarrow \{\forall n \in \mathbb{N}\}$ .

Vanaf een zekere waarde van  $n$  zijn de termen kleiner dan een vooraf gekozen klein getal.

Keuze  $10^{-10} = \frac{1}{10^{10}}$  als een klein getal.

Voor waarden van  $n > 10^{10}$  geldt  $\frac{1}{n} < 10^{-10}$ .

Dat wil zeggen de rij nadert tot 0 of de limiet van de rij is 0. Met andere woorden: de rij convergeert naar 0.

In notatie:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

Voorbeeld 2:

$$u_n = \frac{n}{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

vermoed je dat  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  wel eens 1 zou kunnen zijn. Door  $u_n$  wat anders op te schrijven wordt dit duidelijk:

$$u_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Elke term verschilt  $\frac{1}{n+1}$  van 1. Dit verschil met 1 kun je willekeurig klein maken.

Dus:  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$ .

De rij convergeert naar 1.

Voorbeeld 3:

$$u_n = \frac{n^2}{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \text{ Als } n > 0 \text{ geldt } \frac{n^2}{n+1} > n - 1 \rightarrow n^2 > n^2 - 1$$

$u_n$  overschrijdt elk vooraf gekozen groot getal als je  $n$  groot genoeg kiest.

Notatie:  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$ .

De rij convergeert niet.

$$\text{Nota bene: } \frac{n^2}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - 2n - 1}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - 2(n+1) + 1}{n+1} = (n+1) - 2 + \frac{1}{n+1} = (n-1) + \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{Dus } \frac{n^2}{n+1} = [(n-1) + \frac{1}{n+1}] > (n-1).$$

Je ziet dat dit ook geldt voor  $n = 0$  ( $> -1$ ).

- Algemeen:

Gegeven een rij  $u_n$  en een getal  $L$ .

De limiet van  $u_n$  is  $L$  betekent dat de getallen  $u_n$  naderen tot  $L$  (als  $n$  nadert tot oneindig).

We zeggen ook wel dat de rij  $u_n$  convergeert naar  $L$ .

Notatie:  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L$ .

Limiet: grens, grenswaarde.

Convergent: in een punt samenkomend.

De rij  $u_n$  heeft limiet  $L$  als bij elke kleine positieve afwijking  $a$  van  $L$  je een rangnummer  $R$  kunt vinden zodat als  $n \geq R$  geldt:

$$L - a \leq u_n \leq L + a$$

De rij  $u_n$  heeft limiet  $\infty$  als je bij elk groot getal  $A$  een rangnummer  $R$  kunt vinden zodat  $u_n \geq A$  als  $n \geq R$ .

- Convergent of niet convergent:

Voorbeeld:

$$u_n = \frac{100 \cdot n}{n+1}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty? \text{ Nee, toch niet.}$$

$$0 \leq \frac{100 \cdot n}{n+1} = \frac{100}{1+\frac{1}{n}} < 100.$$

Conclusie:

Het gedrag van de eerste termen van een rij, ook al zijn het heel veel termen, zegt niets over het gedrag van de volledige oneindige rij.

Het gaat om het bewijs.

- Regels

| $\lim u_n$ | $\lim v_n$ | $\lim(u_n \cdot v_n)$ | $\lim(\frac{u_n}{v_n})$ | $\lim(u_n + v_n)$ | $\lim(u_n - v_n)$ |
|------------|------------|-----------------------|-------------------------|-------------------|-------------------|
| $U$        | $0$        | $0$                   | $?$                     | $U$               | $U$               |
| $U$        | $V \neq 0$ | $U \cdot V$           | $\frac{U}{V}$           | $U + V$           | $U - V$           |
| $\infty$   | $0$        | $?$                   | $?$                     | $\infty$          | $\infty$          |
| $0$        | $\infty$   | $?$                   | $0$                     | $\infty$          | $-\infty$         |
| $\infty$   | $\infty$   | $\infty$              | $?$                     | $\infty$          | $?$               |

We hebben 2 kolommen:  $u_n$  en  $v_n$ .

Je kan verschillende gevallen bekijken:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n, \lim_{n \rightarrow \infty} v_n, \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \cdot v_n), \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{u_n}{v_n}), \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) \text{ en } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n).$$

Elke situatie wordt apart bekeken. Soms is het handig om, bijvoorbeeld een product of een deling uit te werken of apart te behandelen. In de situatie met een vraagteken (zie bovenstaande tabel) bekijk je apart wat de limiet kan zijn. De verschillende situaties zijn in de tabel weergegeven.

- Bekende limieten

Stelling

$$\text{- Als } a > 0 \text{ dan is } \lim_{n \rightarrow \infty} n^a = \infty \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^{3.7} = \infty$$

$$\text{- Als } a > 0 \text{ dan is } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} = 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} = 0$$

- Als  $g > 1$  dan is  $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n = \infty \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2})^n = \infty$
- Als  $0 < g < 1$  dan is  $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n = 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (0.3)^n = 0$

- Convergent of niet convergent

Voorbeeld 1:

$$u_n = \frac{2n^3 + 5n^2}{4n^3 + n + 7}$$

Voor  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  is er een  $\frac{\infty}{\infty}$  situatie.

Teller en noemer delen door  $n^3$ :  $u_n = \frac{2 + \frac{5}{n}}{4 + \frac{1}{n^2} + \frac{7}{n^3}}$

Hier uit volgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{2}$ .

Voorbeeld 2:

$$u_n = \frac{2n^3 + 5n^2}{4n^2 + n + 7}$$

Voor  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  is er een  $\frac{\infty}{\infty}$  situatie.

Teller en noemer delen door  $n^2$ :  $u_n = \frac{2n + 5}{4 + \frac{1}{n} + \frac{7}{n^2}}$

Als  $n \rightarrow \infty$  gaat de teller naar  $\infty$  en de noemer naar 4.

De limiet is  $\infty$ .

Voorbeeld 3:

$$u_n = n^3 - n^2$$

Een  $\infty - \infty$  situatie.

$$u_n = n^3 - n^2 = n^2(n - 1)$$

Nu is het een  $\infty \times \infty$  situatie en de limiet is  $\infty$ .

De derde macht wint het van de tweede macht.

De rekenregels nog eens samengevat:

**Rekenregels voor limieten**

Gegeven zijn twee convergente rijen  $u_n$  en  $v_n$ . Dan

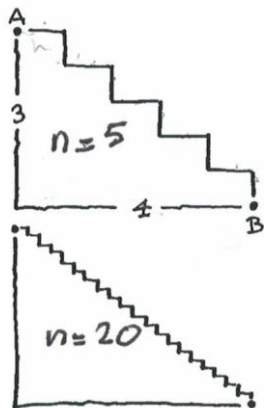
- is ook de rij  $c \cdot u_n$  convergent en  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot u_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  (voor elk getal  $c$ ),
- is ook de rij  $u_n + v_n$  convergent en  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ ,
- is ook de rij  $u_n - v_n$  convergent en  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n - \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ ,
- is ook de rij  $u_n \cdot v_n$  convergent en  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \cdot v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ .

Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven.

**Opgave 46 § 4** De trap

De punten A en B liggen verticaal 3 van elkaar en horizontaal 4.

Zie onderstaande figuur.



We maken trappen tussen A en B van  $n$  treden ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

In bovenstaande figuur zijn trappen gemaakt van  $n = 5$  en  $n = 20$ . De lengte van de traplijn met  $n$  treden noemen we  $u_n$ .

Redenering: de traplijn gaat steeds meer op het lijnstuk AB lijken. De lengte van AB berekenen we met de stelling van Pythagoras:  $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 5$ . Is deze limiet juist?

We nemen  $n = 5$ :  $u_5 = \frac{3}{5} \cdot 5 + \frac{4}{5} \cdot 5 = 7$ .

$$u_n = n \left( \frac{3}{n} + \frac{4}{n} \right) = 7 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{3}{n} + \frac{4}{n} \right) = 7.$$

De mogelijke misvatting kan zijn ontstaan door de definitie van traplijn: de traplijn is de som van de verticale en horizontale stukken van de traprede.

#### Opgave 52 § 4 Juist of Onjuist, (1)

$u_n$  en  $v_n$  zijn twee rijen(reeksen)

a) Als  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -3$ , en  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 5$ , dan  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = 2$ . Juist of onjuist?

Juist.

b) Als  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -3$ , en  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 5$ , dan  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n/v_n) = -0.6$ . Juist of onjuist?

Juist

c) Als  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -3$ , dan  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)^2 = 9$ . Juist of onjuist?

Juist.

d) Als  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -3$ , dan  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n} = -\frac{1}{3}$ . Juist of onjuist?

Juist.

e) Als  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , dan  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n} = \infty$ . Juist of onjuist?

Onjuist, want bijvoorbeeld  $\lim_{n \rightarrow \infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ , en  $\lim_{n \rightarrow \infty} -(2)^n = -\infty$ .

f) Als  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$ , dan  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n} = 0$ . Juist of onjuist?

Juist.

#### Opgave 53 § 4 Juist of Onjuist, (2)

$u_n$  en  $v_n$  zijn twee convergente rijen(reeksen).

a) Als  $u_n < 10$  voor elke  $n$ , dan  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n < 10$ . Juist of onjuist?

Onjuist. Een voorbeeld:  $u_n = 10 - \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(10 - \frac{1}{n}\right) = 10$ .

b) Als  $u_n \leq 10$  voor elke  $n$ , dan  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq 10$ . Juist of onjuist?

Juist.

c) Als  $u_n < v_n$  voor elke  $n$ , dan  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n < \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ . Juist of onjuist?

Onjuist. Een voorbeeld:  $u_n = 10 - \frac{1}{2n}$  en  $v_n = 10 - \frac{1}{n}$ .

d) Als  $u_n \leq v_n$  voor elke  $n$ , dan  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ . Juist of onjuist?

Juist.

#### Opgave 54 § 4 Convergent of niet convergent

Gegeven twee rijen  $u_n$  en  $v_n$ . De rij  $v_n$  is convergent, de rij  $u_n$  is niet convergent.

Gegeven  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$ .

-  $c \cdot u_n$  voor  $c > 0$  en  $c < 0$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot u_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \pm\infty$ , niet convergent.

-  $u_n + v_n$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \infty$ , niet convergent.

-  $u_n - v_n$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n - \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \infty$ , niet convergent.

-  $c \cdot u_n \cdot v_n$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot u_n \cdot v_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \pm\infty$ , niet convergent voor  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n \neq 0$ . Als  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ , dan krijgen we  $\pm\infty \cdot 0$  en dat is onbepaald.

#### Opgave 55 § 4

-  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^{-1} + n^0 + n) = \infty$ ,

-  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^{-2} + n^{-1} + n^0) = 1$ ,

-  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + n + n^0) = \infty$ ,

-  $\lim_{n \rightarrow \infty} (4 \cdot n^{-0.1} + n \cdot 4^{-0.1}) = \infty$ ,

-  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(\frac{1}{4}\right)^n + 5 \cdot (\sqrt{2})^n \right] = \infty$ ,

-  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ (4)^n + 5 \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^n \right] = \infty$ ,

-  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(\frac{1}{4}\right)^n + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] = 0$ ,

-  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ (4)^n + 5 \cdot (\sqrt{2})^n \right] = \infty$ .

#### Opgave 56 § 4

$u_n$  en  $v_n$  zijn twee rijen. Wat weet je van  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n}$ , in elk van de volgende gevallen?

a) Als  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -3$ , en  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 5$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3}{5} = \frac{-3}{5}$ .

b) Als  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , en  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 5$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{5} = 0$ .

c) Als  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -3$ , en  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3}{0} = \infty$ , dus niet convergent.

d) Als  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , en  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{0} = ?$

e) Als  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$ , en  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 5$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\infty}{5} = \infty$ .

f) Als  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -3$ , en  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \infty$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3}{\infty} = 0$ .

g) Als  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$ , en  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \infty$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\infty}{\infty} = ?$

#### Opgave 79 § 5 Naamsbekendheid

Een bepaald wasmiddel is bekend bij 50 van de 100 ondervraagden. Met een reclame campagne wil de fabrikant het wasmiddel de naamsbekendheid vergroten. Volgens een reclame bureau kan de naamsbekendheid door een intensieve campagne groeien met 2% per week.

$U(n)$  is het aantal ondervraagden per 100 ondervraagden dat het wasmiddel na  $n$  weken campagne kent.

a) De recursieve formule voor  $U(n)$ .

We weten  $U(0) = 50$ .

Verder is er sprake van een groei van 2%:  $U(n) = 1.02 \cdot U(n-1)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

b) De groei van de naamsbekendheid na een half jaar, 26 weken, bereken je met de GR: 83,7%.

c) De directe formule voor  $U(n)$ .

- $U(1) = 1.02 \cdot U(0)$ ,
- $U(2) = 1.02 \cdot U(1) = (1.02)^2 \cdot U(0)$ ,
- ..... ,
- $U(n) = (1.02)^n \cdot U(0)$ .

**d)** Het model van 2% groei kan niet goed zijn. Uit dit model volgt namelijk dat de naamsbekendheid boven de 100% kan groeien en dat is onmogelijk. Dus exponentiele groei is geen adequaat model.

We gaan een logistisch groeimodel voor de naamsbekendheid gebruiken. Dit model wordt ook wel geremde groei genoemd.

$V(n)$  is het aantal ondervraagden per 100 ondervraagden dat het wasmiddel na  $n$  weken campagne voeren kent volgens het logistisch groeimodel.

Uitgangspunten:

- $V(n)$  kan niet groter groeien dan 100. Het verzadigingsniveau.
- $V(0) = 50$ ,
- $V(1) = 51$ , dus de eerste week 2% groei.

Er geldt:  $\Delta V = V(n) - V(n-1)$ , en

$$\Delta V = c \cdot V(n-1) \cdot [100 - V(n-1)], n = 1, 2, 3, \dots$$

**e)**  $c$ ?

$$V(1) = 51 \text{ en } V(0) = 50.$$

Dus,

$$51 - 50 = c \cdot 50 \cdot (100 - 50) \Rightarrow 1 = c \cdot 50^2 \Rightarrow c = 0.0004.$$

**f)**  $V(26)$ ?

$$\begin{aligned} \text{De formule: } V(n) &= V(n-1) + c \cdot V(n-1) \cdot [100 - V(n-1)] \Rightarrow V(n-1) \cdot [1 + c \cdot 100 - c \cdot V(n-1)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow V(n-1) \cdot [1 + 0.04 - 0.0004V(n-1)]. \end{aligned}$$

Met de GR:  $V(26) = 74\%$

**g)** Met de GR kun je ook een stippengrafiek maken.

**h)** Met behulp van de GR:  $U(n) - V(n) = 14 \Rightarrow n = 31$ .

**i)** We hebben nu twee modellen bestudeerd.

De iteratie functie voor beide modellen:

- de exponentiele groei  $F(x) = 1.02 \cdot x$ ,
- de logistische groei  $F(x) = 1.04 \cdot x - 0.0004 \cdot x^2$ .

## • Oefenen

Maak de opgaven van § 4 tot en met bladzijde 26 en § 5 gemengde opgaven.

## Toets Reeksen, Iteratie en Limieten

### Opgave 1 Zomaar een rij(reeks)

- Hoeveel positieve termen heeft de rij 800, 727, 654, 581, 508, .... ?

Onderzoeken we deze rij, dan vinden we een aflopende rij met stapgrootte  $-73$ . Dus een rekenkundige reeks.

$$u_n = 800 - 73 \cdot n.$$

Uit  $800 - 73 \cdot n = 0$ , volgt  $n \approx 10.95 \Rightarrow 11$  positieve termen.

- Bij de 10 km schaatsen moet een deelnemer 25 ronden rijden van 400 m.

S. schaatst de eerste ronde in 30 seconden. Vervolgens is S. in elke ronde 0.5% langzamer dan de voorgaande ronde. Wat is de eindtijd? We hebben te maken met een meetkundige reeks:

$$u_{n+1} = 1.005 \cdot u_n \Rightarrow \text{met } u_0 = 30 \Rightarrow u^n = 30 \cdot (1.005)^n, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Een meetkundige reeks waarvan de som, in algemene termen met rede  $a$ , is  $\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ .

$$\text{Met } a = 1.005, \text{ vinden we voor de totale tijd: } 30 \frac{(1.005)^{25}-1}{1.005-1} \approx 796.8 \text{ sec.}$$

B. begint ook met een ronde van 30 seconden. Vervolgens is B  $a$  sec langzamer dan de voorgaande ronde. De eindtijd van B is 798 sec. Bereken  $a$ . We hebben te maken met een rekenkundige reeks:

$u_n = 30 + a \cdot n$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ .  $n = 0$  is de eerste ronde.

De som van de rekenkundige reeks:  $\frac{1}{2} \cdot 25(u_0 + u_{24}) = \frac{1}{2} \cdot 25(u_0 + u_0 + a \cdot 24) = \frac{1}{2} \cdot 25(60 + a \cdot 24) = 798 \Rightarrow a = 0.16$ .

## Opgave 2 Iteratie

Gegeven de iteratiefunctie  $F(x) = -0.75 \cdot x + 3$ .

Met de iteratiefunctie hebben voor de volgende rij:  $A_n = F.A_{n-1}$ , met  $A_0 = c$ .

- Gegeven  $A_3 = 2$ .  $A_0$ ?

We tekenen de webgrafiek, zie volgende pagina.

Twee lijnen

$y = x$ , en  $y = -0.75 \cdot x + 3$ .

Sart bij  $A_3(2,0) \rightarrow$  naar het punt  $(2,2)$  op  $y = x \rightarrow y = -0.75 \cdot x + 3 \rightarrow A_2$  op  $y = x \rightarrow$  horizontaal naar  $y = -0.75 \cdot x + 3 \rightarrow A_1 \rightarrow$  verticaal omhoog naar  $y = x \rightarrow y = -0.75 \cdot x + 3 \rightarrow A_0$  op de  $x$ -as  $(1.02,0)$ .

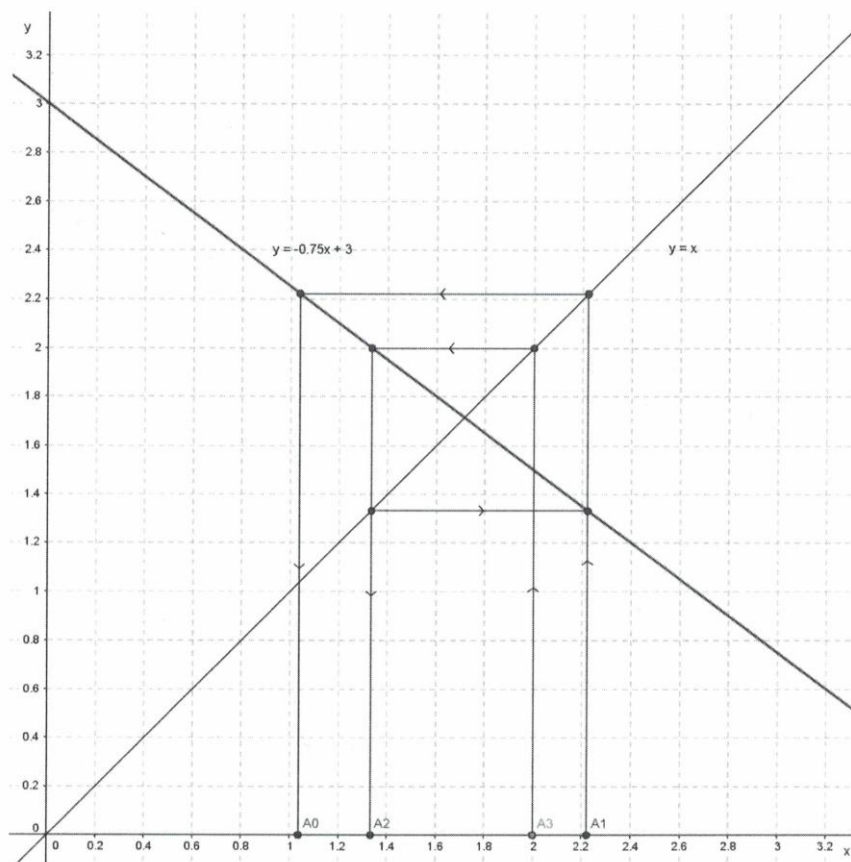
- Neem  $A_0 = c = 2$ . Bereken  $A_{20}$ , in drie decimalen.

Met de GR, het rijenscherm:  $A_{20} = 1.715$ .

Met de directe manier:  $2 < \text{Enter} >$  en vervolgens  $* (-0.75 + 3) < \text{ENTER} >$  en vervolgens nog 19 keer  $< \text{ENTER} > \rightarrow A_{20} = 1.715$ .

- Bereken het dekpunt  $d$  van de rij.

Het dekkingspunt is de limiet ofwel grenswaarde:



$$d = -0.75 \cdot d + 3 \Rightarrow d = \frac{3}{1.75} = \frac{12}{7}.$$

- Het verschil  $|A_n - d|$  van  $A_n$  met het dekpunt  $d$  is ook een rij.

De formule van deze rij?

$$u_{n+1} = -0.75 \cdot u_n + 3 \Rightarrow u_{n+1} - d = -0.75 \cdot u_n + 3 + 0.75 \cdot d - 3 = -0.75 \cdot (u_n - d).$$

Dus,  $|A_n - d|$  is een meetkundige reeks met reden 0.75.

Verder weten we:  $|A_0 - d| = 2 - \frac{12}{7} = \frac{2}{7}.$

De formule van de meetkundige reeks:  $|A_n - d| = \frac{2}{7} \cdot (0.75)^n.$

### Opgave 3 Limieten

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 - 3n^3}}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \sqrt{1 - \frac{3}{n}}}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+3}}{4^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+3}}{1 - 1/4^n} = 0.$$

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}n - n^3\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n\left(\frac{1}{2} - n^2\right)\right] = -\infty.$$

### Opgave 4 Ori en Iri

In de grote stille oceaan liggen twee eilanden Irinhië en Orintië.

Op Irinhië wordt de munt Iri gebruikt en op Orintië de Ori.

Beide munten zijn op beide eilanden te gebruiken en hebben dezelfde waarde. We zijn benieuwd hoe deze munten nu door elkaar heen gebruikt worden. Zijn er vaste percentages van de verschillende munten op de verschillende eilanden, of veranderen die percentages steeds?

Vanuit een halfjaarlijkse steekproef op het eiland Orintië blijkt dat er voor de percentages van de verschillende munten op dit eiland het volgende discrete dynamische model op te stellen is:

Het percentage Iri geven we aan met  $J$  en het percentage Ori met  $O$ .

Op een bepaald tijdstip  $t$  geldt:

$$J_t = 0.75 \cdot J_{t-1} + 0.4 \cdot O_{t-1},$$

$$O_t = 0.25 \cdot J_{t-1} + 0.6 \cdot O_{t-1}.$$

Met  $J_0 = 55$  en  $O_0 = 45$  en  $t$  is het aantal halve jaren na 1 januari 2010.

De rijenschema's invoeren in de GR.

Uit de tabel volg dat na  $n = 10$ , dus 5 jaar, geen verandering meer optreedt in de percentages:

$$J = 61.538 \text{ en } O = 38.462, J = 1.6 \cdot O.$$

Dit resultaat volgt ook uit de twee vergelijkingen:

$$- x = 0.75 \cdot x + 0.4 \cdot y,$$

en

$$- y = 0.25 \cdot y + 0.6 \cdot x,$$

$$\Rightarrow x = 1.6 \cdot y.$$

### Toegift-A serie and a limit:

In de les over reeksen aandacht werd besteed aan de som

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \dots \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Een dergelijke som wordt in de wiskunde weergegeven door

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}.$$

Hier geven we nog een bewijs en wel met volledige inductie.

Je gaat er dan vanuit dat

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n},$$

correct is en je laat zien dat  $k = n + 1$ , het antwoord  $1 - \frac{1}{2^{n+1}}$  is.

Volledige inductie:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{2}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{2^n} = 1$$

### Epiloog Waarom de Samenvatting Online VWO 4?

Deze samenvatting van Wiskunde D-Online VWO 4 heb ik gemaakt voor mijn kleindochter.

Waarom deze samenvatting online geplaatst?

Mijn kleindochter wilde voor haar Vwo-opleiding Wiskunde D als keuzevak. Helaas, haar school had Wiskunde D niet meer opgenomen in het lesprogramma.

Wat te doen?

Het bleek dat er meer scholen waren/zijn die Wiskunde D niet meer opgenomen hebben in het lesprogramma. Dit is aanleiding geweest om de Stichting Wiskunde D-Online op te zetten.

Om gebruik te kunnen maken van het Wiskunde D programma door leerlingen die toch Wiskunde D willen kiezen, dient een school zich aan te melden. (Het zal duidelijk zijn dat deze scholen hun leerlingen toch willen steunen.) Op deze wijze krijgen de scholen toegang tot het online-lesprogramma. Het lesmateriaal is samengesteld uit: PowerPointpresentaties, video's, boeken (De Wageningse Methode) met opgaven, antwoorden en toetsen. Daarnaast hebben de docenten van participerende scholen toegang tot het docentenmateriaal.

Zoals gezegd, de scholen die toch buiten het reguliere lesprogramma hun leerlingen willen faciliteren bij de Wiskunde D keuze moeten zich aanmelden. Verder tevens een docent ter beschikking stellen om de leerlingen te begeleiden bij de studie en het maken van opgaven. Toetsen kunnen ter beoordeling worden opgestuurd.

De school van mijn kleindochter wilde niet participeren en evenmin een docent ter beschikking stellen. Mijn kleindochter was de enige leerling met Wiskunde D keuze. Met als gevolg dat ik samen met mijn kleindochter Wiskunde D-Online heb gedaan.

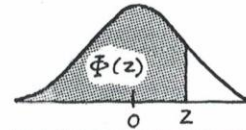
Nu de reden dat ik de samenvatting online( [www.leennoordzij.me](http://www.leennoordzij.me) ) heb geplaatst: het kan nog steeds zo zijn dat er leerlingen Wiskunde D kiezen zonder dat een school voor begeleiding zorg wil dragen. Door deze samenvattingen te publiceren hoop ik de belangstelling voor Wiskunde D te stimuleren.

Remark: To whom it concerns.

When reading the above text in your mother's tongue, the translation can sometimes be hilarious. In Dutch: "geluk". The meaning of this word in my text is the usual meaning: by chance, by coincidence or by good fortune. However, various translation programs come up with happiness. In my text, I am not involved with "happiness". Obviously, it made me happy to support my granddaughter!

## Bijlage 1: De Standaardnormale Tabel.

$\Phi(z)$  voor positieve waarden van  $z$



| $z$   | ..0    | ..1    | ..2    | ..3    | ..4    | ..5    | ..6    | ..7    | ..8    | ..9    |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,0.. | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1.. | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2.. | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3.. | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4.. | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5.. | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6.. | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7.. | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8.. | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9.. | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0.. | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8568 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1.. | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2.. | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3.. | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4.. | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5.. | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6.. | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7.. | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8.. | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9697 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9.. | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0.. | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1.. | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2.. | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3.. | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4.. | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5.. | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6.. | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7.. | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8.. | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9.. | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| 3,0.. | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |
| 3,1.. | 0,9990 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9993 | 0,9993 |
| 3,2.. | 0,9993 | 0,9993 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 |
| 3,3.. | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9997 |
| 3,4.. | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9998 |
| 3,5.. | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 |
| 3,6.. | 0,9998 | 0,9998 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,7.. | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,8.. | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,9.. | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |

## De standaardnormale tabel

$\Phi(z)$  voor negatieve waarden van  $z$

| $z$    | ..0    | ..1    | ..2    | ..3    | ..4    | ..5    | ..6    | ..7    | ..8    | ..9    |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| -0,0.. | 0,5000 | 0,4960 | 0,4920 | 0,4880 | 0,4840 | 0,4801 | 0,4761 | 0,4721 | 0,4681 | 0,4641 |
| -0,1.. | 0,4602 | 0,4562 | 0,4522 | 0,4483 | 0,4443 | 0,4404 | 0,4364 | 0,4325 | 0,4286 | 0,4247 |
| -0,2.. | 0,4207 | 0,4168 | 0,4129 | 0,4090 | 0,4052 | 0,4013 | 0,3974 | 0,3936 | 0,3897 | 0,3859 |
| -0,3.. | 0,3821 | 0,3783 | 0,3745 | 0,3707 | 0,3669 | 0,3632 | 0,3594 | 0,3557 | 0,3520 | 0,3483 |
| -0,4.. | 0,3446 | 0,3409 | 0,3372 | 0,3336 | 0,3300 | 0,3264 | 0,3228 | 0,3192 | 0,3156 | 0,3121 |
| -0,5.. | 0,3085 | 0,3050 | 0,3015 | 0,2981 | 0,2946 | 0,2912 | 0,2877 | 0,2843 | 0,2810 | 0,2776 |
| -0,6.. | 0,2743 | 0,2709 | 0,2676 | 0,2643 | 0,2611 | 0,2578 | 0,2546 | 0,2514 | 0,2483 | 0,2451 |
| -0,7.. | 0,2420 | 0,2389 | 0,2358 | 0,2327 | 0,2296 | 0,2266 | 0,2236 | 0,2206 | 0,2177 | 0,2148 |
| -0,8.. | 0,2119 | 0,2090 | 0,2061 | 0,2033 | 0,2005 | 0,1977 | 0,1949 | 0,1922 | 0,1894 | 0,1867 |
| -0,9.. | 0,1841 | 0,1814 | 0,1788 | 0,1762 | 0,1736 | 0,1711 | 0,1685 | 0,1660 | 0,1635 | 0,1611 |
| -1,0.. | 0,1587 | 0,1562 | 0,1539 | 0,1515 | 0,1492 | 0,1469 | 0,1446 | 0,1432 | 0,1401 | 0,1379 |
| -1,1.. | 0,1357 | 0,1335 | 0,1314 | 0,1292 | 0,1271 | 0,1251 | 0,1230 | 0,1210 | 0,1190 | 0,1170 |
| -1,2.. | 0,1151 | 0,1131 | 0,1112 | 0,1093 | 0,1075 | 0,1056 | 0,1038 | 0,1020 | 0,1003 | 0,0985 |
| -1,3.. | 0,0968 | 0,0951 | 0,0934 | 0,0918 | 0,0901 | 0,0885 | 0,0869 | 0,0853 | 0,0838 | 0,0823 |
| -1,4.. | 0,0808 | 0,0793 | 0,0778 | 0,0764 | 0,0749 | 0,0735 | 0,0721 | 0,0708 | 0,0694 | 0,0681 |
| -1,5.. | 0,0668 | 0,0655 | 0,0643 | 0,0630 | 0,0618 | 0,0606 | 0,0594 | 0,0582 | 0,0571 | 0,0559 |
| -1,6.. | 0,0548 | 0,0537 | 0,0526 | 0,0516 | 0,0505 | 0,0495 | 0,0485 | 0,0475 | 0,0465 | 0,0455 |
| -1,7.. | 0,0446 | 0,0436 | 0,0427 | 0,0418 | 0,0409 | 0,0401 | 0,0392 | 0,0384 | 0,0375 | 0,0367 |
| -1,8.. | 0,0359 | 0,0351 | 0,0344 | 0,0336 | 0,0329 | 0,0322 | 0,0314 | 0,0303 | 0,0301 | 0,0294 |
| -1,9.. | 0,0287 | 0,0281 | 0,0274 | 0,0268 | 0,0262 | 0,0256 | 0,0250 | 0,0244 | 0,0239 | 0,0233 |
| -2,0.. | 0,0228 | 0,0222 | 0,0217 | 0,0212 | 0,0207 | 0,0202 | 0,0197 | 0,0192 | 0,0188 | 0,0183 |
| -2,1.. | 0,0179 | 0,0174 | 0,0170 | 0,0166 | 0,0162 | 0,0158 | 0,0154 | 0,0150 | 0,0146 | 0,0143 |
| -2,2.. | 0,0139 | 0,0136 | 0,0132 | 0,0129 | 0,0125 | 0,0122 | 0,0119 | 0,0116 | 0,0113 | 0,0110 |
| -2,3.. | 0,0107 | 0,0104 | 0,0102 | 0,0099 | 0,0096 | 0,0094 | 0,0091 | 0,0089 | 0,0087 | 0,0084 |
| -2,4.. | 0,0082 | 0,0080 | 0,0078 | 0,0075 | 0,0073 | 0,0071 | 0,0069 | 0,0068 | 0,0066 | 0,0064 |
| -2,5.. | 0,0062 | 0,0060 | 0,0059 | 0,0057 | 0,0055 | 0,0054 | 0,0052 | 0,0051 | 0,0049 | 0,0048 |
| -2,6.. | 0,0047 | 0,0045 | 0,0044 | 0,0043 | 0,0041 | 0,0040 | 0,0039 | 0,0038 | 0,0037 | 0,0036 |
| -2,7.. | 0,0035 | 0,0034 | 0,0033 | 0,0032 | 0,0031 | 0,0030 | 0,0029 | 0,0028 | 0,0027 | 0,0026 |
| -2,8.. | 0,0026 | 0,0025 | 0,0024 | 0,0023 | 0,0023 | 0,0022 | 0,0021 | 0,0021 | 0,0020 | 0,0019 |
| -2,9.. | 0,0019 | 0,0018 | 0,0018 | 0,0017 | 0,0016 | 0,0016 | 0,0015 | 0,0015 | 0,0014 | 0,0014 |
| -3,0.. | 0,0013 | 0,0013 | 0,0013 | 0,0012 | 0,0012 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0010 | 0,0010 |
| -3,1.. | 0,0010 | 0,0009 | 0,0009 | 0,0009 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0007 | 0,0007 |
| -3,2.. | 0,0007 | 0,0007 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 |
| -3,3.. | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0003 |
| -3,4.. | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0002 |
| -3,5.. | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 |
| -3,6.. | 0,0002 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| -3,7.. | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| -3,8.. | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| -3,9.. | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |

De standaardnormale tabel

## Bijlage 2: Webgrafiek op de GR

### Webgrafiek op de GR

- Kies in het MODE-menu: Seq
- Kies in het FORMAT-menu: Web
- Voer de rij met beginwaarde in bij Y =
- Kies een geschikt WINDOW
- Teken de grafiek met GRAPH
- Toets nu TRACE en voor elke stap van de webgrafiek toets je  $\blacktriangleright$ .

Als voorbeeld nemen we de webgrafiek bij opgave 59: medicijnspiegel.

Kies in Y = :

$$nMin = 1$$

$$u(n) = .75 * u(n - 1) + 1500$$

$$u(nMin) = 1500$$

Kies in WINDOW:

$$nMin = 1 ; nMAX = 20 ; PlotStart = 1 ; PlotStep = 1 ;$$

$$Xmin = 0 ; Xmax = 8000 ; Xscl = 1000 ;$$

$$Ymin = 0 ; Ymax = 8000 ; Yscl = 1000.$$

Kies in TABLE SETUP:

$$TblStart = 1 ; \Delta Tbl = 1.$$

Teken de webgrafiek met GRAPH.

Gebruik vervolgens TRACE en de pijltjestoets  $\blacktriangleright$ .



Op internet kun je met webgrafieken experimenteren. Ga naar <http://archive.geogebra.org/en/upload/files/Dutch/monica/webgrafiek.html>

