

Wiskunde D Online VWO 5 Summary Blok 8-14 and Solved Problems

Mathematics, Preparation for College, yOUlearn

Updated 2025-12-17, edited and figures added

www.leennoordzij.me

Dr.l.noordzij@leennoordzij.nl

Summary of the PowerPoint Slides of the University of Groningen and the Wageningen Method (2015). A new edition of this method has been published in 2019.

These summaries were made for my granddaughter for her study Mathematics D Online, from 2016-2019. I supervised the theory, the homework and the tests.

The Open University has supported me with this supervision.

<http://rug.nl>

<http://ou.nl>

<http://wageningse-methode.nl>

Inhoudsopgave

Blok 8 Vlakke Meetkunde, Euclidean Geometry	3
Blok 8 Les 1 Congruentie en gelijkvormigheid	3
Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven	8
Blok 8 Les 2 Hoeken en bogen, Angles and Arc segments	10
Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.....	15
Blok 8 Les 3 Koordenvierhoeken en iso-hoeklijnen	18
Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.....	21
Samenvatting vlakke Meetkunde	25
De som van de hoeken van een koordenveelhoek	25
Blok 8 Les 4 Computerpracticum	26
Blok 8 De Toets Vlakke Meetkunde.....	29
Blok 9 Complexe getallen, Complex numbers.....	32
Blok 9 Les 1 Vergelijkingen van graad 3	32
Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.....	37
Blok 9 Les 2 Het complexe vlak, the Geometrical Representation and the Argand Diagram	40
Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.....	46

Blok 9 Les 3 Complexe vergelijkingen, Complex equations/functions.....	48
Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.....	54
Blok 9 les 4 Meetkunde en complexe getallen, Geometry and Complex Numbers.....	57
Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.....	67
Blok 9 De Toets: Complexe getallen.....	67
Blok 10 Hypothese Toetsen, Testing Hypotheses	69
Blok 10 Les 1 Discreet en continu.....	69
Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.....	71
Blok 10 Les 2 Wie heeft gelijk? Testen van Hypotheses. Testing Hypotheses.	73
Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.....	75
Blok 10 Les 3 Eenzijdig of tweezijdig toetsen. One- or two-sided tests.....	77
Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.....	78
Blok 10 Les 4 De normale verdeling, the normal distribution.....	80
Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.....	83
Blok 10 De Toets: Hypothese Toetsen.....	85
Blok 11 Differentiaalvergelijkingen, Differential Equations	87
Blok 11 Les 1 Wat is een differentiaalvergelijking?	87
Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.....	90
Blok 11 Les 2 Richtingsvelden.....	93
Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.....	95
Blok 11 Les 3 Oplossingskrommen	96
Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.....	98
Blok 11 Les 4 De methode van Euler; Euler's Method	103
Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.....	107
Blok 11 De Toets Differentiaalvergelijkingen	108
Blok 11 Toegift, De gravitatieput; A friendly μ -Blackhole	109
Blok 12 Kegelsneden	111
Blok 12 les 1 Gelijke afstand.....	111
Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.....	117
Blok 12 Les 2 Conflictlijnen en Kegelsneden	119
Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.....	125
Blok 12 Les 3 Een kegel snijden	128
Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.....	131
Blok 12 Les 4 De raaklijneigenschap; the tangent.....	132
Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.....	135
Blok 12 De Toets Kegelsneden.	139

Blok 13 Poisson Verdeling	142
Blok 13 Les 1 Wachten	142
Oefenen en uitgewerkte Oefenopgave.....	144
Blok 13 Les 2 De Poissonverdeling	145
Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.....	152
Blok 13 Les 3 De som van de Poissonverdeling en de binomiale verdeling.....	154
Oefenen en uitgewerkte Oefenopgave.....	157
Blok 13 Les 4 Wanneer komt de volgende klant?	158
Oefenen en uitgewerkte Oefenopgave.....	161
Blok 13 De toets Poissonverdeling	163
Blok 14 Dynamische processen	165
Blok 14 Les 1 Ongeremde groei.....	165
Oefenen en uitgewerkte Oefenopgave.....	167
Blok 14 Les 2 Ongeremde groei(vervolg)	168
Oefenen en uitgewerkte Oefenopgave.....	169
Blok 14 Les 3 Geremde groei.....	169
Oefenen en uitgewerkte Oefenopgave.....	171
Blok 14 Les 4 Logistische groei, Logistical Growth	173
Oefenen en uitgewerkte Oefenopgave.....	178
Blok 14 De Toets Logistical Growth.....	181
Toegift Oplossing Logistische Differentiaalvergelijkingen.....	189
Epiloog, Waarom de Samenvatting Online?	192

Tags: Euclidian Geometry, Complex Numbers, Complex Functions, Testing Hypotheses, Differential Equations, Conic Sections, Poisson Distribution, Dynamical Processes, Logistical Growth, Education, Mathematics, Open University, Wageningse Methode, Wiskunde D Online, Youlearn, VWO-5, Prepcollege,

Blok 8 Vlakke Meetkunde, Euclidean Geometry

Blok 8 Les 1 Congruentie en gelijkvormigheid

Deze les sluit aan bij paragraaf 1 van Vlakke Meetkunde van de Wageningse Methode. Vlakke Meetkunde kun je downloaden vanaf de site van de Open Universiteit.

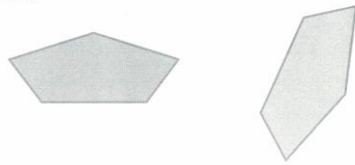
- Congruent

Definitie(afpraak):

Twee figuren zijn congruent als de ene figuur verplaatst kan worden zodat hij de

*andere figuur precies bedekt.
Daarbij mag gespiegeld worden.*

Voorbeeld



In plaats van *congruent* wordt ook wel de term *gelijk* gebruikt.

- **Gelijkvormig**

Definitie (afpraak):

Twee figuren zijn **gelijkvormig** als de ene figuur door een vergroting of verkleining in de andere kan worden overgevoerd.
Daarbij mag verschoven en gespiegeld worden.

Voorbeeld



De blauwe figuur is een vergroting van de gele met een factor 2.

- **Congruentie van driehoeken.**

Vier verschillende congruentie kenmerken:

- ZZZ: driepaar zijden zijn gelijk;
- ZHZ: twee paar zijden en hun ingesloten hoek zijn gelijk;
- HZH: twee paar hoeken en hun ingesloten zijde zijn gelijk;
- ZZR: twee paar zijden zijn gelijk en de aanliggende rechte hoek.

Dit zijn de uitgangspunten bij het redeneren.

Nota bene:

- ZZH: twee paar zijden en aanliggende hoek gelijk is geen juist congruentie kenmerk.

Voorbeeld:

lengtes van twee zijden en een hoek.

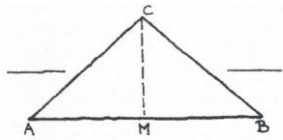


- Je tekent eerst de hoek.
- op een been van de hoek pas je een zijde af.
- dan pas je de andere zijde af.
- Er zijn twee niet congruente oplossingen.



- **Bewijs met congruentie.**

- Stelling: Een gelijkbenige driehoek heeft gelijke basishoeken.



Gegeven

$$|AC| = |BC| \quad (1)$$

Te bewijzen

$$\angle A = \angle B$$

Bewijs met congruentie

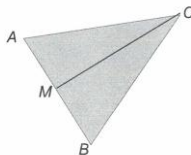
$$\rightarrow |AM| = |BM| \quad (2)$$

$$|CM| = |CM| \quad (3)$$

$\triangle AMC \sim \triangle BMC$ (volgt uit (1), (2) en 3 en ZZZ)

$$\rightarrow \angle A = \angle B$$

- Stelling: Als in een driehoek de zwaartelijn en de hoogtelijn uit een hoek hetzelfde zijn, dan is de driehoek gelijkbenig.



Bewijs

M is het midden van AB

$\rightarrow CM$ is de zwaartelijn en CM is de hoogtelijn.

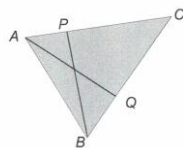
$\rightarrow \angle AMC = \angle BMC$ is 90° .

$|AM| = |MB|$ en $|MC| = |MC|$

$\rightarrow \triangle AMC$ is congruent met $\triangle BMC$ (ZHZ).

$\rightarrow |AC| = |BC|$.

- Stelling: Als in een driehoek twee hoogtelijnen even lang zijn, dan is de driehoek gelijkbenig.



BP en AQ zijn hoogtelijnen.

$$|AQ| = |BP|$$

Bewijs

$|AB| = |BA|$ en $|AQ| = |BP|$

$\angle AQB = \angle BPA = 90^\circ$

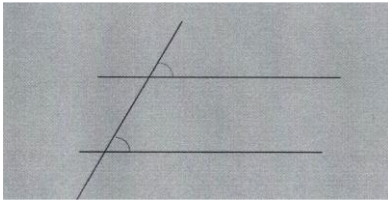
$\rightarrow \triangle ABQ$ is congruent met $\triangle BAP$ (ZZR)

$\rightarrow \angle ABQ = \angle BAP$

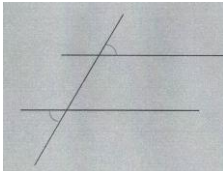
$\rightarrow \triangle ABC$ is gelijkbenig (gelijke basishoeken).

- Argumenten om te gebruiken.

- Bij evenwijdige lijnen: F-hoeken

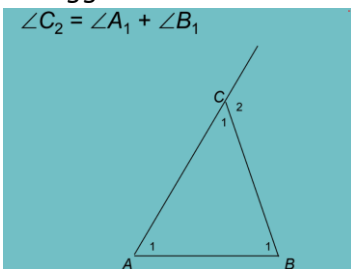


- Bij evenwijdige lijnen: Z-hoeken



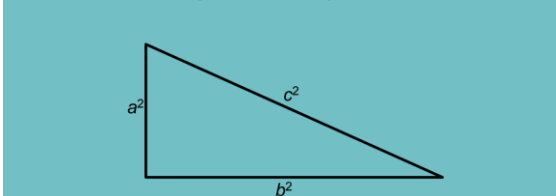
- De som van de hoeken in een driehoek is 180° .

- De stelling van de buitenhoek. De buitenhoek is gelijk aan de som van de niet aanliggende binnenhoeken (zie volgende bladzijde):



- De stelling van Pythagoras.

In een rechthoekige driehoek geldt dat $a^2 + b^2 = c^2$.



- Stelling: Als in een driehoek een zwaartelijns uit een hoek de helft is van de overstaande zijde, dan is die hoek een rechte hoek.

Voorbeeld

Stelling (opgave 5)

Als in een driehoek een zwaartelijn uit een hoek de helft is van de overstaande zijde, dan is die hoek recht.

- Stap 1: Maak een geschikte tekening

- Stap 2: Schrijf op wat gegeven is.

$$|CM| = \frac{1}{2} |AB| = |AM| = |MB|$$

- Stap 3: Welke stelling of argument kun je gebruiken?

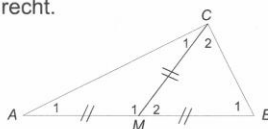
$\triangle AMC$ en $\triangle BMC$ zijn gelijkbenig

$$\rightarrow \angle A_1 = \angle C_1 \text{ en } \angle B_1 = \angle C_2 \quad (1)$$

De som van de hoeken in $\triangle ABC$ is 180° (2)

$$\rightarrow \angle C_{12} + \angle A_1 + \angle B_1 = \angle C_{12} + \angle C_1 + \angle C_2 = 180^\circ \quad (1) \text{ en } (2)$$

$$\rightarrow \angle C_{12} = 90^\circ$$



- Bewijs met congruentie en evenwijdigheid.

- Stelling: De zwaartelijnen van een driehoek verdelen elkaar in stukken die zich verhouden als 1:2.

- Stelling: Gegeven is driehoek ABC .

M ligt op AC en N ligt op BC , zo dat $|AM|:|MC| = |BN|:|NC|$.

Dan is MN evenwijdig aan AB .

- Parallelogram.

Definitie

Een parallellogram is een vierhoek met evenwijdige overstaande zijden.

- Stelling: In een parallellogram zijn de overstaande hoeken gelijk.

Bewijs

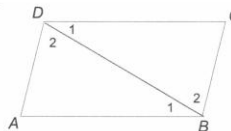
(Gegeven is de evenwijdigheid van de zijden, gebruik dus eigenschappen van evenwijdigheid)

Trek een geschikte hulplijn (een diagonaal).

$\angle B_1 = \angle D_1$ (Z- hoeken) en $\angle B_2 = \angle D_2$ (Z- hoeken) en $BD = BD$.

$\rightarrow \triangle DAB$ is congruent met $\triangle BCD$ (HZH).

$\rightarrow \angle B_{12} = \angle D_{12}$ en $\angle A = \angle C$.



- Rechthoek en ruit.

Definities

- Een rechthoek is een vierhoek met vier rechte hoeken
- Een ruit is een vierhoek met vier gelijke zijden.

Stelling (opgave 9b)

In een ruit staan de diagonalen loodrecht op elkaar.

Bewijs

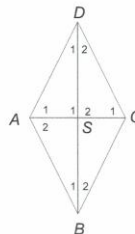
$\triangle ADC$ is gelijkbenig dus $\angle A_1 = \angle C_1$ (zo ook $\angle A_2 = \angle C_2$)

$\triangle DAB \cong \triangle DCB$ (ZHZ) dus $\angle D_1 = \angle D_2$

$\rightarrow \triangle DSA \cong \triangle DSC$ (HZH)

$\rightarrow \angle S_1 = \angle S_2$

$\angle S_1 + \angle S_2 = 180^\circ \rightarrow \angle S_1 = \angle S_2 = 90^\circ$.



- Twee cirkels.

- Stelling: Als twee cirkels elkaar snijden dan staat de verbindingslijn van de

snijpunten loodrecht op de verbindinglijn van de middelpunten.

Bewijs

- Maak een correcte tekening met de gegevens.
- Ga op zoek naar congruente driehoeken.

$$\triangle APB \cong \triangle AQB \text{ (ZZZ)}$$

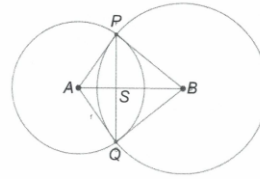
$$\rightarrow \angle PAB = \angle QAB$$

$$AP = AQ \text{ en } AS = AS$$

$$\rightarrow \triangle PAS \cong \triangle QAS \text{ (HZH)}$$

$\rightarrow$ De hoeken bij S zijn gelijk.

Samen zijn ze 180° , dus elke hoek is 90°



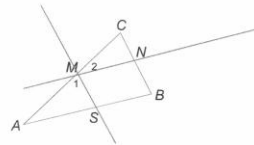
• De midden parallel

Gegeven

In $\triangle ABC$ gaat lijn k door het midden M van AC en k is evenwijdig aan AB .
 N is het snijpunt van k met BC .

Stelling

N is het midden van BC .



Bewijs

- Teken de hulplijn door M evenwijdig aan BC met snijpunt S op AB .

$$\angle A = \angle M_2 \text{ en } \angle C = \angle M_1 \text{ (F-hoeken)}$$

$$\rightarrow \triangle AMS \cong \triangle MCN \text{ (HZH)}$$

$$\rightarrow |MS| = |CN| \text{ en } |MS| = |BN| \text{ (overstaande zijden in parallellogram)}$$

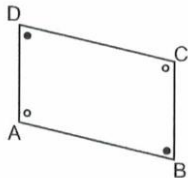
$$\rightarrow |CN| = |NB|$$

$$\text{Gevolg: } |MN| = |SB| = |AS| \text{ en } |AB| = 2 \times |MN| .$$

Oefenen en uitgewerkte oefenopgaven

Opgave 7 Stellingen

a) Als in een vierhoek de overstaande hoeken gelijk zijn is het een parallellogram. Zie ook bovenstaande samenvatting.

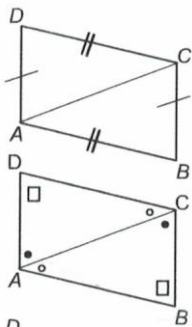


Gegeven: $\angle A = \angle C$, en $\angle B = \angle D$. Verder: de som van de vier hoeken is 360° .

$$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ \therefore \angle A + \angle D = 180^\circ \therefore \text{de buitenhoek bij } A \text{ is gelijk aan } \angle D : F\text{-hoeken.}$$

$$\therefore AB \parallel DC .$$

b) Als in een vierhoek de overstaande zijden gelijk zijn, is het een parallellogram.



Gegeven: in vierhoek $ABCD$ zijn AB en CD even lang, evenals AD en BC .

- Teken een diagonaal AC , de bovenste Figuur.

- $|AD| = |BC|$, $|AB| = |DC|$. Dit is gegeven.

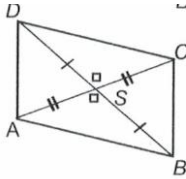
- $|AC|$ is gemeenschappelijk.

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle CBA$, congruent

De hoeken zoals aangegeven in de onderste Figuur op de vorige bladzijde zijn gelijk. Volgt uit de congruentie.

De overstaande hoeken zijn gelijk. $ABCD$ is een parallellogram.

c) Gegeven: in vierhoek $ABCD$, de Figuur hieronder, delen de diagonalen elkaar middendoor. $ABCD$ is een parallellogram.



- $|AS| = |SC|$, $|BS| = |SD|$. Dit is gegeven.

- $\angle ASB = \angle CSD$, overstaande hoeken.

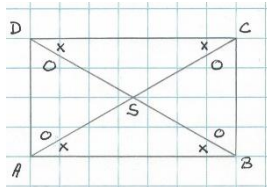
$\therefore \triangle ASB \cong \triangle CSD$, congruent.

$\therefore |AB| = |CD|$.

Op dezelfde wijze bewijzen we ook: $|AD| = |BC|$.

$\therefore ABCD$ is een parallellogram.

Opgave 8:



Bewijs de volgende stellingen over rechthoeken:

a) Een rechthoek is een parallellogram.

Overstaande hoeken zijn gelijk: $\angle DCA(x) = \angle CAB(x) \therefore$ Een parallellogram.

b) In een rechthoek zijn diagonalen even lang.

De overstaande zijden zijn even lang want de rechthoek is een parallellogram. Verder zijn beide diagonalen zijde van een rechthoekige driehoek. Van beide driehoeken zijn de rechthoekzijden even lang. Dus zijn de schuine zijden ook even lang. Je kunt ook gebruik maken van congruentie: $\triangle DAB \cong \triangle ABC$, ZHZ $\therefore |AC| = |DB|$.

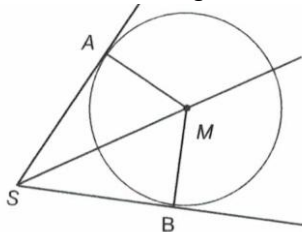
c) Als in een parallellogram de diagonalen even lang zijn is het parallellogram een rechthoek.

In een parallellogram delen de diagonalen elkaar midden door (een andere stelling). De diagonalen zijn even lang $\therefore$

$|AS| = |SC| = |DS| = |SB|$. We hebben 4 gelijkbenige driehoeken $\Rightarrow \angle SAB = \angle SBA = \angle SDC = \angle SCD$, $\angle SAD = \angle SDA = \angle SBC = \angle SCB$. Deze 8 hoeken samen zijn $360^\circ \therefore \angle SAB + \angle SAD = 360^\circ/4 = \pi/2$.

Opgave 11 Raaklijnen

Zie onderstaande figuur.



Twee raaklijnen aan een cirkel snijden elkaar in het punt S . De raakpunten zijn A en B .

Bewijs dat $|AS| = |BS|$.

- $|MS|$ is gemeenschappelijk.

- $\angle MAS = \angle MBS = 90^\circ$: de raaklijn $\perp$ op de straal van de cirkel (AM en BM).

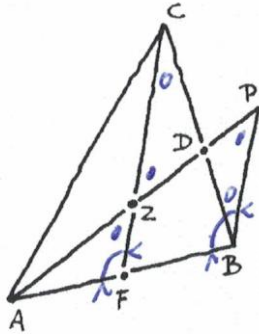
- $|MA| = |MB|$: de straal van de cirkel.

$\therefore \triangle MAS \cong \triangle MBS \therefore |AS| = |BS|$.

Opgave 17 Zwaartelijnen

Van driehoek ABC zijn AD en CF zwaartelijnen.

Zie onderstaande figuur.



Het snijpunt van AD en CF noemen we Z . Trek de lijn door $B \parallel CF$. Het snijpunt met het verlengde van AD noemen we P .

a) Bewijs $|BP| = |CZ|$.

Een blik op bovenstaande figuur geeft aan dat het handig is om gebruik te maken van congruentie.

1) $BP \parallel CF \therefore 2) \angle CZD = \angle DPB$, en $\angle DCZ = \angle DBP$. Uitgedrukt in de gebruikte terminologie: Z -hoeken.

Verder, AD is de zwaartelijijn $\therefore 3) |DC| = |BD|$. Uit 1), 2) en 3) volgt: $\triangle CZD \cong \triangle BPD \therefore |BP| = |CZ|$.

b) Bewijs $|BP| = 2 \cdot |FZ|$.

CF is de zwaartelijijn $\therefore |AF| = |FB|$ en $FZ \parallel BP \therefore FZ$ is de *midden parallel* van $\triangle ABP$. Zie de bovenstaande samenvatting. Of, $|AF|:|AB| = 1:2 = |FZ|:|BP|$.

Dus $|FZ| = \frac{1}{2} \cdot |BP| = \frac{1}{2} \cdot |CZ|$, zie onder a). $\therefore |BP| = 2 \cdot |FZ|$ en $|CZ| = 2 \cdot |FZ|$.

c) Uit a) en b) volgt dat $|CZ| = 2 \cdot |FZ|$. Kennelijk snijdt zwaartelijijn AD de zwaartelijijn CF in het punt op $\frac{2}{3}$ van C .

Op dezelfde manier, redenering, snijdt zwaartelijijn uit B de zwaartelijijn CF in het punt op $\frac{2}{3}$ van C .

Dus de zwaartelijnen gaan door één punt?

Aangezien de zwaartelijijn uit B , de zwaartelijijn CF in het punt op $\frac{2}{3}$ van C snijdt en er maar één punt op $\frac{2}{3}$ van C ligt, gaan alle drie de zwaartelijnen door één punt.

We hebben nog een aanvullend resultaat gevonden: *De zwaartelijnen van een driehoek verdelen elkaar in stukken die zich verhouden als 1:2.*

- Oefenen

Bestuderen: Bladzijde 4 tot en met 8.

Maken: De opgaven 1 tot en met 14.

Blok 8 Les 2 Hoeken en bogen, Angles and Arc segments

Deze les sluit aan bij paragraaf 2 van Vlakke Meetkunde van de Wageningse Methode 2011. Vlakke Meetkunde kun je downloaden vanaf de site van de Open Universiteit.

- Cirkelsector



- Een cirkelsector is een deel van een cirkel dat begrensd wordt door twee stralen en een cirkelboog.

- Twee cirkelsectoren zijn congruent als:

a. de stralen gelijk zijn en de hoeken bij het middelpunt gelijk zijn,

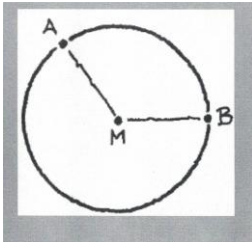
of

b. de stralen gelijk zijn en de cirkelbogen gelijk zijn.

- Cirkelboog.

A en B zijn punten op een cirkel met middelpunt M. De middelpuntshoek $AMB = 129^\circ$. De grootte van de bijbehorende cirkelboog geef je ook aan met graden.

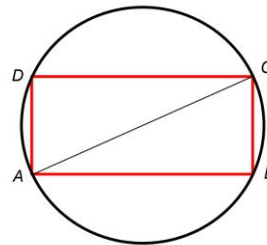
In dit geval: $bg(AB) = 129^\circ$.



Opgave 1 § 2

Voorbeeld (opgave 1a)

$bg(AC) = 180^\circ$



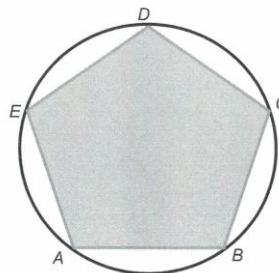
Voorbeeld (opgave 1b)

ABCDE is een regelmatige vijfhoek met de hoekpunten op de cirkel.

De cirkel is verdeeld in 5 even grote bogen.

→ $bg(AB) = 360^\circ : 5 = 72^\circ$.

→ $bg(AC) = 144^\circ$



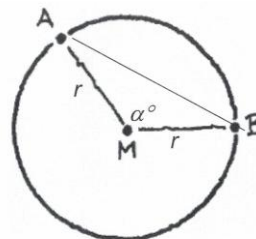
Gegeven cirkel met straal r en $\angle AMB = \alpha^\circ$

Hoe lang is cirkelboog AB ?

De cirkelomtrek is $2\pi r$.

De cirkelsector AMB is $\frac{\alpha}{360}$ gedeelte van de hele cirkel.

De lengte van boog AB is $\frac{\alpha}{360} \times 2\pi r = \frac{\alpha\pi r}{180}$.



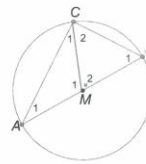
- De Stelling van Thales.

Stelling

Cirkel met middelpunt M en middellijn AB .

Punt C ligt op de cirkel.

Dan is $\angle ACB = 90^\circ$.



Bewijs

Teken hulplijn CM .

$\triangle AMC$ en $\triangle BMC$ zijn gelijkbenig.

$\rightarrow \angle A_1 = \angle C_1$ en $\angle B_1 = \angle C_2$.

$\angle A_1 + \angle C_1 + \angle M_1 = 180^\circ$

$\angle B_1 + \angle C_2 + \angle M_2 = 180^\circ +$

$\rightarrow 2 \times \angle C_1 + 2 \times \angle C_2 + \angle M_{12} = 360^\circ$

$\rightarrow 2 \times \angle C_{12} = 180^\circ$

$\rightarrow \angle C_{12} = 90^\circ$

- Stelling buitenhoek.

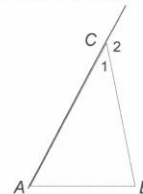
Stelling

In een driehoek is een buitenhoek groter dan elk van de tegenoverliggende binnenhoeken.

In de figuur: $\angle C_2 > \angle A$ en $\angle C_2 > \angle B$.

Bewijs

$\angle C_2 = \angle A + \angle B$ (waarom?)



$$\angle C_1 + \angle C_2 = 180^\circ$$

en

$$\angle C_1 + \angle A + \angle B = 180^\circ \rightarrow \angle C_2 = \angle A + \angle B.$$

- De omgekeerde stelling van Thales.

Stelling

Cirkel met middelpunt M en middellijn AB .

$\angle ACB = 90^\circ$.

Dan ligt punt C op de cirkel.

Bewijs

Stel C ligt buiten de cirkel.

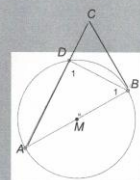
D is het snijpunt van de lijn AC met de cirkel.

$\rightarrow \angle D_1 = 90^\circ$ (vlgs Thales)

$\angle D_1$ is buitenhoek van $\triangle BCD$.

$\rightarrow \angle C < 90^\circ$ (volgens hulpstelling)

$\rightarrow$ Tegenspraak met het gegeven.



Door een punt binnen de cirkel te kiezen wordt het bewijs volledig.

- Bewijzen met Thales

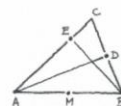
Opgave 6 § 2

Opgave 6

AD en BE zijn hoogtelijnen in driehoek ABC .

M is het midden van AB .

Bewijs dat D en E even ver van M af liggen.



Bewijs

Driehoek ADB is een rechthoekige driehoek.

$\rightarrow$ De punten A , D en B liggen op een cirkel met middelpunt M . (Thales)

Hetzelfde geldt voor driehoek AEB .

$\rightarrow$ De punten A , B , D en E liggen op één cirkel met middelpunt M .

$\rightarrow |EM| = |DM|$.

- Omtrekshoeken.

A en B zijn punten op de cirkel (zie hier onder). P ligt op de cirkel tegenover A en B. $\angle APB$ heet de omtrekshoek. Deze omtrekshoek staat op de boog AB.

Opgave 11 § 2

Stelling van de omtrekshoek

Gegeven een boog AB van een cirkel met middelpunt M.

P ligt op de cirkel, tegenover A en B.

Dan geldt: $\angle APB = \frac{1}{2} \text{bg}(AB)$.

Bewijs (in drie stappen)

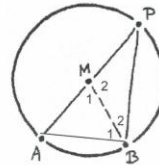
stap 1: M ligt op AP.

$\triangle AMB$ is gelijkbenig $\rightarrow \angle A = \angle B_1$

$$\angle M_1 = 180^\circ - \angle A - \angle B_1 = 180^\circ - 2 \times \angle A \quad (1)$$

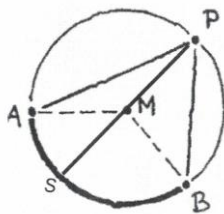
B ligt op de cirkel $\rightarrow \angle B_{12} = 90^\circ$ (Thales)

$$\angle P = 180^\circ - \angle A - \angle B_{12} = 90^\circ - \angle A \quad (2)$$



Typ hier uw vergelijking.

$$\angle P = \frac{1}{2} \angle M_1 = \frac{1}{2} \text{bg}(AB) \text{ [regel(1) en (2)]}$$



stap 2:

M ligt binnen $\triangle ABP$ (zie bovenstaande figuur)

Trek hulplijn PM, deze snijdt de cirkel in S.

Pas stap 1 toe op de driehoeken APS en BPS $\rightarrow$

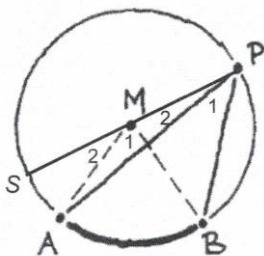
$$\rightarrow \angle SPB + \angle SPA = \frac{1}{2} \text{bg}(SB + SA) = \frac{1}{2} \text{bg}(AB)$$

stap 3:

M ligt buiten $\triangle ABP$ (zie onderstaande figuur).

Trek hulplijn PM, deze snijdt de cirkel in S.

Pas stap 1 toe op de driehoeken APS en BPS.



$$\text{In } \triangle BPS: \angle P_{12} = \frac{1}{2} \angle M_{12}.$$

$$\text{In } \triangle APS: \angle P_2 = \frac{1}{2} \angle M_2.$$

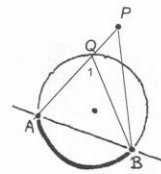
$$\rightarrow \angle P_1 = \angle P_{12} - \angle P_2 = \frac{1}{2} \angle M_{12} - \frac{1}{2} \angle M_2 = \frac{1}{2} \angle M_1 = \frac{1}{2} \text{bg}(AB)$$

Opgave 12 § 2 Omgekeerde stelling van de omtrekshoek:

Gegeven een boog $\overline{AB}$ van een cirkel met middelpunt M .

P ligt tegenover A en B zodat $\angle APB = \frac{1}{2} \text{bg}(AB)$.

Dan ligt P op de cirkel.



Bewijs (uit het ongerijmde)

Stel P ligt buiten de cirkel.

Q is het snijpunt van AP met de cirkel.

$\angle Q_1$ is buitenhoek van $\triangle BQP$.

$\rightarrow \angle P < \angle Q_1 = \frac{1}{2} \text{bg}(AB)$. (Stelling buitenhoek)

$\rightarrow$ Tegenspraak met het gegeven.

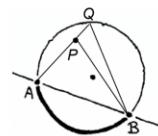
Om het bewijs compleet te maken, kies een punt P binnen de cirkel op de lijn AQ . Maak gebruik van de buitenhoek bij P .

Omgekeerde stelling van de omtrekshoek

Gegeven een boog AB van een cirkel met middelpunt M .

P ligt tegenover A en B zodat $\angle APB = \frac{1}{2} \text{bg}(AB)$.

Dan ligt P op de cirkel.



Bewijs vervolg (uit het ongerijmde)

Stel P ligt **binnen** de cirkel.

Q is het snijpunt van AP met de cirkel.

$\angle P$ is buitenhoek van $\triangle BQP$.

$\rightarrow \angle P > \angle Q = \frac{1}{2} \text{bg}(AB)$.

$\rightarrow$ Tegenspraak met het gegeven.

$\rightarrow P$ ligt op de cirkel.

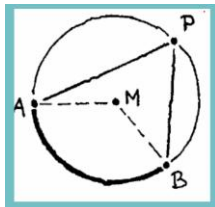
Het bewijs berust weer op een tegenspraak. Ook wel een bewijs uit het ongerijmde genoemd.

• Stelling van de omtrekshoek.

Gegeven een cirkel met daarop een boog.

- Elke omtrekshoek is half zo groot als de bijbehorende boog.

- Als de hoek bij de boog de helft is van de boog, dan ligt het hoekpunt op de cirkel.



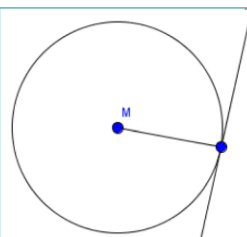
• Raaklijn en koorde.

Stelling

Gegeven:

- cirkel met middelpunt M en lijn l .
- De afstand van l tot M is gelijk aan de straal van de cirkel.

Dan is l een raaklijn.

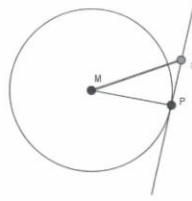


Stelling

Gegeven:

- cirkel met middelpunt M en lijn l .
- De afstand van l tot M is gelijk aan de straal van de cirkel.

Dan is l een raaklijn.



Bewijs

MP is de loodlijn vanuit M op l .

Omdat $|MP|$ gelijk is aan de straal, ligt P op de cirkel.

Kies een punt Q op l , willekeurig.

Volgens de stelling van Pythagoras is $|MQ| > |MP|$.

Dus Q ligt buiten de cirkel en P is het enige punt van l op de cirkel.

Gevolg:

de raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.

De hoek tussen raaklijn en koorde:

Lijn l is raaklijn aan de cirkel in punt P .

$$\rightarrow \angle l, MP = 90^\circ$$

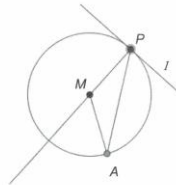
Punt A ligt op de cirkel.

$\triangle AMP$ is gelijkbenig, dus $\angle A = \angle P$

$$\rightarrow \angle AMP = 180^\circ - 2 \times \angle A$$

$$\angle l, AP = 90^\circ - \angle P = 90^\circ - \angle A$$

$$\rightarrow \angle l, AP = \frac{1}{2} \angle AMP = \frac{1}{2} \text{bg}(AP)$$

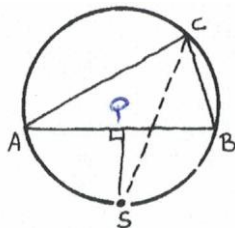


Conclusie

De hoek tussen de raaklijn en een koorde is de helft van de bijbehorende boog.

Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.

Opgave 18 § 2



Gegeven is $\triangle ABC$ met de omschreven cirkel. De middelloodlijn van AB snijdt de cirkel in het punt S tegenover C . Bewijs dat CS de bisectrice is van $\angle ACB$.

$\angle ACS = 1/2$ boog AS , $\angle SCB = 1/2$ boog SB , $\angle ACB = 1/2$ boog AB (Over S). Het middelpunt van de cirkel is M (Hier niet getekend). De lijn MS is de middelloodlijn van AB . De middelloodlijn deelt AB in twee gelijke delen $\therefore \triangle APS \sim \triangle BPS$.

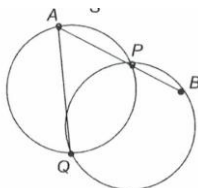
Dus $\triangle ABS$ is gelijkbenig $\therefore AS = SB \therefore CS$ is de bisectrice van $\angle ACB$.

Nota Bene: snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden van een driehoek, ligt op gelijke afstanden van de driehoekpunten $\therefore$ de cirkel met als middelpunt het snijpunt van de middelloodlijnen ligt op gelijke afstanden van de driehoekpunten $\Rightarrow$ de omschreven cirkel.

Opgave 19 § 2

Twee cirkels met gelijke straal snijden elkaar in de punten P en Q . Een lijn door P snijdt de ene cirkel ook nog in A en de andere cirkel in B .

Zie onderstaande Figuur.



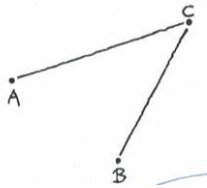
Bewijs dat A en B even ver van Q afliggen.

$\angle PAQ$ en $\angle PBQ$ staan beide op dezelfde boog $\sphericalangle PQ$. De boog ligt in verschillende cirkels maar wel cirkels met

dezelfde straal. Dus $\angle PAQ$ en $\angle PBQ$ zijn even groot: stelling van de omtrekshoek. $\triangle QAB$ is een gelijkbenige driehoek $\therefore |AQ| = |BQ| \Rightarrow A$ en B liggen even ver van Q af.

Opgave 20 § 2

Gegeven zijn drie punten A, B en C die niet op een rechte lijn liggen. Zie onderstaande Figuur.



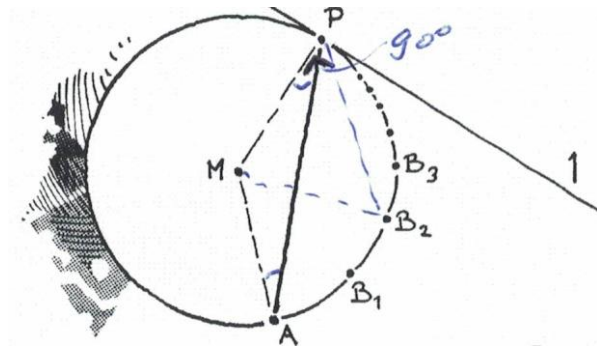
Teken alle punten P , zo dat $\angle APB = \angle ACB$.

De tekening laat ik achterwege. In woorden: Dat zijn de punten die op de omgeschreven cirkel liggen van de $\triangle ABC$ die aan dezelfde kant liggen, tegenover de lijn AB , als C . *De stelling van de omtrekshoek.*

Opgave 21 § 2

Gegeven is een cirkel met middelpunt M . De lijn l raakt in het punt P aan de cirkel. A is een ander van de cirkel. $\angle l, AP$ is de hoek die l maakt met de koorde AP .

Zie onderstaande figuur.



a) Bewijs: $\angle AMP = 2 \cdot \angle l, AP$.

- $|MP| = |MA| \therefore \angle MAP = \angle MPA$.

- $\angle AMP = 180^\circ - 2 \cdot \angle MPA \therefore \angle AMP = 180^\circ - 2 \cdot (90^\circ - \angle l, AP) = \angle l, AP$.

b) Bewijs: $\angle AMP = 2 \cdot \angle l, AP$.

Benader het punt P met een rij punten B_n op de cirkel. Zie bovenstaande Figuur.

- $\angle B_n PA$ nadert willekeurig dicht tot $\angle l, AP$.

- $\angle B_n MA$ nadert willekeurig dicht tot $\angle PMA$.

- $\angle B_n MA = 2 \cdot \angle B_n PA$, voor elke n . Stelling van de omtrekshoek.

$\therefore \angle AMP \equiv \angle PMA = 2 \cdot \angle l, AP$.

Opgave 22

Driehoek ABC heeft hoeken van 50° , 60° en 70° . In de hoekpunten worden de raaklijnen aan de omgeschreven cirkel getekend. Die raaklijnen sluiten weer een driehoek in: $\triangle DEF$. Zie onderstaande Figuur.

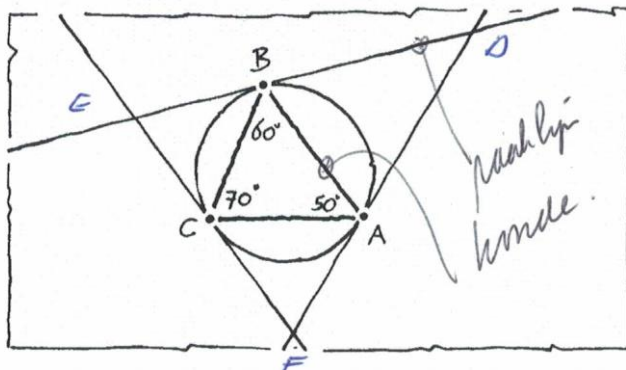
- $\angle D$ staat op $\sphericalangle AB$.

- $\angle BCA = 70^\circ = \frac{1}{2} \sphericalangle AB \therefore \sphericalangle AB = 140^\circ$.

- $\angle DBA = \frac{1}{2} \cdot 140^\circ = 70^\circ$, in woorden: de hoek tussen de raaklijn en koorde is de helft van de boog waarop de koorde staat.

- $\angle DAB$ staat op dezelfde boog en is dus ook 70° .

$\therefore \angle BDA = 180^\circ - 2 \cdot 70^\circ = 40^\circ$.



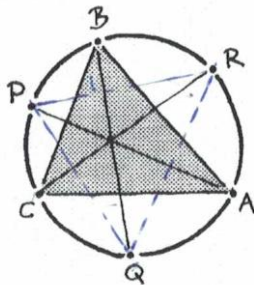
Met dezelfde redeneringen vind je: $\angle E = 80^\circ$, en $\angle F = 180^\circ - 80^\circ - 40^\circ = 60^\circ$.

Opgave 23

Driehoek ABC heeft hoeken van 50° , 60° en 70° . De bissectrices van de hoeken snijden de omgeschreven cirkel van driehoek ABC in de punten P , Q en R .

Zie onderstaande Figuur.

- $\angle BCA = 70^\circ$.
- $\angle BAP = 50^\circ$.
- $\angle CBA = 60^\circ$.



Bereken de hoeken van de driehoek PQR .

- $\angle PQR$.

Deze hoek staat op de boog $PBR = \sphericalangle PB + \sphericalangle BR \therefore \angle PQR = \frac{1}{2} \sphericalangle (PB + BR)$.

$\angle BCR$ staat op $\sphericalangle BR$. De $\sphericalangle BR = 2 \cdot \angle BCR = \angle BCA = 70^\circ$.

$\angle BAP$ staat op $\sphericalangle PB$. De $\sphericalangle PB = 2 \cdot \angle BAP = \angle BAC = 50^\circ$.

$$\therefore \angle PQR = \frac{1}{2} \sphericalangle (PB + BR) = \frac{1}{2} \cdot (70^\circ + 50^\circ) = 60^\circ.$$

- $\angle QRP$.

Deze hoek staat op de boog $PCQ = \sphericalangle PC + \sphericalangle CQ \therefore \angle QRP = \frac{1}{2} \sphericalangle (PC + CQ)$.

$\angle CAP$ staat op $\sphericalangle PC$. De $\sphericalangle PC = 2 \cdot \angle CAP = \angle BAC = 50^\circ$.

$\angle QBC$ staat op $\sphericalangle CQ$. De $\sphericalangle CQ = 2 \cdot \angle QBC = \angle CBA = 60^\circ$.

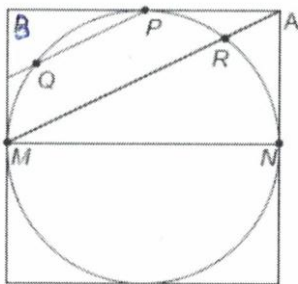
$$\therefore \angle QRP = \frac{1}{2} \sphericalangle (PC + CQ) = \frac{1}{2} \cdot (50^\circ + 60^\circ) = 55^\circ.$$

- $\angle RPQ$.

$$\angle RPQ = 180^\circ - (60^\circ + 55^\circ) = 65^\circ.$$

Opgave 24

Van een vierkant is A een hoekpunt en zijn M , N en P middens van de zijden. In het vierkant is de ingeschreven cirkel getekend. Er zijn twee lijnen getekend. De ene lijn gaat door A en M ; de andere gaat door P en is evenwijdig aan de eerste lijn. De lijnen snijden twee bogen van de cirkel af; die zijn in de figuur vet aangegeven. Zie onderstaande figuur.



Bewijs dat de bogen PQ en RN even lang zijn.

$QP \parallel AM$.

Gebruik maken van de stelling over de hoek tussen raaklijn en koorde.

$$\angle MAB = \angle AMN = \frac{1}{2} \angle RN,$$

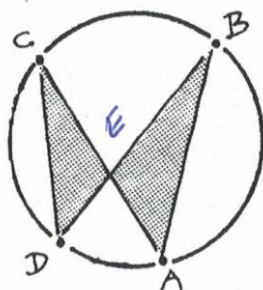
$$\angle QPB = \angle AMN = \frac{1}{2} \angle QP.$$

$$\therefore \angle QP = \angle RN.$$

Opgave 25 De Vlinderstelling

De vier punten A, B, C en D liggen in deze volgorde op een cirkel.

Zie onderstaande figuur.



Trek de lijnen AB, BD, DC , en CA . Op deze wijze ontstaat een vlinderfiguur, bestaande uit twee driehoeken.

Bewijs dat deze driehoeken gelijkvormig zijn.

Voor gelijkvormige driehoeken geldt dat de hoeken gelijk zijn.

$$\angle EBA \text{ staat op } \angle DA,$$

$$\angle ECD \text{ staat op } \angle DA,$$

$$\therefore \angle EBA = \angle ECD.$$

De overstaande hoeken bij E zijn gelijk.

Nu zijn we klaar: twee hoeken zijn gelijk, dus de derde eveneens.

Ten overvloede;

$$\angle CDE \text{ staat op } \angle CB,$$

$$\angle CAB \text{ staat op } \angle CB,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle CAB.$$

- Oefenen

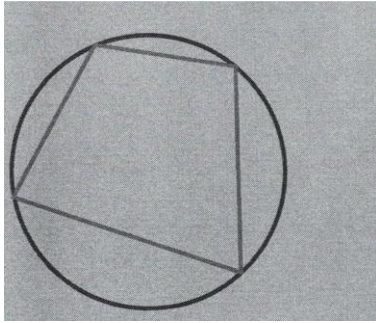
Bestuderen: de theorie van paragraaf 2.

Maken: De opgaven van paragraaf 2.

Blok 8 Les 3 Koordenvierhoeken en iso-hoeklijnen

Deze les sluit aan bij de paragrafen 3 en 4 van Vlakke Meetkunde van de Wageningse Methode 2011. Vlakke Meetkunde kun je downloaden vanaf de site van de Open Universiteit.

- Koordenvierhoek.



- Een koorde is een verbindingslijn tussen twee punten op een kromme, bijvoorbeeld een cirkel.
- Een koordenveelhoek is een veelhoek waarvan de zijden koorden zijn van een cirkel. Met andere woorden: een koordenveelhoek heeft een omgeschreven cirkel.
- Een koordenvierhoek is een vierhoek waarvan de zijden koorden zijn van een cirkel.
- De cirkel is de omgeschreven cirkel van de koordenvierhoek.

- Koorde

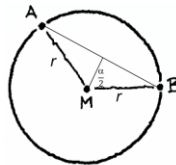
Gegeven cirkel met straal r en $\angle AMB = \alpha^\circ$

$$|AB| = 2r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

1) Controleer de formule voor:
 $\alpha = 0^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 180^\circ$

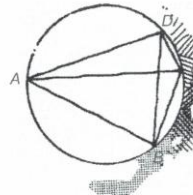
2) Geef een bewijs voor de formule.

3) De punten A, B, C en D liggen op een cirkel.
Bewijs dat geldt: $\text{bg}(AB) = \text{bg}(CD) \Leftrightarrow |AB| = |CD|$



- Koordenvierhoek

In de koordenvierhoek zijn de diagonalen getekend.
 $\angle ADB = \angle ACB$ want staan op dezelfde boog.



Zo zijn er meer hoekparen te vinden.

- Koordenvierhoekstelling

- Stelling: In een koordenvierhoek is de som van de overstaande hoeken 180° .

Opgave 2 § 3

Stelling

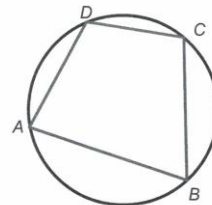
In een koordenvierhoek is de som van de overstaande hoeken 180° .

Bewijs

$\angle A$ staat op boog DCB .

$\angle C$ staat op boog DAB .

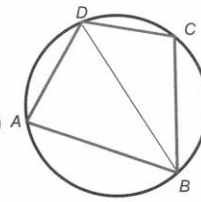
$$\rightarrow \angle A + \angle C = \frac{1}{2} \text{bg}(DCB) + \frac{1}{2} \text{bg}(DAB) = \frac{1}{2} \times 360^\circ = 180^\circ.$$



- Omgekeerde stelling:

Omgekeerde stelling

Als in een vierhoek de som van de overstaande hoeken 180° is, dan is de vierhoek een koordenvierhoek (dat wil zeggen: de vier hoekpunten liggen op een cirkel.)



Bewijs

Trek hulplijn DB .

Teken de omgeschreven cirkel van $\triangle DAB$.

Nu is te bewijzen dat C ook op deze cirkel ligt.

$$\angle A = \frac{1}{2}\text{bg}(BD) = 180^\circ - \frac{1}{2}\text{bg}(DAB).$$

Maar ook: $\angle A = 180^\circ - \angle C$. (gegeven)

$\rightarrow \angle C = \frac{1}{2}\text{bg}(DAB)$ en C ligt op de cirkel (stelling omtrekshoek).

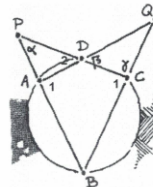
• Koordenvierhoeken

Opgave 3 § 3

Voorbeeld (opgave 3)

De verlengden van de zijden van koordenvierhoek $ABCD$ snijden elkaar in P en Q .

Bewijs dat $\alpha = \gamma - \beta$



Bewijs

$\angle D_2 = \beta$ (overstaande hoeken)

$$\gamma + \angle C_1 = 180^\circ$$

$$\rightarrow \angle A_1 = 180^\circ - \angle C_1 = \gamma \text{ (koordenvierhoek)}$$

Maar ook: $\angle A_1 = \alpha + \angle D_2 = \alpha + \beta$ (buitenhoek)

$$\rightarrow \alpha + \beta = \gamma$$

• De uitgebreide stelling van de omtrekshoeken.

Opgave 11 § 3

Gegeven punt P buiten de cirkel.

De benen van $\angle P$ snijden de bogen AB en CD van de cirkel.

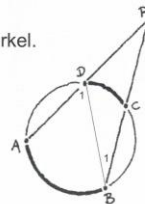
$$\text{Dan is } \angle P = \frac{1}{2}\text{bg}(AB) - \frac{1}{2}\text{bg}(CD).$$

Bewijs

Trek hulplijn DB .

$$\angle D_1 = \angle B_1 + \angle P \text{ (buitenhoek in } \triangle PDB)$$

$$\rightarrow \angle P = \angle D_1 - \angle B_1 = \frac{1}{2}\text{bg}(AB) - \frac{1}{2}\text{bg}(CD)$$



Opgave 12 § 3

Gegeven punt P binnen de cirkel.

De benen van $\angle P$ snijden de bogen AB en CD van de cirkel.

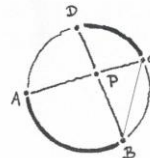
$$\text{Dan is } \angle APB = \frac{1}{2}\text{bg}(AB) + \frac{1}{2}\text{bg}(CD).$$

Bewijs

Trek hulplijn BC .

$$\angle APB = \angle B + \angle C \text{ (buitenhoek in } \triangle BPC)$$

$$\rightarrow \angle APB = \frac{1}{2}\text{bg}(CD) + \frac{1}{2}\text{bg}(AB)$$



Samengevat:

Als twee lijnen door punt P van een cirkel twee bogen afsnijdt, dan geldt:

- Als P buiten de cirkel ligt, is $\angle P$ het halve verschil van de bogen;
- Als P binnen de cirkel ligt, is $\angle P$ de halve som van de bogen.

• Iso-Hoeklijn

Gegeven:

Een lijnstuk AB en een hoek P met A en B op de benen van hoek P .

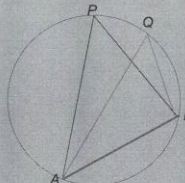
Gevraagd:

De verzameling van punten Q zodat $\angle AQB = \angle P$.

Oplossing:

Volgens de stelling van de omtrekshoek is dat de boog APB van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABP$.

Deze boog is een iso-hoek lijn.



De iso-hoeklijn is de lijn waarop alle punten liggen van waaruit een lijnstuk onder dezelfde hoek wordt gezien.

Opgave 1 § 4 de constructie van de iso-hoeklijn.

Gegeven is een lijnstuk AB .

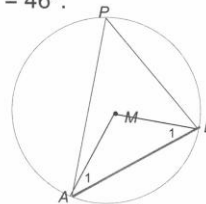
Gevraagd is de verzameling punten P , zodat $\angle APB = 46^\circ$.

$$\angle P = 46^\circ$$

$$\rightarrow \angle M = 2 \times \angle P = 92^\circ$$

$\triangle AMB$ is gelijkbenig

$$\rightarrow \angle A_1 = \angle B_1 = \frac{1}{2}(180^\circ - 92^\circ) = 44^\circ.$$

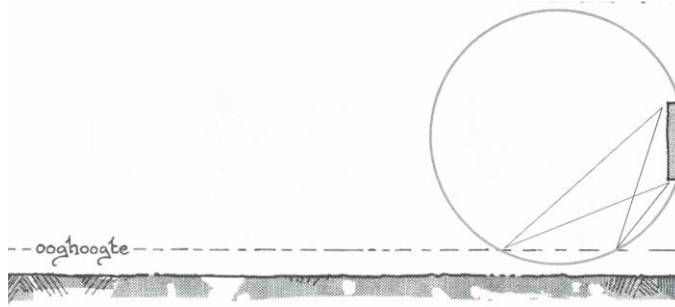


Constructie:

- Zet aan weerszijden van AB twee hoeken van 44° uit.
- Snijpunt is middelpunt M .
- Teken cirkel door A en B met middelpunt M .

Voorbeeld:

Je rijdt op de A15 en ziet het verkeersbord steeds groter worden.



Hoogte bord is 3.5 meter.

Hoogte onderkant bord ten opzichte van de weg is 4 meter.

Ooghoogte 1m.

Op welke horizontale afstand van het bord is de kijkhoek het grootst?

De kijkhoek is het grootst wanneer de cirkel, de iso-hoeklijn het kleinst is. Dus wanneer de ooghoogte de cirkel, de iso-hoeklijn raakt. Etc.

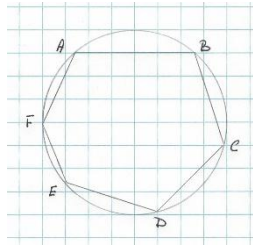
Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.

Opgave 7, paragraaf 3:

a) $ABCDEF$ is een koorden zeshoek. Bewijs dat $\angle A + \angle C + \angle E = 360^\circ$. Dus de som van de niet aansluitende hoeken.

Is het nodig om een tekening te maken? Neen, bij de aanname van een gelijkzijdige zeshoek, maar

dat staat niet in de opgave. Ik ga uit van een niet gelijkzijdige zeshoek.



$\angle A$ staat op boog BF, $\angle C$ staat op boog BD en $\angle E$ staat op de boog FD.

Boog (BF+BD+FD)=Boog(BC+CD+DE+EF+DE+EF+FA+AB+FA+AB+BC+CD)=

=Boog($2 \cdot BC + 2 \cdot CD + 2 \cdot DE + 2 \cdot EF + 2 \cdot FA + 2 \cdot AB$) = $2 \times 360^\circ \therefore \angle A + \angle C + \angle E = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 360^\circ = 360^\circ$.

b) $ABCDEFGH$ is een koorden achthoek. Hoe groot is $\angle A + \angle C + \angle E + \angle G$? Er zijn nu 4 niet aanliggende(aansluitende) hoeken. Maak een tekening en weer tellen $\Rightarrow \frac{3}{2} \cdot 360^\circ = 540^\circ$.

Een andere aanpak:

$\angle A = \frac{1}{2}(360^\circ - \text{boog } FB)$, $\angle C = \frac{1}{2}(360^\circ - \text{boog } BD)$, $\angle E = \frac{1}{2}(360^\circ - \text{boog } DF) \Rightarrow$

$\angle A + \angle C + \angle E = \frac{1}{2}(1080^\circ - 360^\circ) = 360^\circ$.

Nota Bene: gebruik ge maakt van $\text{boog } FB + \text{boog } BD + \text{boog } DF = 360^\circ$.

Maar het kan nog op een andere manier, met C_i de koorde tussen twee aansluitende hoeken:

Bij een vierhoek: twee niet aansluitende hoeken: $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 1 \cdot C_i = 180^\circ$.

Bij een zeshoek: drie niet aansluitende hoeken: $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 2 \cdot C_i = 360^\circ$.

Bij een achthoek: vier niet aansluitende hoeken: $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 3 \cdot C_i = 540^\circ$.

Nota Bene: uiteraard voor elke koordenveelhoek een andere C_i .

Algemeen: $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\frac{n}{2} - 1) \cdot C_i = \frac{1}{2} (\frac{n}{2} - 1) \sum_{i=1}^n C_i = \frac{1}{2} (\frac{n}{2} - 1) \cdot 2\pi \equiv (\frac{1}{2} \cdot n - 1) \cdot 180^\circ$,

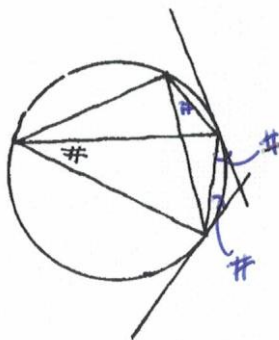
want $\sum_{i=1}^n C_i$ is de complete cirkelboog.

In formule: met n het aantal hoeken en de som van de niet aansluitende hoeken $\Rightarrow (\frac{1}{2} \cdot n - 1) \cdot 180^\circ$.

Nu terug naar de gelijkzijdige zeshoek. Het is nu duidelijk dat gelijkzijdigheid of ongelijkzijdigheid geen verschil mag maken. Dus, een zeshoek verdeelt de cirkel in zes bogen van 60° . Een hoek van de zeshoek staat op 4 bogen:

240° . De hoek is $120^\circ \therefore$ de 3 hoeken samen 360° . Op dezelfde wijze vind je voor de gelijkzijdige achthoek 540° .

Opgave 8 § 3

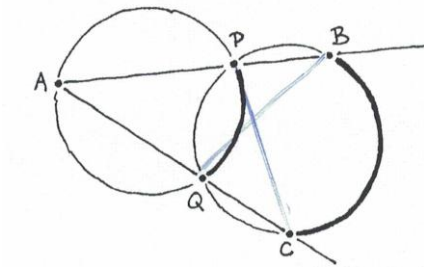


In bovenstaande koordenvierhoek zijn de diagonalen en in twee opvolgende hoeken de raaklijnen getekend. In vier hoeken staat het hashtag teken om aan te geven dat de vierhoeken gelijk zijn. Dit volgt uit de stelling van de omtrekshoek en het limietgeval met de raaklijnen.

Opgave 14 § 3

Twee cirkels met dezelfde straal snijden elkaar in P en Q . A ligt op de ene cirkel. Lijn AP en lijn AQ snijden de andere cirkel in B en C .

Zie onderstaande Figuur.



Bewijs $\sphericalangle BC = 2 \cdot \sphericalangle PQ$.

Zie **Opgave 11** in de samenvatting:

$$-\angle A = \frac{1}{2} \cdot (\sphericalangle BC - \sphericalangle PQ).$$

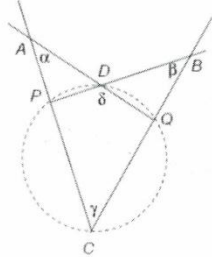
Hierbij ligt A buiten de ene cirkel met de punten B en C. A ligt ook op de omtrek van de andere cirkel, dus:

$$-\angle A = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle PQ.$$

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot (\sphericalangle BC - \sphericalangle PQ) = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle PQ \therefore \sphericalangle BC = 2 \cdot \sphericalangle PQ.$$

Opgave 15 § 3

We verlengen de zijden van een koordenvierhoek. Zie onderstaande Figuur.



In de figuur zijn vier hoeken aangegeven: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Bewijs: $\delta = \alpha + \beta + \gamma$.

Gebruikmakend van:

$$\delta + \gamma = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle 360^\circ = 180^\circ,$$

en

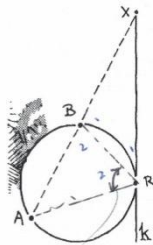
$$\angle DPC + \angle DQC = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha + \gamma + \angle DQC + \gamma + \beta + \angle DPC = \alpha + \gamma + 180^\circ + 180^\circ - \delta + \beta = 360^\circ \therefore$$

$$\therefore \delta = \alpha + \beta + \gamma.$$

Een ander bewijs is met gebruikmaking van **Opgave 11** in de samenvatting.

Opgave 5, § 4:



Een cirkel gaat door de punten A en B en raakt aan de lijn k in het punt R. De lijnen k en AB snijden elkaar in X.

a) Bewijs dat de driehoeken ARX en RBX gelijkvormig zijn.

$$\angle ABR = 180^\circ - \angle RBX.$$

$\triangle ARX$ en $\triangle RBX$ hebben $\angle RXA$ gemeenschappelijk.

$\angle XRB = \angle RAB$; omtrekshoeken op dezelfde cirkelboog.

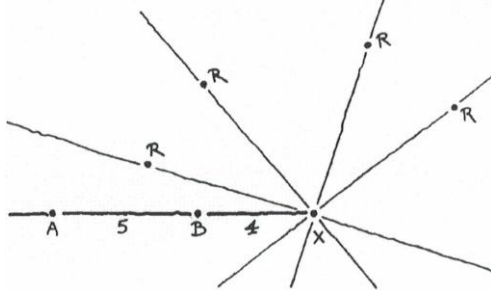
De driehoeken $\triangle ARX$ en $\triangle RBX$ hebben twee gelijke hoeken $\therefore$ dus de derde hoek ook. De driehoeken zijn gelijkvormig.

b) Laat met de verhoudingen zien dat uit a) $|AX| \cdot |BX| = |RX|^2$ volgt.

Uit de gelijkvormigheid (congruentie) volgt: $\frac{|AX|}{|RX|} = \frac{|RX|}{|BX|} \Rightarrow |AX| \cdot |BX| = |RX|^2$.

Opgave 7 § 4

Gegeven is lijnstuk AB van lengte 5. Op het verlengde van AB aan de kant van B ligt het punt X op een afstand 4 van B . Zie onderstaande Figuur.



Door X zijn vier lijnen getekend. Op elk van die lijnen is het punt R aangegeven, waarbij de kijkhoek ARB het grootst is.

Leg uit dat de punten R op één cirkel liggen en bepaal de straal van de cirkel.

We maken gebruik van de resultaten van bovenstaande **Opgave 5b § 4**.

De kijkhoek ARB is het grootst wanneer R op de cirkel ligt die raakt aan de lijn die door X en R gaat.

Uit opgave 5; uit de gelijkvormigheid van driehoeken volgt de verhouding van vier lijnstukken:

$$\frac{|AX|}{|RX|} = \frac{|RX|}{|BX|} \therefore \text{voor elk van de punten } R \text{ geldt: } |RX|^2 = |AX| \cdot |BX| \Rightarrow |RX|^2 = (5 + 4) \cdot 4 = 36 \therefore$$

$$\therefore |RX| = 6 \Rightarrow \text{Alle punten } R \text{ liggen op een cirkel met straal } |RX| = 6, \text{ en middelpunt } X.$$

Opgave 8 § 4

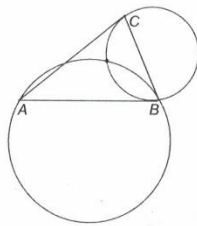
Gegeven de driehoek ABC . Er is een punt binnen de driehoek waar je de zijde AB onder 120° ziet en de zijde BC onder 106° .

a) Onder welke hoek zie je in dat punt de zijde AC ?

Je loopt een complete cirkel rond als je alle lijnstukken onder een bepaald hoek ziet. De gevraagde hoek is: $360^\circ - 120^\circ - 106^\circ = 134^\circ$.

b) De plaats van het punt?

Zie **Opgave 1 § 4** Constructie van de iso-hoeklijn in de bovenstaande samenvatting.



De cirkel door B en C is de iso- 106° -hoeklijn van BC ; de cirkel door A en B is de iso- 120° -hoeklijn van AB . De twee cirkels hebben twee snijpunten. Eén ervan is B , het andere is het gevraagde punt.

Oefenen.

- Bestudeer de theorie van paragraaf 3 en 4.

- Maken: de opgaven van paragraaf 3 en de opgaven van paragraaf 4.

Samenvatting vlakke Meetkunde

Samenvatting vlakke meetkunde

Hoeken, lijnen en afstanden

De overstaande hoeken bij twee snijdende lijnen zijn gelijk.

Als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn, dan zijn de F-hoeken en Z-hoeken gelijk.

Als twee lijnen in twee verschillende punten gesneden worden door een derde lijn, waarbij een paar gelijke F-hoeken of Z-hoeken optreedt, dan zijn die twee lijnen evenwijdig.

Een rechte hoek is 90° ; een gestrekte hoek is 180° .

De hoekensom van de hoeken van een driehoek is 180° .

De afstand (kortste verbinding) van een punt tot een lijn is de lengte van de loodlijn neergelaten vanuit dat punt op die lijn.

Driehoeksongelijkheid: Als drie punten A , B , C niet op één lijn liggen, dan geldt: $|AB| + |BC| > |AC|$.

Driehoeken

Gelijkbenige driehoek

1. Als in een driehoek twee hoeken gelijk zijn, dan zijn de tegenoverliggende zijden ook gelijk.

2. Als in een driehoek twee zijden gelijk zijn, dan zijn de tegenoverliggende hoeken ook gelijk.

Stelling van Pythagoras

Als driehoek ABC een rechte hoek in C heeft, dan geldt $a^2 + b^2 = c^2$.

Omgekeerde stelling van Pythagoras Als in driehoek ABC geldt $a^2 + b^2 = c^2$, dan is hoek C recht.

Cosinusregel

In elke driehoek ABC geldt: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.

Sinusregel

In elke driehoek ABC geldt: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$.

Congruente (gelijke) driehoeken

Twee driehoeken zijn congruent (gelijk) als ze gelijk hebben:

- een zijde en twee aanliggende hoeken, (HZH)
- een zijde, een aanliggende hoek en de tegenoverliggende hoek, (ZHH)
- twee zijden en de ingesloten hoek, (ZHZ)
- alle zijden, (ZZZ)
- twee zijden en de rechte hoek tegenover één van die zijden. (ZZR)

Gelijkvormige driehoeken

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze gelijk hebben:

- twee hoeken, (hh)
- een hoek en de verhouding van de omliggende zijden, (zhz)
- de verhouding van de zijden, (zzz)
- een rechte hoek en de verhouding van twee niet omliggende zijden. (zzr)

Vierhoeken

De som van de hoeken van een vierhoek is 360° (**hoekensom vierhoek**).

Equivalente definities en eigenschappen van een **parallellogram**.

- Er zijn twee paren evenwijdige zijden.
- Er zijn twee paren gelijke overstaande zijden.
- Twee overstaande zijden zijn gelijk en evenwijdig.
- De diagonalen delen elkaar middendoor.

Equivalente definities en eigenschappen van een **ruit**.

- Het is een parallellogram met vier gelijke zijden.
- Het is een parallellogram waarin een diagonaal een hoek middendoor deelt.
- Het is een parallellogram waarin de diagonalen elkaar loodrecht snijden.

Equivalente definities en eigenschappen van een **rechthoek**.

- Het is een vierhoek met vier rechte hoeken.
- Het is een parallellogram met een rechte hoek.
- Het is een parallellogram met gelijke diagonalen.

Puntverzamelingen

De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee gegeven punten A en B , is de

middelloodlijn van het lijnstuk AB .

De verzameling van alle punten binnen een hoek die dezelfde afstand hebben tot de benen van die hoek, is de

deellijn (bissectrice) van die hoek.

De verzameling van alle punten die afstand r tot een gegeven punt M hebben, is de **cirkel** met middelpunt M en straal r .

De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee elkaar snijdende lijnen, is het

deellijnenpaar (bissectricepaar) van die twee lijnen.

De twee deellijnen van twee elkaar snijdende lijnen snijden elkaar loodrecht in het snijpunt van die twee lijnen.

De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee evenwijdige lijnen, is de **middenparallel** van dat lijnenpaar.

Circleigenschappen

De loodlijn vanuit het middelpunt op een koorde deelt die koorde middendoor.

Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de verbindinglijn van middelpunt en raakpunt.

De som van de hoeken van een koordenveelhoek

Het aantal hoeken is n .

De som is $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

Bewijs met inductie:

Neem aan dat de som juist is voor n . Geldt de formule ook voor $n + 1$?

We hebben een hoek toegevoegd. Dat wil zeggen, geometrisch, er is een driehoek aan de n -hoekige koordenveelhoek toegevoegd.

De som van de hoeken wordt: $(n - 2) \cdot 180^\circ + 180^\circ = [(n + 1) - 2] \cdot 180^\circ$.

QED.

Blok 8 Les 4 Computerpracticum

Deze les sluit aan bij de paragraaf 5 van Vlakke Meetkunde van de Wageningse Methode 2011. Vlakke Meetkunde kun je downloaden vanaf de site van de Open Universiteit.

- **Geogebra**

Je kunt het programma downloaden en installeren via:

<http://geogebra.nl.softonic.com/download>

Om kennis te maken met de mogelijkheden van het programma:

- Ga naar Youtube en zoek op Geogebra Handleiding
- Kies voor: Handleiding Geogebra WebStart.

Andere computerprogramma's:

- PeL. Passer en liniaal. (free software)
- Wingeometry (free software)
- Geonet(free software)

Met zulke programma's kun je het volgende tekenen (uitzonderingen daargelaten):

- een punt, een lijn, een cirkel;
- een lijn door een gegeven punt, het lijnstuk met gegeven eindpunten, de cirkel met gegeven middelpunt en gegeven punt op de omtrek;
- het midden van een gegeven lijnstuk, de middelloodlijn van een gegeven lijnstuk, de bissectrice van een gegeven hoek, een loodlijn door een gegeven punt op een gegeven lijn;
- snijpunten van twee lijnen, van twee cirkels en van een lijn en een cirkel.

Je kunt ook in een tekening een punt, lijn of cirkel *aanwijzen* en *vastpakken*. Het object kun je vervolgens met de muis verplaatsen. Als je bijvoorbeeld een punt op een al getekende lijn hebt gekozen, zal het punt bij verschuiven op die lijn blijven.

Sommige programma's kunnen nog meer.

- "Labels" aan punten, lijnen en cirkels hangen met hun namen zoals "A" en "m".
- Verschillende objecten verschillend kleuren.
- Lijnstukken en hoeken opmeten.

- **Met passer en liniaal**

De klassieke vlakke meetkunde van Euclides is een meetkunde van passer en liniaal. Die meetkunde kent slechts drie basisobjecten:

- punten,
- rechte lijnen of gedeelten daarvan,

- cirkels met gegeven middelpunt en gegeven lijnstuk als straal.

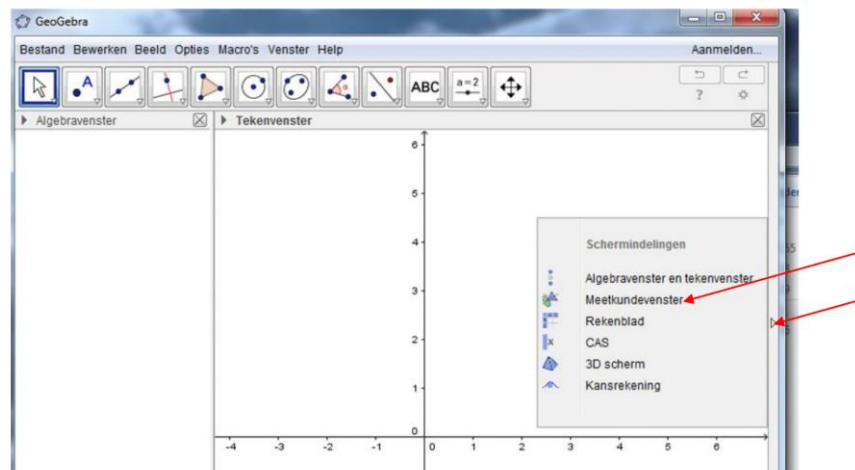
Voor het construeren van figuren wordt alleen gebruik gemaakt van een liniaal zonder eenheden om rechte lijnstukken te tekenen en van een passer om cirkels met een gegeven lijnstuk als straal te tekenen.

- **Geogebra**

Op het openingsvenster zie je een keuze menu.

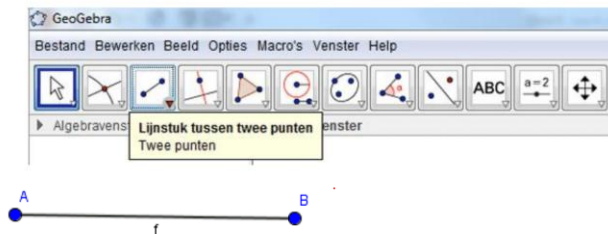
Klik anders op het kleine driehoekje aan de rechterkant.

Kies het meetkunde venster. Nu verdwijnen de assen.

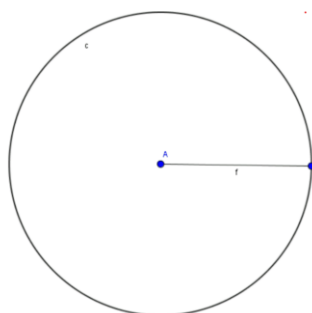
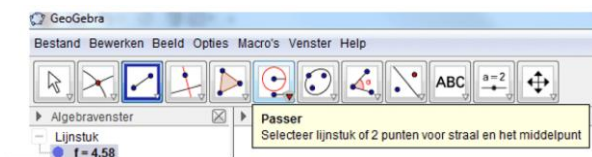


Hoe construeer je een gelijkzijdige driehoek?

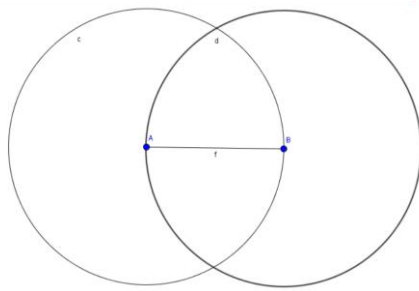
- Teken een lijnstuk AB .



Teken met de passer een cirkel met A als middelpunt en AB als straal.



Teken nu met de passer een cirkel met B als middelpunt en AB als straal

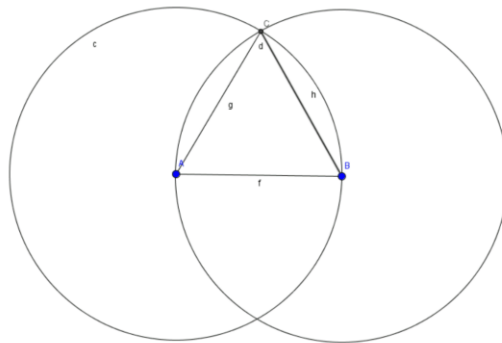


Hoe construeer je een gelijkzijdige driehoek?



Selecteer een snijpunt van de cirkels: C .

Teken de lijnstukken AC en BC .



Verberg de hulpconstructies en overbodige labels.

Ga met de cursor naar een object

Gebruik de rechtermuisknop en klik op Object tonen en Label tonen.

De $\triangle ABC$ wordt getoond.

• Onderzoek en bewijzen

Opgave 12 § 5

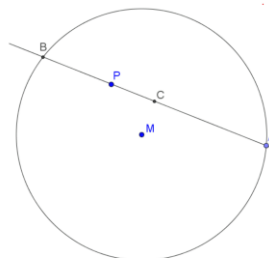
Voorbeeld (opgave 12)

Gegeven:

- Cirkel met middelpunt M .
- A ligt op de cirkel.
- P ligt binnen de cirkel.
- B is snijpunt van AP met de cirkel.
- C is het midden van AB .

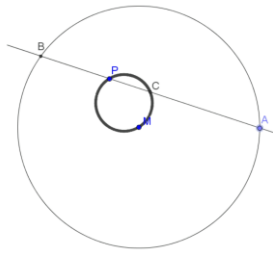
Onderzoek

Beschrijf de baan van C als A over de cirkel beweegt.



Werk netjes en verberg bij elke stap de overbodige hulobjecten.

Geef de punten de juiste namen.



Resultaat:

Als A de cirkel doorloopt, doorloopt C een cirkel door M en P met middelpunt halverwege M en P .

Tip: Zet bij C spoor aan als je A over de cirkel laat lopen.

Voorbeeld (opgave 12)

Bewijs

Q is het midden van PM .

$|MB| = |MA| \rightarrow \triangle AMB$ is gelijkbenig.

C is het midden van AB .

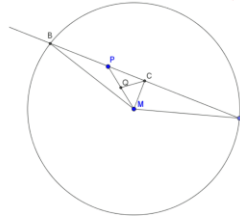
$\rightarrow MC$ staat loodrecht op AB .

$\rightarrow \triangle MCP$ is rechthoekig.

Q is het midden van PM .

$\rightarrow |QP| = |QC| = |QM|$

$\rightarrow C$ ligt op de cirkel door P en M met middelpunt Q . (Thales)



• Oefenen

Bestuderen:

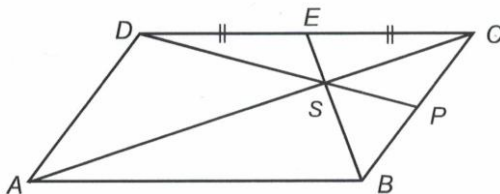
- Handleiding Geogebra op Youtube
- Eerste pagina paragraaf 5

Maken:

Opgaven 2 tot en met 9 en opgave 13 en 14.

Blok 8 De Toets Vlakke Meetkunde

Opgave 1 Een parallellogram



Gegeven een parallellogram $ABCD$ met punt E het midden van CD . Het snijpunt van AC en DE is S .

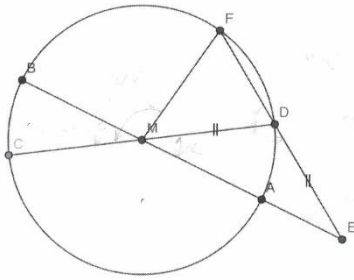
Er geldt $AS:CS = 2:1$. Dit volgt uit de gelijkvormigheid van $\triangle ECS$ en $\triangle ABS$: alle hoeken zijn gelijk. $EC = \frac{1}{2}AB$, dit is gegeven $\therefore SC = \frac{1}{2}AS \Rightarrow AS:SC = 2:1$.

Het snijpunt van DS en BC is het punt P . P is het midden van BC ?

$\triangle DAS$ en $\triangle CPS$ zijn gelijkvormig: alle hoeken zijn gelijk.

$AS:SC = 2:1$, uit de gelijkvormigheid volgt dan: $PC = \frac{1}{2}AD \therefore PC = \frac{1}{2}BC \Rightarrow$ dus P is het midden van BC .

Opgave 2 Een punt buiten de cirkel



Gegeven, zie nevenstaande Figuur, de cirkel met middelpunt M en twee middellijnen AB en CD . Op het verlengde van BA ligt het punt E zodat $ED = MD$.

De lijn door E en D snijdt de cirkel in F .

Bewijs dat $\angle BMF = 3 \cdot \angle MED$.

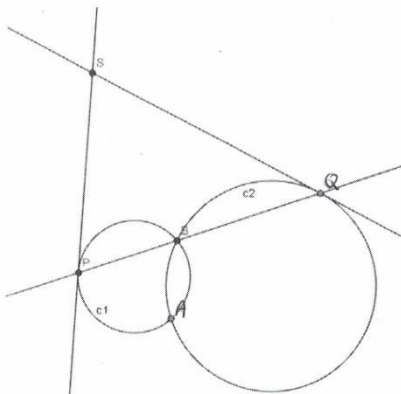
Voor het gemak noemen we $\angle MED: \alpha$.

- $\angle DME = \alpha$, want $\triangle DME$ is een gelijkbenige driehoek. $\angle DME$ staat op $\sphericalangle DA = \sphericalangle CB$, want $\angle BMC = \alpha \therefore \sphericalangle CB = \alpha$.

- $\angle MDE = 180^\circ - 2\alpha$, in de gelijkbenige $\triangle DME \Rightarrow \angle MDF (\equiv \angle CDF) = 2\alpha$, een omtrekshoek. Deze omtrekshoek staat op $\sphericalangle CF \therefore \sphericalangle CF = 4\alpha \Rightarrow \sphericalangle BF = \sphericalangle CF - \sphericalangle CB = 4\alpha - \alpha = 3\alpha \therefore \angle BMF = 3\alpha = 3 \cdot \angle MED$.

Opgave 3 Koordenvierhoek?

Twee cirkels c_1 en c_2 snijden elkaar in de punten A en B . Een lijn door B snijdt c_1 in P en c_2 in Q . De raaklijn in P aan c_1 en de raaklijn in Q aan c_2 snijden elkaar in het punt S . Zie onderstaande Figuur.



Bewijs: vierhoek $AQSP$ is een koordenvierhoek.

- We weten: de hoek tussen raaklijn en koorde is de helft van de bijbehorende $\sphericalangle$.

- In een koordenvierhoek is de som van de overstaande hoeken gelijk aan 180° . De omgekeerde stelling: als de som van de overstaande hoeken 180° is, is er sprake van een koordenvierhoek.

Dus te bewijzen:

- $\angle PSQ + \angle PAQ = 180^\circ$,

en

- $\angle SPA + \angle SQA = 180^\circ$.

Met de stelling van raaklijn en koorde weten we:

$$\angle SQP = \frac{1}{2} \sphericalangle BQ,$$

$$\angle SPQ = \frac{1}{2} \sphericalangle PB.$$

Verder

$$\angle PAB = \frac{1}{2} \sphericalangle PB,$$

$$\angle QAB = \frac{1}{2} \sphericalangle BQ.$$

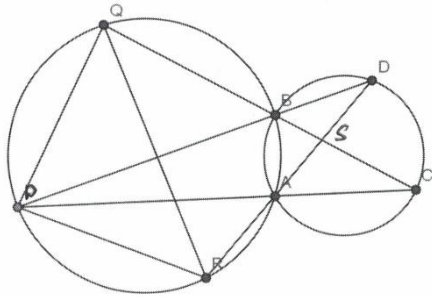
$$\therefore \angle SQP = \angle QAB, \text{ en } \angle SPQ = \angle PAB.$$

$$\angle PSQ = 180^\circ - (\angle SQP + \angle SPQ) = 180^\circ - (\angle QAB + \angle PAB) = 180^\circ - \angle PAQ \therefore \angle PSQ + \angle PAQ = 180^\circ.$$

Voor een vierhoek geldt: de som van de hoeken is $360^\circ \therefore \angle SPA + \angle SQA = 180^\circ$.
Dus vierhoek $AQSP$ is een koordenvierhoek.

Opgave 4 Gelijkbenige driehoek

Twee cirkels c_1 en c_2 snijden elkaar in de punten A en B . Punt P ligt op c_1 en buiten c_2 . De lijnen PA en PB snijden c_2 in C en D . De lijnen CD en DA snijden c_1 in Q en R .
Zie onderstaande Figuur.



Bewijs dat $\triangle PQR$ gelijkbenig is.

- $\angle BDA = \angle BCA$,

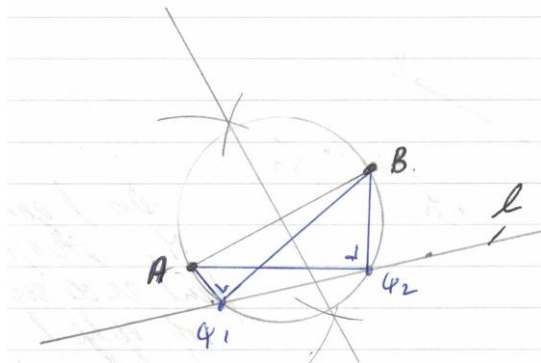
- $\angle DAC = \angle DBC$.

$\therefore \triangle BSD$ is gelijkvormig met $\triangle ASC \therefore \angle QBP = \angle PAR$ (overstaande hoeken van gelijkvormige driehoeken) $\therefore \angle PQB = \angle PRQ \therefore \angle PQR = \angle PRQ \therefore \triangle PQR$ is gekijkbenig.

Opgave 5 Construeren

Gegeven de lijnstukken AB en l .

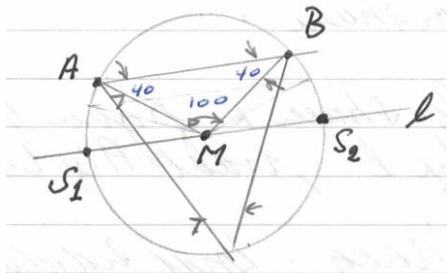
Zie onderstaande Figuur



a) Construeer in bovenstaande figuur de punten Q_1 en Q_2 op de lijn l , zodat $\angle AQB = 90^\circ$.

Aanpak: Construeer het midden van AB . Teken de cirkel met straal $\frac{1}{2}AB$. Deze cirkel snijdt lijn l in Q_1 en Q_2 . De stelling van Thales: $\angle AQ_{1,2}B = 90^\circ$. Dit geldt dus voor elk punt Q op de cirkel.

b) Construeer in onderstaande figuur de punten S_1 en S_2 op de lijn l , $\angle AS_1B = 50^\circ$.



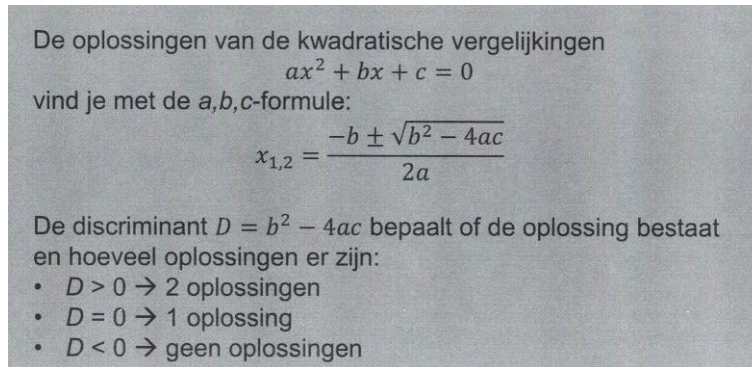
$\angle AS_1B = 50^\circ$. Dus S_1 ligt op de iso-hoeklijn van 50° . Vanuit het middelpunt M , liggend op de lijn l , zien we het lijnstuk AB onder een hoek van 100° : de omtrekshoek. Nu kunnen we het middelpunt construeren, want $\angle BAM = \angle ABM = 40^\circ$. Zo vinden we het middelpunt M op de lijn l . Door de cirkel te tekenen met straal AM , vinden we het andere snijpunt S_2 met de lijn l .

Blok 9 Complexe getallen, Complex numbers

Blok 9 Les 1 Vergelijkingen van graad 3

Deze les sluit aan bij paragraaf 1 van Inleiding Complexe Getallen van de Wageningse Methode 2009

- De a, b, c -formule



De oplossingen van de kwadratische vergelijkingen
 $ax^2 + bx + c = 0$
vind je met de a, b, c -formule:
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De discriminant $D = b^2 - 4ac$ bepaalt of de oplossing bestaat
en hoeveel oplossingen er zijn:
• $D > 0 \rightarrow 2$ oplossingen
• $D = 0 \rightarrow 1$ oplossing
• $D < 0 \rightarrow$ geen oplossingen

Als $D = b^2 - 4ac = 0$, in bovenstaande kwadratische vergelijking is er slechts één wortel.

Voorbeeld met $D < 0$:

$$x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow D = 1 - 4 = -3.$$

De oplossingen volgens de a, b, c -formule zijn:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

De verzameling getallen waarmee je hebt leren werken zijn:

- $\mathbb{N}$, de natuurlijke, dus gehele getallen ≥ 0 . Ook wordt gebruik gemaakt van $\mathbb{P}$, de natuurlijke getallen > 0 .

- $\mathbb{Z}$, de verzameling gehele getallen.

- $\mathbb{Q}$, de verzameling rationale getallen: alle gehele getallen met de positieve en negatieve breuken.

- $\mathbb{R}$, de verzameling reële getallen: alle getallen, inclusief wortels, π , e , ${}^2\log 3$, enz.

Een voorbeeld van $\mathbb{R}$: een bacteriekolonie verdubbelt elk uur. In hoeveel tijd wordt deze kolonie 3 keer zo groot? Als je de tijdsduur x uur noemt, dan is de oplossing van de vergelijking:

$$2^x = 3.$$

Hoe je ook je best doet, maar je vindt geen oplossing voor x in de vorm van rationale getallen $\mathbb{Q}$. De oplossing in $\mathbb{R}$ is: ${}^2\log 3$. Of: $x \log 2 = \log 3 \Rightarrow x = \frac{\log 3}{\log 2}$.

Elke getal x heeft een tegengestelde $-x$, met de eigenschap $x \pm x = 0$.

Elk getal $x \neq 0$, heeft een omgekeerde x^{-1} , met de eigenschap $x \cdot x^{-1} = 1$.

Delen door een getal $b \neq 0$, is hetzelfde als vermenigvuldigen met b^{-1} .

Met a/b bedoelen we het getal x vermenigvuldigd met b , a oplevert.

In formule: $b \cdot x = a \Rightarrow b^{-1} \cdot b \cdot x = b^{-1} \cdot a \Rightarrow 1 \cdot x = b^{-1} \cdot a$.

Bij het oplossen van vergelijkingen in $\mathbb{R}$, wordt de volgende regel gebruikt:

Als $a \cdot b = 0$, dan is $a = 0$, of $b = 0$.

De derdegraads vergelijking

Opgave 3 § 1

a) In de oudheid werd alleen met positieve getallen gewerkt. Negatieve getallen waren onbekend.

b) Voor de oplossing van derdegraads vergelijkingen is het soms handig om de vergelijking $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, in een eenvoudiger vorm te schrijven.

c) De meer eenvoudige vorm is: $x^3 + ux^2 + vx + w = 0$. Het zal duidelijk zijn dat $a \neq 0$. Zou $a = 0$ zijn dan heb je geen derdegraads vergelijking meer.

Ook zie soms de oplossing direct: $x^3 - 12x^2 - 4x + 48 = 0 \Rightarrow x^2(x - 12) - 4(x - 12) = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x - 12) \therefore$

$$x = \pm 2 \text{ en } x = 12.$$

d) We gaan nog even door met $x^3 - 12x^2 - 4x + 48 = 0$. Vervang x door $y + 4$:

$$x^3 \Rightarrow (y + 4)^3 = y^3 + 12y^2 + 48y + 64.$$

$$x^2 \Rightarrow (y + 4)^2 = y^2 + 8y + 16.$$

Resultaat: $y^3 = 52y + 96$.

Opmerking: bij bovenstaande berekening kan je gebruik maken van het binomium van Newton:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

e) De oplossing van $y^3 = 52y + 96$ is: $(y + 2)(y + 6)(y - 8) = 0$. Zag je dat niet direct? Begrijpelijk. De oplossing onder c) zie je eigenlijk in één oogopslag. Met $x = y + 4$, vind je de oplossingen gevonden onder c).

f) Onder c) en e) vond je de oplossingen. Zijn dit alle oplossingen? Dit is eenvoudig te zien door de functie te tekenen met de GR of met WolframAlpha-app. Je kan dit ook bewijzen door de afgeleide van de functie $F(y) = y^3 - 52y - 96$, te onderzoeken.

g) Onder c) hebben we door substitutie een vergelijking van de vorm $x^3 + ux^2 + vx + w = 0$, omgezet in een vergelijking van de vorm $y^3 = py + q$.

Door een substitutie van de vorm $x = y + \dots$, kun je de vergelijking $x^3 + 3x^2 + 3x + 9 = 0$, ook omzetten in een vergelijking van de vorm $y^3 = py + q$, voor bepaalde p en q . Welke substitutie? Laten we eens kijken.

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 9 = 0 \Rightarrow x^2(x + 3) + x(x + 3) = 0, \text{ of}$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 9 = 0 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 8 = 0 \Rightarrow (x + 1)^3 + 8 = 0.$$

Dus met $y = x + 1 \Rightarrow y^3 = -8 \therefore p = 0, q = -8$. De oplossing is $y = -2 \Rightarrow x = -3$. Dit is de enige oplossing in reële getallen. Want $x^2(x + 3) + x(x + 3) \Rightarrow (x^2 + 3)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = -3, x^2 = -3$.

De algemene gedaante van de derdegraads vergelijking is:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Voorbeeld:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 9 = 0.$$

$$\text{Omdat } (x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1,$$

kun je de vergelijking schrijven in de vorm:

$$(x + 1)^3 + 8 = 0 \rightarrow (x + 1)^3 = -8 \rightarrow x = -3.$$

Nota bene: Met $a = 0$, heb je weer een tweedegraads vergelijking.

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ kun je delen door a ($a \neq 0$) en dan vind je de *derdegraads vergelijkingen van de gedaante*

$$x^3 + ux^2 + vx + w = 0.$$

Deze vergelijking kun je door substitutie van $x = y - \frac{1}{3}u$

omzetten in de gedaante:

$$y^3 = py + q.$$

Voorbeeld:

$$x^3 - 12x^2 - 4x + 48 = 0$$

$$\text{Stel } x = y + 4$$

De vergelijking gaat over in:

$$(y + 4)^3 - 12(y + 4)^2 - (y + 4)x + 48 = 0 \rightarrow y^3 - 52y - 96 = 0$$

en $y^3 = 52y + 96$

De derdegraads vergelijking $y^3 = py + q$ kun je oplossen met de formule van Cardano:

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}.$$

Dit is de 'a, b, c'-formule voor de derdegraads vergelijkingen.

Nota Bene: wiskundigen hebben bewezen dat er niet een dergelijke formule bestaat voor vergelijkingen van de graad hoger dan 3.

Voorbeeld:

$x^3 = 12x + 20$ kun je oplossen met de vergelijking van Cardano.

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\frac{1}{2}20 + \sqrt{\frac{1}{4}400 - \frac{1}{27}12^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}20 - \sqrt{\frac{1}{4}400 - \frac{1}{27}12^3}} \\ x &= \sqrt[3]{10 + \sqrt{100 - 64}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{100 - 64}} \\ x &= \sqrt[3]{10 + 6} + \sqrt[3]{10 - 6} \\ x &= \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

Opgave 5 § 1 een derdegraads vergelijking

a) Bekijk de vergelijking $x^3 = 12x + 20$.

Met de GR: kun je zien dat de vergelijking $y = x^3 - 12x - 20$, één keer door de x-as gaat. Als je dezelfde vergelijking met de WolframAlpha-app oplost, zie je dat de grafiek één keer door de x-as gaat met één reële wortel: $x = \sqrt[3]{2}(2 + \sqrt[3]{2})$. De twee complexe wortels worden ook gegeven (zie volgend onderwerp: rekenen met wortels uit negatieve getallen).

b) Met de formule van Cardano:

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}, p = 12 \text{ en } q = 20 \Rightarrow x = \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{4} \therefore 1 \text{ wortel.}$$

c) $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$ en $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$.

d) Door $x = \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{4}$ in te vullen in $x^3 = 12x + 20$, zie je dat de oplossing klopt.

- **Rekenen met wortels uit negatieve getallen (Bombelli)**

In het bovenstaande hebben we de negatieve discriminant gememoreerd. We gaan er toch mee leren rekenen. Een nieuwe ontdekkingstocht in de wiskunde.

Want in sommige gevallen levert de formule van Cardano niets op, in andere gevallen wel, maar dan vind je misschien niet alle oplossingen. Om met de formule van Cardano oplossingen van een derdegraads vergelijking te vinden, moet je wortels van negatieve getallen trekken en accepteren dat de vergelijking $x^3 = 1$, meer dan één oplossing heeft. Bombelli kwam op het idee met wortels uit negatieve getallen te rekenen.

Dit laten we zien met onderstaand voorbeeld.

Voorbeeld:

$x^3 - 1 = 0$ kun je ontbinden in: $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$.

Met de a, b, c -formule vind je als formele oplossingen:

$$x = 1; x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}; x = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

Nota bene: in dit geval de a, b, c -formule voor tweedegraads vergelijkingen.

Voorbeeld:

Laat zien dat: $x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ en $x = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$ oplossingen zijn van $x^3 - 1 = 0$.

Uitwerking

$$\begin{aligned} \left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right)^3 &= -\frac{1}{8}(1 + \sqrt{-3})^3 = \\ &= -\frac{1}{8}(1 + 3\sqrt{-3} + 3(\sqrt{-3})^2 + (\sqrt{-3})^3) = \\ &= -\frac{1}{8}(1 + 3\sqrt{-3} - 9 - 3\sqrt{-3}) = 1 \end{aligned}$$

Doe net of $\sqrt{-1}$ bestaat en reken met $\sqrt{-1}$ als getal:

Rekenregels: $(\sqrt{-1})^2 = -1$ en $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$ ($a > 0$).

Een handige schrijfwijze is: $i = \sqrt{-1}$, dan is $i^2 = -1$.

Schrijf $i = \sqrt{-1}$ dan is $i^2 = -1$.

De vergelijking $x^3 - 1 = 0$ heeft drie oplossingen:

- $x = 1$
- $x = \frac{-1 + \sqrt{3} \cdot i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$
- $x = \frac{-1 - \sqrt{3} \cdot i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$

• Complexe getallen

$\mathbb{C}$ is de verzameling complexe getallen.

Dat zijn getallen $z = a + bi$ met a en b reële getallen.

Rekenregels:

$$-(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$-(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Voorbeelden:

Voorbeelden:

- $(1 + 2i) + (3 + 4i) = 1 + 3 + 2i + 4i = 4 + 6i$
- $(1 + i) \cdot (1 - i) = 1 - i + i - i \cdot i = 1 + 1 = 2$
- $(2 + i)^2 = (2 + i) \cdot (2 + i) = 4 + 2i + 2i + i \cdot i = 3 + 4i$

Een informatieve exercitie is: bepaal de oplossingen van $z^3 = -8$, waarbij z een complex getal is. Je kan de oplossingen proberen te vinden door trial en error, maar dan moet je wel geluk hebben en/of veel ervaring om de oplossing(en) te vinden. Door voor de algemene aanpak te kiezen zie je een aantal belangrijke aspecten van complexe getallen.

Laten we beginnen. Stel $z = a + bi$ met a en b reële getallen.

Substitueer de uitdrukking voor z in $z^3 = -8$ (zie ook **Opgave 11 § 1**)

Je vindt een derde graads-complexe vergelijking in a en b :

$$a^3 + 3a^2ib + 3a(ib)^2 + (ib)^3 = -8.$$

$$\text{Verder uitwerking geeft: } a^3 + 3a^2ib - 3a(b)^2 - i(b)^3 = -8.$$

Voor de duidelijkheid voegen we het reële deel en het imaginaire deel apart samen:

$$a^3 - 3a(b)^2 + i(3a^2b - b^3) = -8. \quad (1)$$

Door deze opsplitsing wordt de volgende stap duidelijk:

in het rechterlid van (1) staat een reëel getal en geen imaginair getal. Hierdoor ontstaan de volgende twee gelijkheden:

$$a^3 - 3a(b)^2 = -8, \quad (2)$$

$$i(3a^2b - b^3) = 0, \text{ dus } 3a^2b - b^3 = 0. \quad (3)$$

De meest interessante vergelijking om mee te beginnen is:

$$3a^2b - b^3 = 0 \text{ ook te schrijven als } b(3a^2 - b^2) = 0. \quad (4)$$

In (4) kun je namelijk direct een oplossing vinden en wel $b = 0$ of $3a^2 - b^2 = 0$.

We beginnen met $b = 0$. Substitueer $b = 0$ in (2) en je vindt $a^3 = -8$, dus $a = -2$.

Op deze wijze heb je een oplossing van $z^3 = -8$ gevonden en wel

$$z_1 = -2.$$

Dat zie je natuurlijk direct al, maar je wilt ook nog nagaan of er andere oplossingen zijn en dan moet je voor de algemene benadering kiezen.

Nu kiezen we in (4) $b \neq 0$ en dan moet $3a^2 - b^2 = 0$ zijn. Deze laatste uitdrukking resulteert in $b = \pm a\sqrt{3}$. Nu gaat het er op lijken dat we nog 2 oplossingen vinden.

Daartoe hebben we weer (2) nodig. Die vergelijking kunnen we nog nader onderzoeken met $b = \pm a\sqrt{3}$. Substitueer $b = \pm a\sqrt{3}$ in (2) en je vindt $a^3 = 1$. Dus $a = 1$. Met als resultaat dat je nu de eerder genoemde mogelijke twee wortels hebt gevonden en wel:

$$z_2 = a + ib = 1 + i\sqrt{3},$$

en

$$z_3 = a + ib = 1 - i\sqrt{3}.$$

Een mooi resultaat: een reële wortel en twee complexe wortels:

$$z_1 = -2,$$

$$z_2 = 1 + i\sqrt{3},$$

$$z_3 = 1 - i\sqrt{3}.$$

Vooruitlopend op Les 2 van Blok 9.

Er valt nog iets op (zie samenvatting Les 2-het complexe vlak):

De hoek van z_1 met de reële as is π .

De hoek van z_2 met de reële as is $\frac{1}{3}\pi$.

De hoek van z_3 met de reële as is $-\frac{1}{3}\pi$ of (en dat is hetzelfde) $\frac{5}{3}\pi$.

Als je naar de argumenten van $z^3 = -8$ kijkt, verdelen deze argumenten 2π in 3 gelijke delen van $\frac{2}{3}\pi$.

Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.

Opgave 4 § 1 Cardano

a) Wat vind je bij de vergelijking $x^3 = 52x + 96$, met de formule van Cardano?

$$p = 52 \text{ en } q = 96$$

$$\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3 < 0.$$

b) Bekijk de functie $f(x) = x^3 - 52x - 96$.

Je kunt $f(x)$ zo groot krijgen als je wil, door x groot genoeg te kiezen $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Verder: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Als $x \rightarrow \infty$ of $x \rightarrow -\infty$, dan domineert de term x^3 in $x^3 - 52x - 96$.

c) Teken de grafiek met je GR of met de WolframAlpha app. De grafiek van f ligt ver naar links onder de x -as en ver naar rechts erboven. Onontkoombaar, ergens moet de grafiek door de x -as gaan.

d) Bekijk de functie $g(x) = -2x^3 + 1000x^2 + 100x + 9$.

Nu domineert de term $-2x^3$. De grafiek van g ligt ver naar links boven de x -as: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty$, en ver naar rechts onder de x -as: $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$.

Opgave 6, § 1:

Gegeven is de vergelijking $x^3 = 9x + 28$.

a) Bereken een oplossing met de formule van Cardano.

De derdegraads vergelijking $y^3 = py + q$ kun je oplossen met de formule van Cardano:

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}.$$

$$p = 9 \text{ en } q = 28 \Rightarrow \frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3 = 196 - 27 = 169.$$

$$x = \sqrt[3]{14 + 13} + \sqrt[3]{14 - 13} = 3 + 1 = 4.$$

b) Heeft de vergelijking nog andere oplossingen?

Door eerst de vergelijking te herschrijven zie je wat de mogelijkheden zijn:

$$x^3 = 9x + 28 \Rightarrow x^3 - 9x - 28 = (x - 4)(x^2 + 4x + 7) = 0, \text{ vind je direct de wortel } x = 4. \text{ De vergelijking } (x^2 + 4x + 7) = 0, \text{ laat zien dat er nog twee complexe wortels zijn.}$$

Teken de functie: $y = x^3 - 9x - 28$, met de grafische rekenmachine en krijg je het vermoeden dat de grafiek maar één keer de x -as snijdt. Ik heb de grafiek getekend met WolframAlpha en je vindt 1 snijpunt met de x -as.

Dat er maar 1 snijpunt met de x -as is, is direct duidelijk uit $(x - 4)(x^2 + 4x + 7) = 0$.

Is een dergelijke schrijfwijze niet altijd mogelijk, dan analyseer je de functie op de volgende wijze. Met de afgeleide van:

$y = x^3 - 9x - 28 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 9 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$. Op deze wijze vindt je de maxima en de minima van de functie: $x = \sqrt{3} \Rightarrow y = 6\sqrt{3} - 28$, $x = -\sqrt{3} \Rightarrow y = -12\sqrt{3} - 28 \therefore$ een maximum voor $y = 6\sqrt{3} - 28 < 0$ en een minimum, voor $y = -12\sqrt{3} - 28 < 0$.

Verder:

$x < -\sqrt{3}: \frac{dy}{dx} > 0$, stijgende functie en $y < 0$; $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}: \frac{dy}{dx} < 0$, en $y < 0$ dalende functie;

$x > \sqrt{3}: \frac{dy}{dx} > 0$, stijgende functie en y kan groter dan 0 worden. Dus de grafiek kan slechts 1 keer door de x -as gaan.

Opgave 7 § 1

a) Controleer, rekenend met Bombelli, dat $1 - \sqrt{-1}$ een oplossing van de vergelijking $x^2 - 2x + 2 = 0$, is.

$$\text{Dus: } (1 - \sqrt{-1})^2 - 2(1 - \sqrt{-1}) + 2 = 1 - 2\sqrt{-1} + (-1) - 2 + 2\sqrt{-1} + 2 = 0.$$

b) Laat, rekenend als Bombelli, zien dat $\sqrt[3]{-1 + \sqrt{-7}} \cdot \sqrt[3]{-1 - \sqrt{-7}} = 2$.

$$\sqrt[3]{-1 + \sqrt{-7}} \cdot \sqrt[3]{-1 - \sqrt{-7}} = \sqrt[3]{1 - (\sqrt{-7})^2} = \sqrt[3]{1 - (-7)} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

c) Bekijk de vergelijking $x^3 = 6x - 2$. Met Cardano: $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$, en

$$p = 6 \text{ en } q = -2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{-7}} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{-7}}.$$

d) Controleer, rekenend als Bombelli, dat het antwoord uit c) aan de vergelijking $x^3 = 6x - 2$ voldoet.

We moeten x^3 uit rekenen. Met Cardano: $x = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{-7}} (\equiv a) + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{-7}} (\equiv b)$.

$$x = a + b \Rightarrow x^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$6x = 6(a + b).$$

Dus

$$a^3 = -1 + \sqrt{-7},$$

$$b^3 = -1 - \sqrt{-7},$$

$$3a^2b = 3(\sqrt[3]{-1 + \sqrt{-7}})^2 \cdot \sqrt[3]{-1 - \sqrt{-7}},$$

$$3ab^2 = 3\sqrt[3]{-1 + \sqrt{-7}} \cdot (\sqrt[3]{-1 - \sqrt{-7}})^2.$$

We hebben: $x^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = -1 + \sqrt{-7} + 3(\sqrt[3]{-1 + \sqrt{-7}})^2 \cdot \sqrt[3]{-1 - \sqrt{-7}} +$

$$3\sqrt[3]{-1 + \sqrt{-7}} \cdot (\sqrt[3]{-1 - \sqrt{-7}})^2 - 1 - \sqrt{-7} = -2 + 3\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{-1 + \sqrt{-7}} + 3\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{-1 - \sqrt{-7}} =$$

$$= -2 + 6(\sqrt[3]{-1 + \sqrt{-7}} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{-7}}) = -2 + 6x.$$

Opgelet, we hebben gebruik gemaakt van:

$$(\sqrt[3]{-1 + \sqrt{-7}})^2 \cdot \sqrt[3]{-1 - \sqrt{-7}} = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{-7}} \cdot \sqrt[3]{-1 + \sqrt{-7}} \cdot \sqrt[3]{-1 - \sqrt{-7}} = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{-7}} \cdot \sqrt[3]{8},$$

en

$$\sqrt[3]{-1 + \sqrt{-7}} \cdot (\sqrt[3]{-1 - \sqrt{-7}})^2 = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{-7}} \cdot \sqrt[3]{-1 - \sqrt{-7}} \cdot \sqrt[3]{-1 - \sqrt{-7}} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{-1 - \sqrt{-7}}.$$

Opgave 8 § 1

$$x = 2 + 3i, \text{ en } y = 1 - 4i.$$

Bereken $x + y$:

$$x + y = 2 + 3i + 1 - 4i = 3 - i.$$

Bereken $x \cdot y$.

$$x \cdot y = (2 + 3i) \cdot ((1 - 4i)) = 2 \cdot 1 + 3i \cdot 1 - 2 \cdot 4i - 3i \cdot 4i = 2 + 3i - 8i + 12 = 14 - 5i.$$

In $\mathbb{C}$ gedraagt de optelling en vermenigvuldiging zich net zoals in $\mathbb{R}$. Zo geldt bijvoorbeeld de distributieve wet:

$z \cdot (w + u) = z \cdot w + z \cdot u$. Dat deze rekenregel geldt zie je door uitschrijven. Voor complexe variabelen gebruiken we vaak de letters z en w , enz., in plaats van x en y , die we meestal voor reële variabelen gebruiken.

In het bijzonder gelden de zogenaamde merkwaardige (=opmerkwaaardig) producten voor complexe getallen:

$$(z + w)^2 = z^2 + 2zw + w^2,$$

$$(z - w)^2 = z^2 - 2zw + w^2,$$

$$(z + w)(z - w) = z^2 - w^2.$$

Dat bijvoorbeeld $(z + w)^2 = z^2 + 2zw + w^2$, volgt uit de distributieve wet als volgt:

$$(z + w)^2 = (z + w)(z + w) = (z + w)z + (z + w)w = z^2 + wz + zw + w^2 = z^2 + 2zw + w^2.$$

Opgave 9 § 1

a) Als oefening kun je nog eens nagaan of de vermenigvuldigingen van opgave 8 in overeenstemming zijn met de merkwaardige producten.

b) Schrijf de volgende uitdrukkingen in de vorm: $a + ib$.

$$-(2i)^3 = -8i; 2i^3 - 2i; i^{10} = (i^2)^5 = -1.$$

$$-(1 + i)(1 - i) = 2; (2 + i)^2 = 3 + 4i; (2 + i)(1 - 2i) = 4 - 3i.$$

$$-(4 + 3i)(4 - 3i) = 25; (1 + i)^2 = 2i; (1 + i)^3 = -2 + 2i.$$

c) Geef twee complexe getallen waarvan het kwadraat -4 is.

$$(a + ib)^2 = -4 \therefore (a + ib) = \pm 2i \therefore b = \pm 2.$$

d) Bereken $z \cdot 1$.

$$z \cdot 1 = (a + ib) \cdot 1 = a + ib = z.$$

Opgave 10 § 1

De wortelformule voor het oplossen van kwadratische vergelijkingen volgt uit kwadraat afsplitsen. Dat gaat ook met complexe getallen.

We bekijken de vergelijking $z^2 - 2z + 2 = 0$.

a) $z^2 - 2z + 2 = 0$ anders geschreven: $z^2 - 2z + 1 = -1 \Rightarrow (z - 1)^2 = -1$

b) $(z - 1)^2 = -1 \therefore (z - 1) = \pm i \therefore z = 1 + i$, en $z = 1 - i$.

c) Zoek twee oplossingen in $\mathbb{C}$ voor de volgende vergelijkingen. Schrijf de oplossingen in de vorm $a + ib$.

- $(z - 3)^2 = -25 : z = 3 \pm 5i$.

- $z^2 - 10z + 29 = 0 \Rightarrow z^2 - 10z + 25 + 4 = 0 \Rightarrow (z - 5)^2 = -4 : z = 5 \pm 2i$.

- $z^2 - 10z + 27 = 0 \Rightarrow z^2 - 10z + 25 + 2 = 0 \Rightarrow (z - 5)^2 = -2 : z = 5 \pm i\sqrt{2}$.

- $z^2 - 2iz + 3 = 0 \Rightarrow z^2 - 2iz - 1 + 4 = 0 \Rightarrow (z - i)^2 = -4 : z = i \pm 2i \Rightarrow z = 3i, z = -i$.

De oplossingen, die hier gevonden zijn de oplossingen van de kwadratische vergelijkingen, kun je ook met de wortel formule vinden.

Dus $z^2 - 2iz + 3 = 0$:

$$z = \frac{2i \pm \sqrt{(-2i)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{2i \pm \sqrt{-4 - 12}}{2} = \frac{2i \pm 4i}{2} = i \pm 2i.$$

Opgave 11 § 1

a) Bereken $(1 + i\sqrt{3})^3$ en $(1 - i\sqrt{3})^3$.

Ten overvloede: gebruik het binomium van Newton:

- $(1 + i\sqrt{3})^3 = 1 + 3i\sqrt{3} + 3(i\sqrt{3})^2 + (i\sqrt{3})^3 = 1 + 3i\sqrt{3} - 9 - 3i\sqrt{3} = -8$.

- $(1 - i\sqrt{3})^3 = 1 - 3i\sqrt{3} + 3(i\sqrt{3})^2 - (i\sqrt{3})^3 = 1 - 3i\sqrt{3} - 9 + 3i\sqrt{3} = -8$.

b) Geef drie verschillende complexe oplossingen van de vergelijking $z^3 = -8$.

De eerste en eenvoudige is: $z_1 = -2$.

Maar uit a) weten we al dat $1 \pm i\sqrt{3}$ oplossingen zijn van $z^3 = -8$.

Stel we weten a) niet. We kiezen dan de algemene aanpak:

$z = a + ib$.

Substitueer $z = a + ib$ in $z^3 = -8 \Rightarrow a^3 + 3a^2ib + 3a(ib)^2 + (ib)^3 = -8$.

De reële delen en imaginaire delen in het linker lid van de vergelijking gelijk stellen aan die in het rechter lid:

- $a^3 - 3a(b)^2 = -8$,

- $i(3a^2b - b^3) = 0$.

$i(3a^2b - b^3) = 0 \Rightarrow b = 0$, of $3a^2 - b^2 = 0$.

$b = 0$, substitueren in $a^3 - 3a(b)^2 = -8 \Rightarrow a^3 = -8 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow z = -2$.

$b \neq 0, 3a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow b = \pm a\sqrt{3}$.

Substitueer $b = \pm a\sqrt{3}$ in $a^3 - 3a(b)^2 = -8 \Rightarrow -8a^3 = -8 \Rightarrow a = 1$.

Met dit resultaat hebben we de ingrediënten voor de andere twee wortels:

$z = a + ib = 1 \pm i\sqrt{3}$.

c) Bereken $(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3})^3$ en $(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3})^3$.

$(-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3})^3 = -\frac{1}{8} \cdot (1 \mp i\sqrt{3})^3$.

bij a) hebben we $(1 \mp i\sqrt{3})^3 = -8$, al uitgerekend.

Dus, $-\frac{1}{8} \cdot (1 \mp i\sqrt{3})^3 = 1$.

d) Van welke derdegraads vergelijking zijn $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3}$, oplossingen?

We weten al dat $(1 \pm i\sqrt{3})^3 = -8 \Rightarrow -\frac{1}{8} \cdot (1 \mp i\sqrt{3})^3 = 1$.

Dus $-\frac{1}{2} \cdot (1 \mp i\sqrt{3})$, zijn de wortels van $z^3 = 1$.

Welke zijn dan de drie oplossingen van $z^3 = 8$?

De eenvoudige: $z_1 = 2$.

De andere twee wortels volgen uit het voorafgaande: $z_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}$.

Ook hier geldt weer dat je de oplossingen vindt door substitutie van $z = a + ib$, in $z^3 = 8$.

Opgave 12, § 1

We bekijken de vergelijking $z^3 = 6z + 4$.

a) De vorm van deze vergelijking doet denken aan Cardano. Laten we eens kijken:

$$z = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}},$$

$$p = 6 \text{ en } q = 4 \Rightarrow z = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 8}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 8}} = \sqrt[3]{2 + 2i} + \sqrt[3]{2 - 2i}.$$

b) Een volgende stap:

$$(-1 + i)^3 = -1 + 3i - 3i^2 + i^3 = 2 - 2i,$$

en

$$(-1 - i)^3 = -1 - 3i - 3i^2 - i^3 = 2 + 2i.$$

$$\text{Substitueer deze resultaten in } z = \sqrt[3]{2 + 2i} + \sqrt[3]{2 - 2i} = \sqrt[3]{(-1 - i)^3} + \sqrt[3]{(-1 + i)^3} = -2.$$

Oefenen: De opgaven van § 1

Blok 9 Les 2 Het complexe vlak, the Geometrical Representation and the Argand Diagram

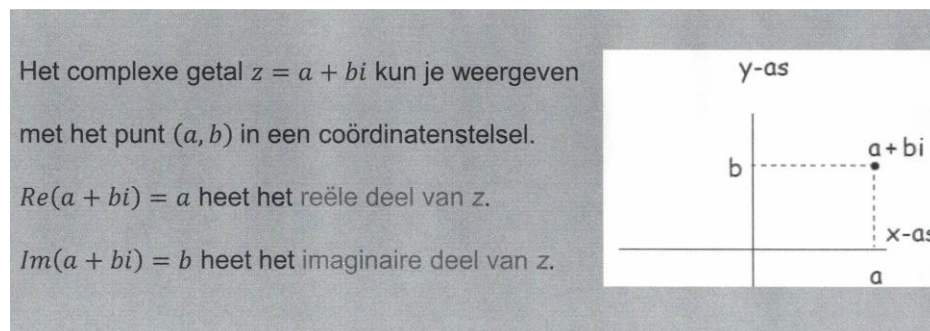
Deze les sluit aan bij paragraaf 2 tot blz 13 van Inleiding Complexe Getallen van de Wageningse Methode 2009

- Van complex getal naar het complexe vlak.

De verzameling van de reële getallen stellen we ons voor op een getallenlijn. Bij elk punt van de getallenlijn hoort een reëel getal en omgekeerd.

Een complex getal kunnen we representeren in het platte vlak, 2-dimensionaal.

Om de complexe getallen voor te stellen, gebruiken we het platte vlak waarin een assenstelsel is gekozen. Zie onderstaande figuren.



We kunnen de verzameling van de reële getallen opvatten als een deel van de complexe getallen: het zijn namelijk de getallen $z = a + ib$, met $b = 0$.

Opgave 1 § 2 Representatie in het complexe vlak van de volgende verzamelingen.

a) De getallen z met $\text{Re}(z)=0$:

Dit is de y -as.

b) De getallen z met $\text{Im}(z)=2$:

Een lijn evenwijdig met de x -as en $y=2$.

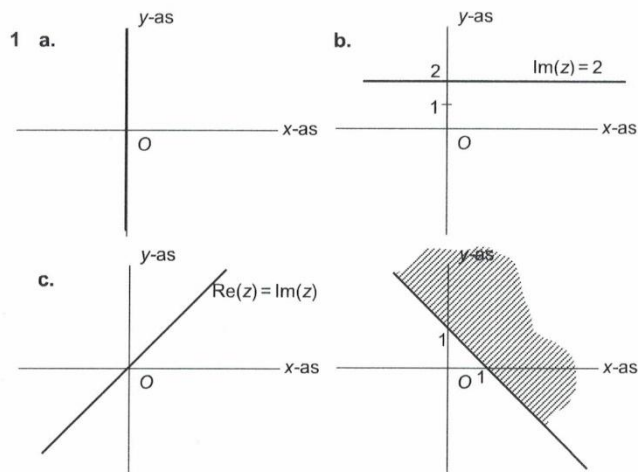
c) De getallen z met $\text{Re}(z)=\text{Im}(z)$:

Een lijn onder een hoek van $\pi/4$, met de x -as door de oorsprong.

d) De getallen z met $\text{Re}(z)+\text{Im}(z)>1$:

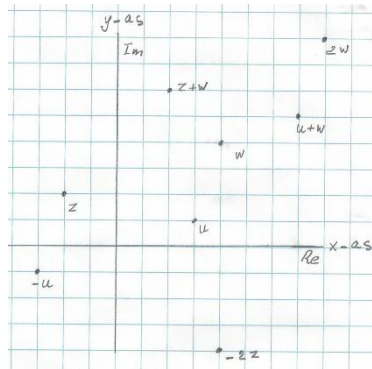
Het gebied waar deze getallen liggen, ligt boven de lijn door $x=1$ en $y=1$.

Zie voor de representatie onderstaande figuur.



Opgave 2 §2 Het complexe vlak:

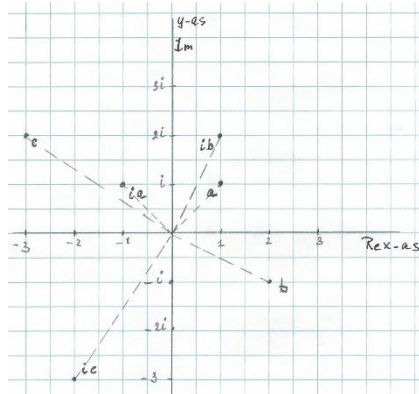
In onderstaand complexe vlak zijn, o.a., de getallen z , w en u aangegeven.



a) Ook zijn de getallen $-u$, $u + w$, $z + w$, $2w$, $-2z$, weergegeven.

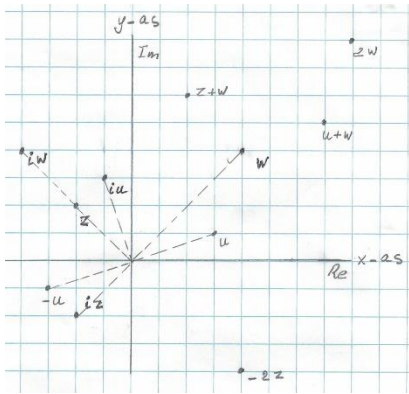
b) Vermenigvuldigen gaat wat moeilijker.

In onderstaand complexe vlak zijn de getallen $a = 1 + i$, $b = 2 - i$, en $c = -3 + 2i$, weergegeven. Daarbij zijn ook de punten $i \cdot a$, $i \cdot b$ en $i \cdot c$, ingetekend.

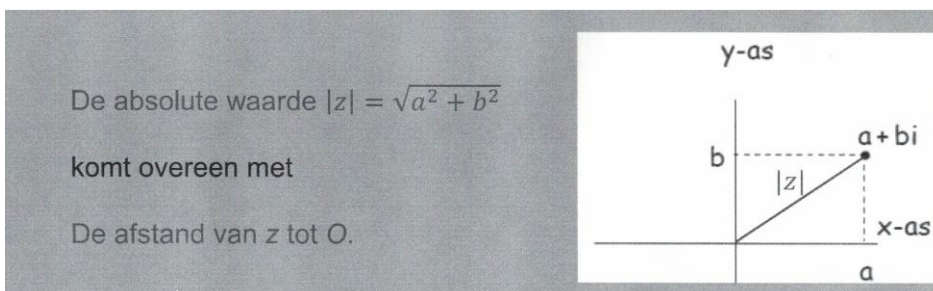
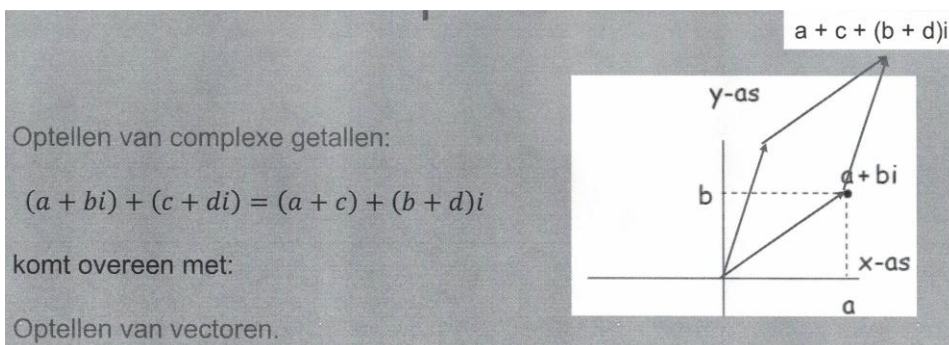


Wat opvalt is dat vermenigvuldigen met i in het complexe vlak draaien over 90° tegen de klok in om de oorsprong van het coördinatenstelsel is.

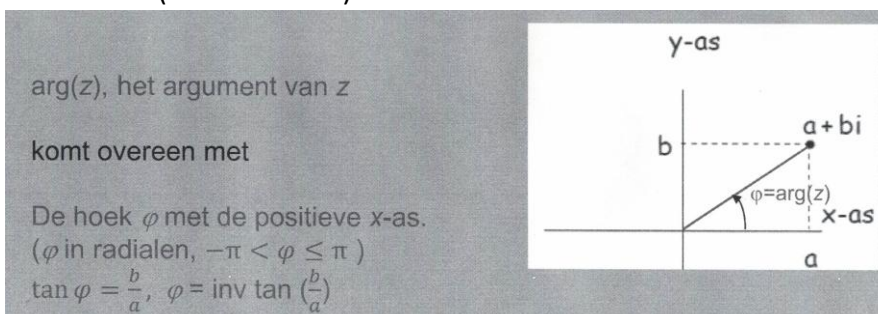
c) In onderstaand complex vlak zijn nu ook iz , iw en iu , weergegeven.



We zullen in het vervolg van de les vermenigvuldigen met een complex getal in het complexe vlak algemener bekijken. Wel merken we hier opdat de complexe getallen zich bij vermenigvuldiging net zo gedragen als reële getallen.



De complexe getallen gedragen zich, met de hierboven gedefinieerde optelling net als de reële getallen. Twee complexe getallen optellen gaat in het complexe vlak 'vectorieel' (zie hierboven).



Nog enkele begrippen:

- neutraal getal voor de optelling $\Rightarrow 0$.
- neutraal getal voor de vermenigvuldiging $\Rightarrow 1$.
- tegengestelde van $z \Rightarrow -z$, opgeteld geven z en de tegengestelde, $z + -z$, samen 0 .

- elk getal $z \neq 0$ heeft een omgekeerde(inverse): dat is het complexe getal waarvan het product met z gelijk is aan 1. Notatie: z^{-1} . Dus $z \cdot z^{-1} = 1$.

Opgave 3, § 2

Gegeven $z = -2 - 2i$, $w = 1 - i\sqrt{3}$ en $u = -10$.

a) Bereken de afstanden van z , w , en u , tot the oorsprong van het coördinaten stelsel.

De algemene uitdrukking voor de afstand is: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, met $z = a + ib$.

$$- z = -2 - 2i \Rightarrow |z| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}.$$

$$- w = 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow |w| = \sqrt{1 + 3} = 2.$$

$$- u = -10 \Rightarrow |u| = \sqrt{10^2} = 10.$$

b) Bereken de hoeken die de drie vectoren, genoemd onder a), met de positieve reële x-as maken. Met de positieve reële as wordt de halve lijn bedoeld waarop de getallen z met $\text{Im}(z)=0$ en $\text{Re}(z)>0$ liggen.

- $z = -2 - 2i$. Deze vector ligt in het derde kwadrant. Als je een tekening maakt zie je dat deze vector een hoek van 45° maakt met de negatieve x-as. De hoek die de vector met de positieve x-as maakt is dan: $180^\circ + 45^\circ = 225^\circ \Rightarrow \frac{5}{4}\pi$.

- $w = 1 - i\sqrt{3}$. Deze hoek ligt in het vierde kwadrant. Als je weer een tekening maakt zie je dat de vector, in het vierde kwadrant, een hoek van 30° maakt met de negatieve y-as. De hoek die de vector met de positieve x-as maakt is dan: $270^\circ + 30^\circ = 300^\circ \Rightarrow \frac{5}{3}\pi$.

- $u = -10$. Hier weet je direct dat deze vector langs de negatieve x-as ligt. De hoek die de vector met de positieve x-as maakt is dan $180^\circ \Rightarrow \pi$.

c) Bereken, in radialen, de hoek die de vector $2 - 3i$ met de positieve reële as, de x-as, maakt in één decimaal nauwkeurig.

De vector ligt in het vierde kwadrant. De tangens van de hoek, in het vierde kwadrant, met de positieve x-as is $\frac{3}{2}$. Deze hoek is dus $\text{invtan}(\frac{3}{2})$ of ook geschreven als $\tan^{-1}\frac{3}{2}$.

De hoek van de vector met de positieve x-as, gerekend vanuit het eerste kwadrant is dan:

$$2\pi - \tan^{-1}\frac{3}{2} = 5.3 \text{ radialen.}$$

Note: We weten u dat: $|-2 - 2i| = 2\sqrt{2}$, en $\arg(-2 - 2i) = \frac{5}{4}\pi$. Je zou ook kunnen zeggen: $\arg(-2 - 2i) = -\frac{3}{4}\pi$, misschien zelfs $\arg(-2 - 2i) = \frac{13}{4}\pi$. Maar, we zijn eigenlijk alleen maar geïnteresseerd in het antwoord op een veelvoud van 2π na. Indien nodig, kiezen we $\arg(z)$ zo, dat $-\pi < \arg(z) \leq \pi$.

Opgave 4, § 2:

Wat kun je zeggen over $\arg(z)$ als:

a) $\text{Re}(z)=\text{Im}(z)$?

$$z = a + ib \Rightarrow a = b \Rightarrow \arg(z) = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ en } -a = -b \Rightarrow \arg(z) = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}.$$

b) $\text{Im}(z)=\sqrt{3} \cdot \text{Re}(z)$?

$$b = \sqrt{3}a \text{ of } -b = -\sqrt{3}a.$$

$$\tan \varphi = \sqrt{3} \Rightarrow \arg(z) = \frac{1}{3}\pi \text{ of } \arg(z) = \frac{4}{3}\pi.$$

c) Welke punten z in het complexe vlak voldoen aan $|z| = 4$ en $\arg(z) = \varphi = \frac{5}{6}\pi$?

$$z = a + ib, |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow 4 = a\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = a\sqrt{1 + \tan^2 \varphi} = a\sqrt{1 + \left(\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}\right)^2} = \frac{a}{\cos \varphi} \Rightarrow \frac{a}{\cos \frac{5}{6}\pi} \Rightarrow \\ \Rightarrow a = 4 \cos \frac{5}{6}\pi = -2\sqrt{3} \Rightarrow b = 2 \therefore z = -2\sqrt{3} + 2i.$$

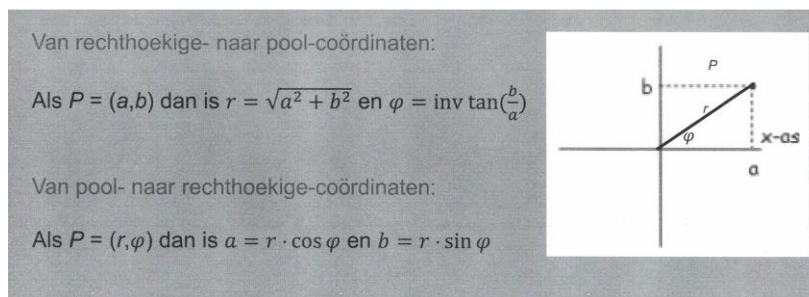
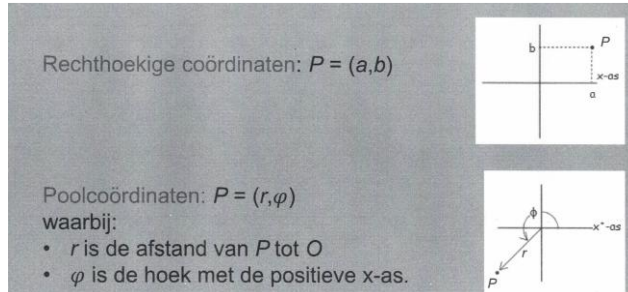
d) Geef het exacte reële en imaginaire deel van z als $|z| = 2$ en $\arg(z) = \frac{4\pi}{3}$.

$$\text{Gelet op het resultaat onder c), } a = |z| \cdot \cos \frac{4\pi}{3} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

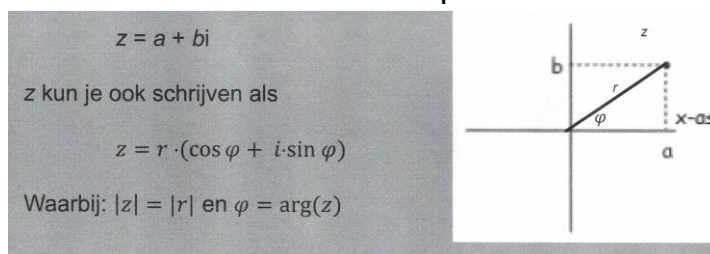
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow z = b \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1} = \frac{b}{\sin \frac{4\pi}{3}} \Rightarrow b = 2 \sin \frac{4\pi}{3} = -2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} = -\sqrt{3}.$$

$$z = -1 - i\sqrt{3}.$$

- Poolcoördinaten

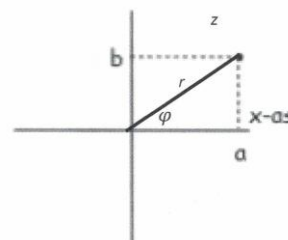


- Poolcoördinaten en het complexe vlak



Voorbeelden

- $1 + i = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4}))$
- $-1 - i = \sqrt{2}(-\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i \cdot \sin(-\frac{3\pi}{4}))$
- $\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i = \cos(\frac{\pi}{6}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{6})$



Bovenstaand screenshot bij het tweede bulletpoint: $-1 - i = \sqrt{2}[-\cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4}]$.

$$v = i + i, w = -1 - i.$$

$$|v| = |1 + i| = \sqrt{2}, \text{ en } |w| = |-1 - i| = \sqrt{2}.$$

$$\arg(v) = \frac{\pi}{4}, \text{ en } \arg(w) = \frac{3\pi}{4}.$$

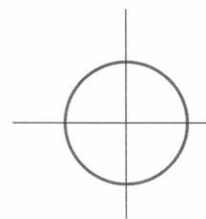
- Figuren in het complexe vlak

Teken de punten z met

- $|z| = 1$

Uitwerking

- Alle punten z met afstand 1 tot $O \rightarrow$ de eenheidscirkel.

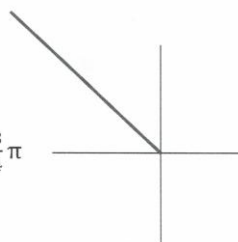


Teken de punten z met

- $\arg(z) = \frac{3}{4}\pi$

Uitwerking

- Alle punten z op de halflijn door O die een hoek $\frac{3}{4}\pi$ met de positieve x -as maakt



Teken de punten z met $\arg(z) = \frac{1}{2}\pi \cdot |z|$

Uitwerking

Probeer een aantal voorbeelden.

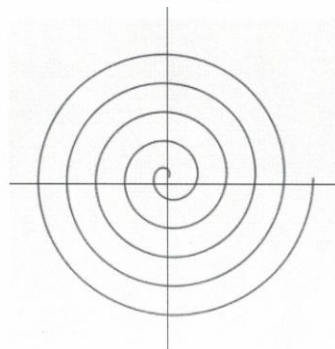
$$|z| = 1 \rightarrow \arg(z) = \frac{1}{2}\pi \rightarrow z = i$$

$$|z| = 2 \rightarrow \arg(z) = \pi \rightarrow z = -2$$

$$|z| = 3 \rightarrow \arg(z) = \frac{3}{2}\pi \rightarrow z = -3i$$

$$|z| = 4 \rightarrow \arg(z) = 2\pi \rightarrow z = 4$$

De punten liggen op een spiraal.



- Vermenigvuldigen

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)i$$

En met poolcoördinaten:

$$(r \cdot \cos \alpha + r \cdot i \cdot \sin \alpha) \cdot (s \cdot \cos \beta + s \cdot i \cdot \sin \beta) =$$

$$= r \cdot s \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta + r \cdot s \cdot i \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta + r \cdot s \cdot i \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta + r \cdot s \cdot i \cdot i \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$= r \cdot s \cdot (\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta) + r \cdot s \cdot i \cdot (\cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta)$$

Volgens de somformules uit de gonio geldt:

$$(\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta) = \cos (\alpha + \beta)$$

en: $(\cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta) = \sin (\alpha + \beta)$

Dus:

$$\begin{aligned}(r \cdot \cos \alpha + r \cdot \sin \alpha \cdot i) \cdot (s \cdot \cos \beta + s \cdot \sin \beta \cdot i) &= \\ &= r \cdot s \cdot (\cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + \beta) \cdot i)\end{aligned}$$

Stel $v = r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$ en $w = s \cdot (\cos \beta + i \cdot \sin \beta)$

Dan is

$$|v \cdot w| = |r \cdot s| = |r| \cdot |s| = |v| \cdot |w|$$

en $\arg(v \cdot w) = \alpha + \beta = \arg v + \arg w$ op een veelvoud van 2π na.

Voorbeeld

$$v = 1 + i \text{ en } w = 1 - i$$

$$\rightarrow |v| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \text{ en } |w| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\rightarrow \arg(v) = \frac{\pi}{4} \text{ en } \arg(w) = -\frac{\pi}{4}$$

$$v \cdot w = 2 \text{ (zie vorig voorbeeld)}$$

$$\rightarrow |v \cdot w| = 2 = |v| \cdot |w|$$

$$\rightarrow \arg(v \cdot w) = \arg(2) = 0 = \arg(v) + \arg(w)$$

Bij het oplossen van vergelijkingen in $\mathbb{C}$ wordt de volgende regel gebruikt:

als $z \cdot w = 0$, dan is $z = 0$, of $w = 0$.

Want als $z \neq 0$, dan $z^{-1} \cdot z \cdot w = 0 \Rightarrow 1 \cdot w = 0, \therefore w = 0$.

Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.

Opgave 7 § 2

a) In de tekst hierboven is onder het bulletpoint het resultaat van de vermenigvuldiging van twee complexe getallen gegeven. Stel nu dat de absolute waarde van de twee vectoren gelijk is aan 1, dat wil zeggen de vectoren zijn unitair. Laat zien dat het product van twee unitaire getallen weer unitair is. We hebben:

$$\vec{z} = r(\cos \alpha + i \sin \alpha), \text{ en } \vec{w} = s(\cos \beta + i \sin \beta).$$

Dus $|\vec{z}| = r\sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = r$, unitair wil zeggen $|\vec{z}| = r = 1$. Evenzo: $|\vec{w}| = s = 1$.

Het product van de twee vectoren is hierboven afgeleid:

$$\vec{z} \cdot \vec{w} = r \cdot s[\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)] \Rightarrow |\vec{z} \cdot \vec{w}| = r \cdot s\sqrt{\cos^2(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha + \beta)} = r \cdot s = 1.$$

Conclusie: het product van twee unitaire getallen is unitair. Ik heb de vector notatie gebruikt. Dat is niet nodig.

b) Wat is het verband tussen $|z|^2$ en $|z^2|$?

Het ligt voor de hand dat $|z|^2 = |z^2|$. Maar is dat ook zo?

Stel $z = a + ib$.

$$- |z|^2 = (a - ib)(a + ib) = a^2 + b^2.$$

$$- |z^2|: z \cdot z = z^2 = (a + ib) \cdot (a + ib) = a^2 - b^2 + i2ab.$$

$$|z^2| = \sqrt{(a^2 - b^2 - i2ab)(a^2 - b^2 + i2ab)} = \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)^2} = a^2 + b^2.$$

Dus: $|z|^2 = |z^2|$.

c) Wat is het verband tussen $\arg(z^2)$ en $\arg(z)$?

Laten we met poolcoördinaten werken.

We weten $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, waarbij α , de hoek is tussen de positieve reële as en r .

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

$$z^2 = r^2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + i2 \sin \alpha \cos \alpha).$$

De tangens van de hoek, β , tussen de positieve reële as en r^2 is

$$\tan \beta = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

Met als resultaat: $\beta = 2\alpha \Rightarrow \arg(z^2) = 2\arg(z)$.

d) Wat kun je van z zeggen als $|z \cdot w| = |w|$, voor elk complex getal w ?

$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| = |w| \therefore |z| = 1$, en z is unitair.

e) Voor welke getallen z geldt: $|z \cdot w| = z \cdot |w|$, voor elk complex getal w ?

Dit geldt voor het triviale geval $z = 0$, of het geldt voor $|z| = z$ is positief reëel.

En voor welke getallen z geldt: $|z \cdot w| = -z \cdot |w|$, voor elk complex getal w ?

Dit geldt voor het triviale geval $z = 0$, of het geldt voor $|z| = -z$ is negatief reëel.

f) Vermenigvuldigen met i in het complexe vlak betekent een draaiing over 90° in het complexe vlak tegen de wijzers van de klok in.

Hoe volgt dit uit de regels $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, en $\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$?

Neem $w = i$: $|z \cdot i| = |z| \cdot |i| = |z|$, want $|i| = 1$. Verder: $\arg(z \cdot i) = \arg(z) + \arg(i) = \arg(z) + \frac{\pi}{2}$.

Opgave 8 § 2

De vergelijking $z^3 = 1$:

a) Laat zien dat z , unitair is.

$$|z|^3 = 1 \Rightarrow |z| = 1^{\frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow \text{unitair}.$$

b) Uit $|z|^3$, volgt dat $3 \cdot \arg(z)$ op een veelvoud van 2π na, gelijk is aan 0.

$$z^3 - 1 = 0 \Rightarrow (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0 \Rightarrow (z - 1) \left[\left(z + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right] = 0.$$

De wortels zijn: $z_1 = 1$ en $\arg(z_1) = 0$, $z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\arg(z_2) = \frac{2\pi}{3}$, en $\arg(z_3) = \frac{4\pi}{3}$.

Dus $\arg(z_1) + \arg(z_2) + \arg(z_3) = 2\pi$, dus 0 op 2π na.

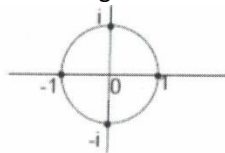
Of: $\arg(z^3) = \arg(z) + \arg(z) + \arg(z) = \arg(1) = 0$, op 2π na.

c) Onder b) zijn tevens de drie complexe getallen als oplossing van $z^3 = 1$, uitgerekend.

d) De oplossingen van $z^4 = 1$.

De oplossingen $z^4 = 1 \Rightarrow z^4 - 1 = 0 \Rightarrow (z^2 + 1)(z^2 - 1) = 0 \therefore z = \pm i$ en $z = \pm 1$.

Hieronder getekend in het complexe vlak.



oplossingen van $z^4 = 1$

e) Geef de oplossingen van $z^8 = 1 \Rightarrow (z^4 - 1)(z^4 + 1) = 0$.

De oplossingen van $z^4 - 1 = 0$, hebben we al.

Nu $z^4 + 1 = 0 \Rightarrow z^4 = -1 \Rightarrow z^2 = \pm i$.

$$z^2 = i: \text{stel } z = a + ib \Rightarrow a^2 - b^2 + 2iab = i \Rightarrow a^2 = b^2, \text{ en } 2iab = i.$$

Dus: $a = \pm b$, en $2ab = 1 \Rightarrow a = +b \therefore a = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$, en $b = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

We hebben weer 2 wortels: $z_{1,2} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2} \pm i \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Er resteren nog twee wortels. Volgen deze nu uit $a = -b$?

Met $2ab = 1$, en $a = -b \Rightarrow b = \pm i \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $a = \mp i \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Eerst $b = +i \frac{1}{2}\sqrt{2}$, en $a = -i \frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow z = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - i \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Geen nieuwe informatie. Deze wortel hebben we al: z_2 .

Nu $b = -i \frac{1}{2}\sqrt{2}$, en $a = +i \frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow z = +\frac{1}{2}\sqrt{2} + i \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Geen nieuwe informatie. Deze wortel hebben we al: z_1 .

Het zal opvallen, als we de combinaties $\{b = +i \frac{1}{2}\sqrt{2}, a = +i \frac{1}{2}\sqrt{2}\}$ en $\{b = -i \frac{1}{2}\sqrt{2}, a = -i \frac{1}{2}\sqrt{2}\}$, zouden nemen we de wortels:

$$-z_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + i \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

en

$$-z_4 = \frac{1}{2}\sqrt{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{2},$$

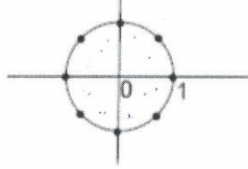
vinden.

Deze laatste wortels zijn correct. Dat volgt uit $\arg(z^8) = 8 \cdot \arg(z) = 0$ op een veelvoud van 2π na:

$$0, \frac{1}{8}2\pi, \frac{2}{8}2\pi, \frac{3}{8}2\pi, \frac{4}{8}2\pi, \frac{5}{8}2\pi, \frac{6}{8}2\pi, \frac{7}{8}2\pi, \dots$$

$$\text{Or, } \arg(z) = 1 \Rightarrow 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, 10\pi, 12\pi, 14\pi, \dots,$$

$$8 \cdot \arg(z) = 1 \Rightarrow 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, 10\pi, 12\pi, 14\pi, \dots \Rightarrow 0, \frac{1}{8}2\pi, \frac{2}{8}2\pi, \frac{3}{8}2\pi, \frac{4}{8}2\pi, \frac{5}{8}2\pi, \frac{6}{8}2\pi, \frac{7}{8}2\pi, \dots$$



oplossingen van $z^8 = 1$

- Oefenen

Blok 9 Les 3 Complexe vergelijkingen, Complex equations/functions

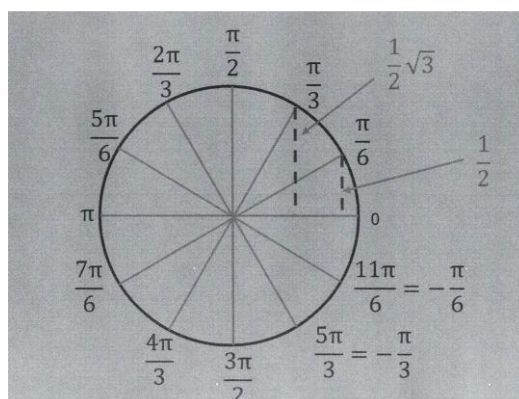
Deze les sluit aan bij paragraaf 2, vanaf blz 13, van Inleiding Complexe Getallen van de Wageningse Methode 2009

- Vooraf

belangrijk om te weten en te gebruiken:

Belangrijk om te weten en te gebruiken:

α	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(\alpha)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0
$\cos(\alpha)$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan(\alpha)$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0



- Vergelijkingen: De vergelijking $z^n = 1$

- Voorbeeld. Gegeven de vergelijking: $z^4 = 1$, zie **Opgave 8** Les 2

$$\rightarrow |z^4| = |z|^4 = 1 \text{ dus } |z| = 1$$

$\rightarrow \arg(z^4) = \arg(1) = 0$ op een veelvoud van 2π na,
 want, reminder, 1 is een positief reëel getal, dus $\arg(1) = 0$,
 $\rightarrow \arg(z^4) = 0, 0 + 2\pi, 0 + 4\pi, 0 + 6\pi, 0 + 8\pi$,
 $\rightarrow \arg(z^4) = 4 \cdot \arg(z)$, zie vorige Les 2,
 $\rightarrow \arg(z) = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

$\rightarrow$ Er zijn vier oplossingen: $1, i, -1, -i$, op de eenheidscirkel.

Als je naar de argumenten van $z^4 = 1$ kijkt, verdelen deze argumenten 2π in 4 gelijke delen van $\frac{1}{2}\pi$.

Voorbeeld:

Gegeven z voldoet aan de vergelijking $z^n = 1$.

Dan is $|z^n| = |z|^n = 1$ dus $z = 1$ en z ligt op de eenheidscirkel.

Ook is $\arg(z^n) = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots, 2n\pi$,

$\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$, zie vorige les 2.

Dus $\arg(z) = 0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \frac{6\pi}{n}, \dots, \frac{2k\pi}{n}, \dots, 2\pi (= \frac{2\pi n}{n})$.

$\rightarrow$ De oplossingen van de vergelijking $z^n = 1$ vormen een regelmatige veelhoek op de eenheidscirkel in het complexe vlak. Dus als je de punten van z op de eenheidscirkel verbindt doormiddel van rechte lijnstukken, vind je een regelmatige veelhoek.

Deze oplossingen zijn van de vorm: $z = \cos(\frac{2\pi k}{n}) + i \sin(\frac{2\pi k}{n})$ met :

$k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$. ($k = n$ geeft $2\pi \rightarrow 0$).

We weten nu dat $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$. Dit bewijzen we nog eens door volledige inductie:

Dat betekent dat je aanneemt $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$. En je stelt jezelf de vraag: geldt dit nu ook voor $n+1$? Geldt dan $\arg(z^{n+1}) = (n+1) \cdot \arg(z)$? We weten dat

$\arg(w \cdot v) = \arg(w) + \arg(v)$. (**Opgave 7** Blok 9 Les 2). Stel nu $w = z^n$ en $v = z$. Er geldt dan: $\arg(w \cdot v) = \arg(z^n z) = \arg(z^n) + \arg(z) =$
 $= n \cdot \arg(z) + \arg(z) = (n+1) \cdot \arg(z)$.

“QED”, zoals wij latinisten zeggen.

$n = 6$:

Voorbeeld

De oplossingen van $z^6 = 1$ zijn:

- $\cos(0) + i \sin(0) = 1$
- $\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- $\cos\left(\frac{4\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- $\cos\left(\frac{6\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{6\pi}{6}\right) = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1$
- $\cos\left(\frac{8\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{8\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- $\cos\left(\frac{10\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{10\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i \frac{1}{2}\sqrt{3}$

- De vergelijking $z^n = w$

Het zal niet altijd zo zijn dat de oplossingen op een cirkel met een straal gelijk aan 1 liggen.

Voor de vergelijking $z^n = w$ en $|z|^n = |w|$ geldt: $|z| = |w|^{1/n}$. Dan liggen de oplossingen op een cirkel met straal $|w|^{1/n}$.

Opgave 10 § 2, betreft de analyse van $z^3 = -8$, hieronder uitgewerkt:

Voorbeeld

Stel z is oplossing van $z^3 = -8$.

Dan is $|z|^3 = 8$ dus $|z| = \sqrt[3]{8} = 2$.

De oplossingen liggen op een cirkel met straal 2.

$$\arg(z^3) = 3\arg(z) \text{ en } \arg(z^3) = \arg(-8) = \pi + 2k\pi$$

$$\arg(z) = \frac{1}{3}\arg(z^3) + \frac{1}{3}2k\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi$$

Deze oplossingen zijn:

- $2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3}$
- $2\cos(\pi) + 2i\sin(\pi) = -2$
- $2\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + 2i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}$

Voorbeeld:

$$(1 - i\sqrt{3})^3 = -8$$

$$(1 - i\sqrt{3})^3 = (1)^3 + 3 \cdot (1)^2 \cdot (-i\sqrt{3}) + 3 \cdot (1)(-i\sqrt{3})^2 + (-i\sqrt{3})^3 =$$

$$= 1 - 3 \cdot i\sqrt{3} + 3 \cdot (-i)^2(\sqrt{3})^2 + (-i)^3(\sqrt{3})^3 =$$

$$= 1 - 3 \cdot i\sqrt{3} - 3 \cdot 3 + i(\sqrt{3})^3 = 1 - 3 \cdot i\sqrt{3} - 9 + 3i\sqrt{3} = 1 - 9 = -8$$

Opgave 11b § 2, betreft de analyse van $z^3 = -i$:

Los op $z^3 = -i$

Antwoord

$$z_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$$

$$z_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$$

$$z_3 = i$$

Opgave 11a § 2, betreft de analyse van $z^3 = i$:

Voorbeeld

Los op $z^3 = i$

$$|z|^3 = |i| = 1 \rightarrow |z| = 1$$

$$\arg(z^3) = 3\arg(z) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k = 0, 1, 2$$

$$\rightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi, \frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi.$$

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$$

$$z = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$$

$$z = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 - i = -i$$

- **De Formule van de Moivre**

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

Opgave 13 § 2

Bewijs

Stel $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$

Dan is $|z| = \sqrt{(\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2} = 1$

$\rightarrow |z^n| = |z|^n = 1$ en

$$\arg(z^n) = n \cdot \arg(z) = n\varphi$$

$$\rightarrow (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = z^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Bewijs met volledige inductie van $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$.

$\arg(z^2) = 2 \cdot \arg(z)$. Hierbij hebben we gebruik gemaakt van $\arg(w \cdot v) = \arg(w) + \arg(v)$.

Neem nu aan dat $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$ juist is, wat vinden we dan voor $\arg(z^{n+1})$?

$$\arg(z^{n+1}) = \arg(z^n \cdot z).$$

$$\text{Met } \arg(w \cdot v) = \arg(w) + \arg(v), \text{ wordt } \arg(z^n \cdot z) = n \cdot \arg(z^n) + \arg(z) = n \cdot \arg(z) + \arg(z) = (n+1) \cdot \arg(z), \text{ QED.}$$

Opgave 14a § 2

Voorbeeld

$$\text{Bereken } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^{10}$$

Uitwerking

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^{10} &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^{10} = \cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \\ &= \cos\left(2\pi + \frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(2\pi + \frac{4\pi}{3}\right) = \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} \end{aligned}$$

Voorbeeld

$$\text{Bereken } (1 + i\sqrt{3})^{10}$$

Uitwerking

$$|1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\begin{aligned} (1 + i\sqrt{3})^{10} &= (2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right))^{10} = 2^{10} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^{10} = \\ &= 2^{10} \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) = -2^9 - 2^9i\sqrt{3} \end{aligned}$$

- De uitgebreide Formule van de Moivre

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

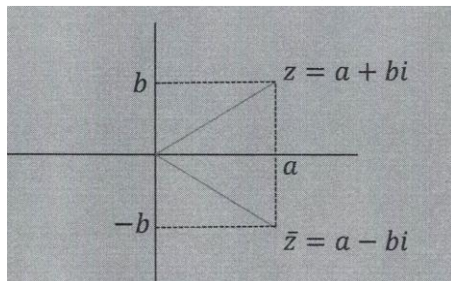
Bewijs

$$\text{Stel } z = r \cdot \cos \varphi + ir \cdot \sin \varphi$$

$$\rightarrow z^n = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

volgens de formule van de Moivre.

- De complex geconjugeerde



Als $z = a + ib$ dan heet $\bar{z} = a - ib$ de complex geconjugeerde van z .

De overgang van $z = a + ib$ naar $\bar{z} = a - ib$ komt overeen met een spiegeling in de x -as.

Opgave 15 § 2

Bewijs de volgende drie eigenschappen:

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

$$\bar{z} \cdot z = |z|^2$$

Bewijs van $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$:

$$\overline{z + w} = \overline{a + ib + c + id} = \overline{a + c + i(b + d)} = a + c - i(b + d) = a - ib + c - id = \bar{z} + \bar{w}.$$

Bewijs van $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$:

$$\begin{aligned} \overline{z \cdot w} &= \overline{(a + ib)(c + id)} = \overline{ac - bd + icb + iad} = ac - bd - icb - iad = \\ &= (a - ib)(c - id) = \bar{z} \cdot \bar{w}. \end{aligned}$$

Bewijs dat $\bar{z} \cdot z = |z|^2$:

$$\bar{z} \cdot z = (a - ib)(a + ib) = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

• Complexe getallen delen

$$z = a + ib \text{ en } w = c + id$$

De breuk $\frac{a+ib}{c+id}$ kun je als volgt herschrijven:

$$\begin{aligned} \frac{a + ib}{c + id} &= \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(a + ib)(c - id)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - i \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2}. \end{aligned}$$

Gevolg:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+ib} &= \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \frac{b}{a^2+b^2}, \text{ of} \\ \frac{1}{c+id} &= \frac{c-id}{c^2+d^2} = \frac{c}{c^2+d^2} - i \frac{d}{c^2+d^2} \end{aligned}$$

Voorbeelden

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{1}{i} &= \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i \\ \bullet \quad \frac{1}{1+i} &= \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \\ \bullet \quad \frac{1-i}{1+i} &= \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i+i^2}{2} = -i. \end{aligned}$$

Bereken:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-i} &= \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1}{2}(1+i). \\ \frac{i}{1-i} &= \frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -\frac{1}{2}(1-i). \text{ Natuurlijk, } \frac{i}{1-i} = i \cdot \frac{1}{1-i} = \frac{i}{2}(1+i). \\ \frac{1-i}{(1+i)^2} &= \frac{1-i}{(1+i)^2} \cdot \frac{(1-i)^2}{(1-i)^2} = \frac{1}{4} \cdot (1-i)^3 = -\frac{1}{2}(1+i). \end{aligned}$$

• Worteltrekken

Voorbeeld

Gegeven is dat z voldoet aan: $z^2 = i$

$$\text{Dan is } |z^2| = |z|^2 = |i| = 1 \rightarrow |z| = 1$$

$$\text{En: } \arg(z^2) = 2 \arg(z) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{4} + k\pi = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

$$\text{Twee oplossingen: } z = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2} \text{ en } -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}$$

z en w zijn complexe getallen die voldoen aan de vergelijking:

$$z^2 = w.$$

Dan is: $|z| = \sqrt{|w|}$ en $\arg(z^2) = 2\arg(z) = \arg(w) + 2k\pi$

$$\rightarrow \arg(z) = \frac{1}{2}\arg(w) + k\pi (k = 0, 1).$$

Een voorbeeld:

$$z^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} = w.$$

$$\text{Stel } w = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}.$$

Hier uit volgt $r = 1$ en $\arg(w) = \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

$$\arg(z) = \frac{1}{2}\arg(w) = \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

Dus:

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right).$$

We moeten nu wel rekening houden met $k = 1$. Dit resulteert in twee oplossingen:

$$z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i),$$

en

$$z_2 = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i).$$

Voorbeeld

Opgave 20 § 2, Complex worteltrekken

Veronderstel: $b = r(\cos \phi + i \sin \phi)$, met $-\pi < \phi < \pi$, en $r > 0$.

a) Gegeven het getal $c = \sqrt{r}(\cos \frac{1}{2}\phi + i \sin \frac{1}{2}\phi)$.

Het verband tussen c^2 en b : de absolute waarde van c^2 is gelijk aan r en het argument van c^2 is gelijk aan $2 \cdot \frac{1}{2}\phi = \phi$.

b) Een getal waarvoor hetzelfde geldt is $-c$.

Opgave 21 § 2, Complex worteltrekken

a) $b = 2 + i2\sqrt{3}$.

$z^2 = b$. De oplossingen voor z ?

$\arg(b) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \arg(z) = \frac{1}{2}\arg(b) = \frac{\pi}{6} + k\pi$. Er zijn dus twee oplossingen: $\frac{\pi}{6}$, en $\frac{7\pi}{6}$. Want $\frac{7\pi}{6} < 2\pi$.

Verder $|b| = 4 \Rightarrow |z|^2 = 4 \Rightarrow |z| = 2$.

$z = a + ib \Rightarrow \cos \frac{\pi}{6} = \frac{a}{|z|} \therefore a = |z| \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$, en $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{b}{|z|} \therefore b = |z| \cdot \frac{1}{2} \therefore z = \sqrt{3} + i$, en $z = -\sqrt{3} - i$.

b) $b = -1 + i\sqrt{3}$.

Dezelfde aanpak als onder a).

$\arg(b) = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \arg(z) = \frac{1}{2}\arg(b) = \frac{\pi}{3} + k\pi$. Er zijn dus twee oplossingen: $\frac{\pi}{3}$, en $\frac{4\pi}{3}$. Want $\frac{4\pi}{3} < 2\pi$.

Nu, $|b| = 2 \Rightarrow |z|^2 = 2 \Rightarrow |z| = \sqrt{2}$.

$z = a + ib \Rightarrow \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a}{|z|} \therefore a = |z| \cdot \frac{1}{2}$, en $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{b}{|z|} \therefore b = |z| \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \therefore z = \frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2}$, en

$z = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

c) $b = -i$.

Dezelfde aanpak als onder a).

$\arg(b) = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \arg(z) = \frac{1}{2}\arg(b) = \frac{3\pi}{4} + k\pi$. Er zijn dus twee oplossingen: $\frac{3\pi}{4}$, en $\frac{7\pi}{4}$. Want $\frac{7\pi}{4} < 2\pi$.

Opmerking: uiteraard kun je ook werken met $-\frac{\pi}{4}$, en $\frac{3\pi}{4}$.

$|b| = 1 \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1$.

$z = a + ib \Rightarrow \cos \frac{3\pi}{4} = \frac{a}{|z|} \therefore a = -|z| \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$, en $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{b}{|z|} \therefore b = |z| \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \therefore z = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2}$,

en $z = \frac{1}{2}\sqrt{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Opmerking: In bovenstaande voorbeelden was het complex wortel trekken eenvoudig. De

voorbeelden gaven voor $\frac{1}{2}\arg(b)$ als veelvoud van $\frac{\pi}{6}$ of $\frac{\pi}{4}$ een sinus of cosinus.

Wanneer $\frac{\alpha}{2}$, geen 'mooie' hoek oplevert maar α wel, dan kun je gebruik maken van de verdubbelingsformules, en $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$:

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha \Rightarrow 2 \cos^2 \alpha - 1 = \cos 2\alpha \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \alpha},$$

en

$$\text{met } \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha \Rightarrow 2 \sin^2 \alpha + 1 = \cos 2\alpha \Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \alpha}.$$

De andere verdubbelings formule is:

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha.$$

Natuurlijk, met de rekenmachine is elke $\cos \frac{\alpha}{2}$, of $\sin \frac{\alpha}{2}$, te berekenen.

Elke kwadratische vergelijking in z heeft twee oplossingen in $\mathbb{C}$. Je kunt zo'n vergelijking (kwadraatsplitsen) schrijven als: $(z - a)^2 = b$, voor complexe getallen a en b . Er is een complex getal c , zo gekozen dat $b = c^2$. Dan geldt:

$$(z - a)^2 = b \Leftrightarrow (z - a)^2 = c^2 \Leftrightarrow (z - a - c)(z - a + c) = 0 \Leftrightarrow z = a - c \text{ of } z = a + c.$$

Als $c = 0$ (en dus $b = 0$), vind je maar één oplossing. Meer algemeen kan de volgende stelling bewezen worden:

Voor elke n -de graads veelterm in z , zijn er complexe getallen $a, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, te vinden zodat die n -de graads veelterm te ontbinden is in :

$$a(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n).$$

Deze stelling is de hoofdstelling van de algebra. Een bewijs van deze stelling werd gegeven door Gauss.

Overigens verschilt de aanpak voor het worteltrekken niet van de aanpak bij de vergelijkingen aan het begin van de les. Er wordt hier slechts speciale aandacht gevestigd op het wortel trekken. Het rechterlid van de vergelijking kan een natuurlijk getal zijn, een integer of een complex getal.

Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.

Opgave 9, § 2:

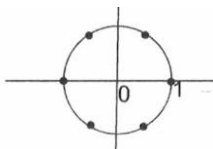
We bekijken de vergelijking $z^6 = 1$.

a) Teken de oplossingen van $z^6 = 1$ in het complexe vlak.

$|z^6| = |z|^6$, de oplossingen liggen op de eenheidscirkel.

$\arg z^6 = \arg 1 = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, 10\pi, 12\pi, \dots$

$\arg(z^6) = 6 \cdot \arg(z) = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, 10\pi, 12\pi, \dots \Rightarrow \arg(z) = 0, \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi, 2\pi, \dots$



Dus 6 oplossingen van de vorm $\cos(\frac{2\pi k}{6}) + i \sin(\frac{2\pi k}{6})$, met $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

b) Eén van de oplossingen heeft argument $\frac{1}{3}\pi$, die oplossing noemen we ϵ .

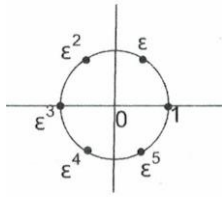
De oplossing kunnen we schrijven als: $\cos(\frac{2\pi k}{6}) + i \sin(\frac{2\pi k}{6})$, met $k = 1, \epsilon = \frac{1}{2} + i \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

c) Vermenigvuldigen met ϵ is gelijk aan het toevoegen van $\frac{1}{3}\pi$, aan het argument van z . Zie ook bovenstaande

figuur. $\arg(z) = 0, \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi, 2\pi, \dots$ Dus draaien over $\frac{1}{3}\pi$, tegen de wijzers van de klok in.

d) We kunnen de oplossingen van z uitdrukken in ε : $0, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^5$.

Hierbij is: $\varepsilon^3 = -1$, $\varepsilon^4 = -\varepsilon$, $\varepsilon^5 = -\varepsilon^2$. Zie onderstaande figuur.



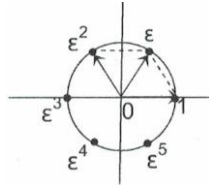
e) We tellen de oplossingen, uitgedrukt in ε , op: $\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \varepsilon^5$, met gebruik making van $\varepsilon^3 = -1$, $\varepsilon^4 = -\varepsilon$, $\varepsilon^5 = -\varepsilon^2$, vinden we $\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \varepsilon^5 = -1$.

f) $-\varepsilon$, en $\varepsilon^2 + 1$, zijn machten van ε . Bewijs: $\varepsilon^4 = -\varepsilon \Rightarrow \varepsilon^2 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varepsilon^4 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3} = -\varepsilon.$$

$$\text{Nu } \varepsilon^2 + 1 = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3} + 1 = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3} = \varepsilon.$$

Zie onderstaande tekening.



Opgave 12: § 2

In **opgave 12** van Blok 9 Les 1 zochten we naar oplossingen van de vergelijking $z^3 = 6z + 4$. Deze oplossingen verkregen we met de formule van Cardano:

Herhaling van de **opgave 12**, Blok 9 Les1:

We bekijken de vergelijking $z^3 = 6z + 4$.

De vorm van deze vergelijking doet denken aan Cardano. Laten we eens kijken:

$$z = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}},$$

$$p = 6 \text{ en } q = 4 \Rightarrow z = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 8}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 8}} = \sqrt[3]{2 + 2i} + \sqrt[3]{2 - 2i}.$$

Een volgende stap:

$$(-1 + i)^3 = -1 + 3i - 3i^2 + i^3 = 2 - 2i,$$

en

$$(-1 - i)^3 = -1 - 3i - 3i^2 - i^3 = 2 + 2i.$$

Substitueer deze resultaten in $z = \sqrt[3]{2 + 2i} + \sqrt[3]{2 - 2i} = \sqrt[3]{(-1 - i)^3} + \sqrt[3]{(-1 + i)^3} = -2$.

a) De drie oplossingen van $z^3 = 2 + 2i$.

$$\arg(z^3) = 3 \cdot \arg(z) = \arg(2 + 2i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{Dus } \arg(z) = \frac{\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}, \frac{17\pi}{12}, \dots$$

b) De oplossing met argument $\frac{3\pi}{4}$.

$$z^3 = 2 + 2i \Rightarrow |z^3| = \sqrt{8} \Rightarrow |z|^3 = \sqrt{8} \Rightarrow |z| = \sqrt{2}.$$

$$\text{Verder } z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2} \right) = -1 + i.$$

In opgave 12 van Blok 15 Les 1: $(-1 + i)^3 = 2 + 2i$. Nu zie je waar deze gelijkheid vandaan komt.

c) Eén van de oplossingen van de vergelijking $z^3 = 2 - 2i$, heeft als argument: $-\frac{3\pi}{4}$. Dit is een representatie van het argument met de wijzers van de klok mee: rechtsom en niet gebruikelijk.

$$\arg(z^3) = 3 \cdot \arg(z) = \arg(2 - 2i) = -\frac{\pi}{4} - 2k\pi, k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{Dus } \arg(z) = -\frac{\pi}{12}, -\frac{3\pi}{4}, \dots$$

$$z^3 = 2 - 2i \Rightarrow |z^3| = \sqrt{8} \Rightarrow |z|^3 = \sqrt{8} \Rightarrow |z| = \sqrt{2}.$$

$$\text{Verder } z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \sqrt{2} \left(\cos -\frac{3\pi}{4} + i \sin -\frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{2} \right) = -1 - i.$$

In opgave 12 van Blok 15 Les 1 : $(-1 - i)^3 = 2 - 2i$. Nu zie je waar deze gelijkheid vandaan komt.

Opgave 14, § 2, de formule van de Moivre

Bereken met de formule van de Moivre, $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$,

$$\text{a) } \left(\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^{10} : \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3} = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Dus, } \left(\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^{10} = \cos \frac{10\pi}{3} - i \sin \frac{10\pi}{3} = \cos \left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi\right) - i \sin \left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^{10} : \frac{1}{2}\sqrt{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{2} = \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Dus, } \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}\right)^{10} = \cos \frac{10\pi}{4} - i \sin \frac{10\pi}{4} = \cos \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) - i \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = -i.$$

$$\text{b) Bereken nu } (1 + i\sqrt{3})^{10}. \text{ Zie bovenstaande tekst met voorbeeld onder 14a): } \left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^{10} = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

$$\text{Dan, } \left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} (1 + i\sqrt{3})^{10} = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3} \therefore (1 + i\sqrt{3})^{10} = 2^{10} \left(-\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = -512 - 512i\sqrt{3}.$$

Opgave 17 § 2

$$\text{a) } \bar{z} \cdot z = |z|^2 \Rightarrow \frac{\bar{z}}{|z|^2} \cdot z = 1 \Rightarrow \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z} \Rightarrow \text{de inverse van } z.$$

$$\text{b) De inverse van } 1 + i : \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i. \text{ Controle: } \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)(1+i) = (1+i).$$

$$\text{De inverse van } \frac{1}{3} - \frac{1}{2}i : \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}i} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}i}{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}i\right)} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}i}{\frac{1}{9} + \frac{1}{4}} = \frac{12}{13} + \frac{18}{13}i.$$

$$\text{c) Algemeen } z = a + ib. \text{ De inverse } \frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

$$\text{Als } z \text{ op de eenheidscirkel ligt: } a^2 + b^2 = 1, \text{ en } \frac{1}{z} = \bar{z}.$$

$$\text{d) De inverse van } z = a + ib : \frac{1}{z} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}.$$

Opgave 18, § 2:

Los de volgende vergelijkingen in z op:

$$\text{a) } 2z = 1 + i \therefore z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

$$\text{b) } (2+i)z = 4+3i \Rightarrow z = \frac{4+3i}{2+i} = \frac{4+3i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{11+2i}{5} = \frac{11}{5} + \frac{2}{5}i.$$

$$\text{c) } (2+3i)z + 3 + i = -2 + 13i \Rightarrow z = \frac{-5+12i}{2+3i} = \frac{-5+12i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{26+39i}{13} = 2 + 3i.$$

Opgave 19 § 2

De getallen met $\text{Re}(z) = 1$, liggen op een rechte lijn, parallel aan de imaginaire as. We gaan bekijken waar de rechte lijn op afgebeeld wordt door de transformatie (afbeelding) van $z \rightarrow \frac{1}{z}$.

a) Drie getallen liggen op de lijn met $\text{Re}(z) = 1$: 1 , $1+i$, en $1-i$.

Bepaal de beelden, de uitdrukkingen in formule onder de afbeelding $z \rightarrow \frac{1}{z}$.

$$z = 1 : \Rightarrow z \rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$z = 1+i : z \rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, \text{ zie opgave 17,}$$

$$z = 1-i : z \rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

b) De bewering is dat de getallen op de rechte lijn $\text{Re}(z) = 1$, zijn afgebeeld op een cirkel. Uit de resultaten van $z \rightarrow \frac{1}{z}$, onder a) de afbeeldingen, volgt wat de straal en het middelpunt van de cirkel zijn.

Het middelpunt van de cirkel is $\text{Re}(z) = \frac{1}{2}$, en de straal is $\frac{1}{2}$. Door de drie afbeeldingen in het complexe vlak te tekenen, zie je dat het klopt.

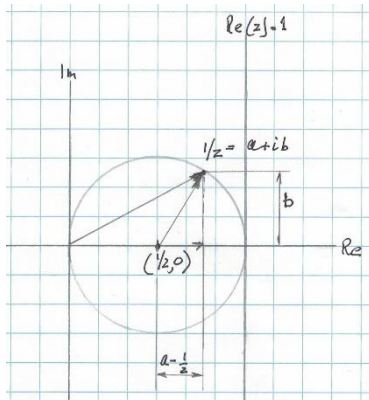
c) Maar nu het bewijs. Dat is nog niet zo simpel. Het bewijs valt buiten de lesstof.

Een aanwijzing helpt daarbij: stel $z = 1 + ic$, voor een zeker reëel getal c . Dus $z = 1 + ic$ ligt op $\text{Re}(z) = 1$.

En $-\infty < c < \infty$.

$$z = 1 + ic : z \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{1+ic} = \frac{1-ic}{(1+ic)(1-ic)} = \frac{1-ic}{1+c^2} = \frac{1}{1+c^2} - i \frac{c}{1+c^2}.$$

Een tekening helpt hierbij:



$$\frac{1}{z} = a + ib.$$

Het middelpunt van de cirkel is: $(\frac{1}{2}, 0)$. De straal van de cirkel is $r = \frac{1}{2}$, en $(a - \frac{1}{2})^2 + b^2 = r^2$.

Dus de vergelijking van de cirkel is, met $a = \frac{1}{1+c^2}$ en $b = \frac{c}{1+c^2}$:

$$\left(\frac{1}{1+c^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{1+c^2}\right)^2 = \frac{1}{4}. \text{ Nu moeten we nagaan of dit klopt.}$$

$$\left(\frac{1}{1+c^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{1+c^2}\right)^2 = \frac{1-2c^2+c^4}{4(1+c^2)^2} - \frac{4c^2}{4(1+c^2)^2} = \frac{1+2c^2+c^4}{4(1+c^2)^2} = \frac{1(1+c^2)^2}{4(1+c^2)^2} = \frac{1}{4}, \text{ QED.}$$

d) We krijgen niet de hele cirkel in beeld van de lijn $\text{Re}(z) = 1$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+c^2} - i \frac{c}{1+c^2} \Rightarrow c \rightarrow -\infty \text{ en } c \rightarrow \infty \text{ bereik je niet. De oorsprong } (a = 0, b = 0) \text{ blijft dus uit beeld.}$$

Opgave 23, § 2 Complex worteltrekken:

We zoeken twee getallen z met $z^2 = b$, waarbij $b = -7 - i24$. We noemen $\arg(b) = \alpha$, waarbij $-\pi < \alpha \leq \pi$.

a) $|b| = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{625} = 25.$

$$\cos \alpha = -\frac{7}{25}, \text{ en } \sin \alpha = -\frac{24}{25}.$$

b) $\arg(z) = \frac{\alpha}{2} + k\pi.$

Met de verdubbelings formule, zie tekst van de Les:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \alpha} \Rightarrow \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5},$$

en

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \alpha} \Rightarrow \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

Nu, $-\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\pi}{2}$: dus $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \frac{4}{5}$, voldoet en $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}$, voldoet.

c) $z^2 = b.$

$$|b| = 25 \Rightarrow |z|^2 = 25 \Rightarrow |z| = 5.$$

$$\arg(b) = \alpha \Rightarrow \arg(z) = \frac{1}{2} \arg(b) = \frac{\alpha}{2} + k\pi.$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \pm \frac{4}{3}.$$

$$z = a + ib: \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{b}{a} = \pm \frac{4}{3}, \text{ en verder weten we dat } a^2 + b^2 = 25 \therefore a = 3, b = -4, \text{ en } a = -3, b = 4.$$

$$z = 3 - i \cdot 4, \text{ en } z = -3 + i \cdot 4.$$

• Oefenen

Blok 9 les 4 Meetkunde en complexe getallen, Geometry and Complex Numbers

Deze les sluit aan bij paragraaf 3, vanaf blz 13, van Inleiding Complexe Getallen van de Wageningse Methode 2009

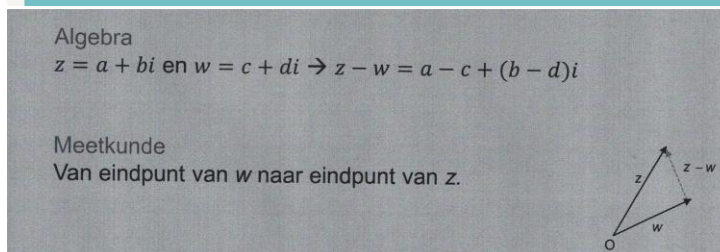
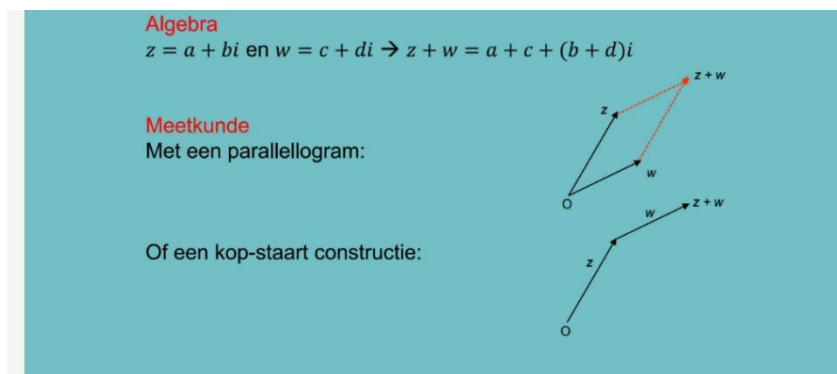
- Rekenen met complexe getallen kent vele toepassingen. In veel gevallen werk je met complexe e-machten en moet je complex differentiëren. Wiskundig gezien is dit niet eenvoudig. Een toepassingsgebied waarbij je minder theorie over complexe getallen nodig hebt, is de meetkunde.

- Vooraf

Algebra: $z = a + ib$ en $w = c + id \rightarrow z + w = a + c + i(b + d)$

Meetkunde: complexe getallen kunnen in het complexe vlak voorgesteld worden door een pijl (een vector). Het gaat alleen om de grootte en de richting. Het getal $a + ib$ stellen we voor door een pijl die een verplaatsing van a eenheden in de 'reële' richting en b eenheden in de 'imaginaire' richting aangeeft. Er zijn twee methoden:

Algebraïsch en Meetkundig.

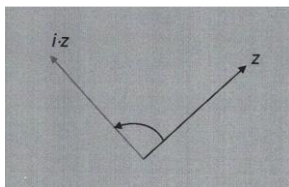


Rotatie

Algebra: $z = a + ib \rightarrow i \cdot z = -b + ia$

Meetkunde: $\arg(iz) = \arg(z) + \arg(i) = \arg(z) + \frac{\pi}{2}$

$\rightarrow iz$ is een rotatie over $\frac{\pi}{2}$, linksom.

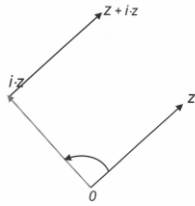


Dan zie je ook dat nog een keer vermenigvuldigen met i , dus $i \times i$, gelijk is aan de vermenigvuldiging van z met -1 . Dus een rotatie over $2 \times \frac{\pi}{2}$.

- Een vierkant maken

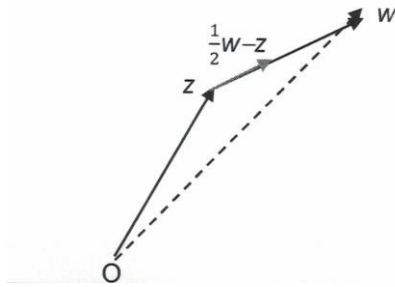
Opgave 4, § 3

a) en b) De getallen 0 (de oorsprong), z , iz (rotatie over $\frac{\pi}{2}$, linksom van z) en $z + iz$ (parallelogram van z en iz of kop-staart constructie) vormen een vierkant.



c) De getallen $0, z, -iz$, en $z - iz$. Teken weer $z, -iz$ is de rotatie rechtsom en loodrecht op z en $z - iz$ (parallellogram van z en $-iz$ of kop-staart constructie) vormen een vierkant.

- Een lijnstuk maken



Gegeven de getallen z en w .

$w - z$ is de verbinding tussen w en z .

$z + \frac{1}{2}(w - z)$ ligt halverwege de verbinding tussen w en z .

$$z + \frac{1}{2}(w - z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}w.$$

Merk op dat $z - w$ de verbinding is tussen z en w . Anders gezegd:

$z - w = -(w - z)$. Dus een rotatie van $w - z$ over 180° .

Algemeen:

$z + t(w - z)$ zijn alle punten van het lijnstuk tussen z en w als $0 \leq t \leq 1$.

$z + t(w - z) = (1 - t)z + tw$ met $0 \leq t \leq 1$.

Anders geschreven: met $1 - t = s$, $sz + tw$ zijn alle punten van het lijnstuk tussen z en w als

$s + t = 1, (0 \leq s \text{ en } 0 \leq t)$.

- Zwaartelijnen

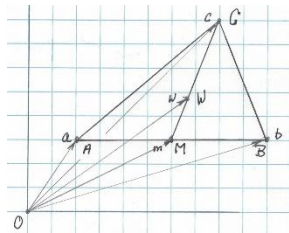
Opgave 2 § 3 Het zwaartepunt van een driehoek

a) Gegeven de complexe getallen a, b en c . Deze kun je beschouwen als de eindpunten van vectoren in het complexe vlak. De oorsprong van het assenstelsel kun je willekeurig kiezen. Maar doe het altijd handig.

Deze getallen stellen de punten A, B en C voor van een driehoek in het complexe vlak.

M is het midden van $AB \rightarrow m = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.

M ligt halverwege de verbinding tussen b en a . Dus $a + \frac{1}{2}(b - a) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.



b) De zwaartelijns is het lijnstuk vanuit het andere hoekpunt C naar M : de vergelijking van deze lijn is

$w = sm + tc = s\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) + tc$ met $s + t = 1, (0 \leq s \text{ en } 0 \leq t)$.

c) Kies nu het punt z met $s = \frac{2}{3}$ en $t = \frac{1}{3}$.

Punt Z ligt op de zwaartelij vanuit C , dus op het lijnstuk cm en $w = \frac{2}{3}m + \frac{1}{3}c$.

$$w = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) + \frac{1}{3}c = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c.$$

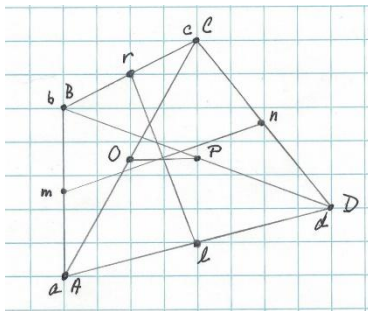
d) Op dezelfde manier geldt dat Z ligt op de zwaartelijnen uit B en C . Dit kun je concluderen aan de hand van $\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c \rightarrow$ symmetrie.

$\rightarrow$ De zwaartelijnen in een driehoek gaan door één punt. Dat punt heet het zwaartepunt. Het doet er niet toe met welk hoekpunt je start. Het zwaartepunt ligt twee keer zo ver van het hoekpunt als van het midden van de tegenoverliggende zijde. Het zwaartepunt wordt steeds weergegeven door het complexe getal: $w = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c$.

e) Het eindpunt van de vector w ligt op de vector cm .

De verhouding tussen de lijnstukken CW en CM is $\frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2 : 1$.

Opgave 3 § 3 over zwaartelijnen:



a) OP is het verbindingslijnstuk van de middens van de diagonalen en de twee medianen van de vierhoek. Een mediaan verbindt de middens van twee tegenover elkaar liggende zijden.

b) De medianen en OP gaan door één punt.

De hoekpunten zijn aangegeven met a, b, c en d . De eindpunten van de vectoren in het complexe vlak. De oorsprong van het coördinatenstelsel kun je vrij kiezen.

Bij het midden van het lijnstuk AB hoort het complexe getal $m = \frac{1}{2}(a + b)$.

Bij het midden van het lijnstuk CD hoort het complexe getal $n = \frac{1}{2}(c + d)$.

Bij het midden van het lijnstuk dat de eindpunten van de vectoren m en n verbindt hoort het complexe getal $\frac{1}{2}(m + n) = \frac{1}{4}(a + b + c + d)$.

Bij het midden van het lijnstuk AC , aangegeven met O , hoort het complexe getal $\frac{1}{2}(a + c)$.

Bij het midden van het lijnstuk BD , aangegeven met P , hoort het complexe getal $\frac{1}{2}(b + d)$.

Bij het midden van het lijnstuk OP , hoort het complexe getal $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(a + c) + \frac{1}{2}(b + d)\right] = \frac{1}{4}(a + b + c + d)$.

Controle:

Bij het midden van het lijnstuk dat de eindpunten van de vectoren b en c verbindt hoort het complexe getal $\frac{1}{2}(b + c)$.

Bij het midden van het lijnstuk dat de eindpunten van de vectoren a en d verbindt hoort het complexe getal $\frac{1}{2}(a + d)$.

Dus het midden van de vectoren $r = \frac{1}{2}(b + c)$, en $l = \frac{1}{2}(a + d)$ hoort het complexe getal:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(b + c) + \frac{1}{2}(a + d)\right], \text{ QED.}$$

Twee vierkanten

Opgave 5 § 3 Twee vierkanten:

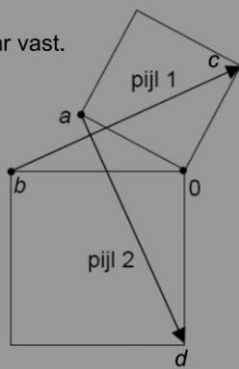
Hieronder, pag. 61, zijn twee vierkanten getekend met een gemeenschappelijk hoekpunt O . Twee hoekpunten van het kleine vierkant zijn verbonden met twee hoekpunten van het grote vierkant. De verbindingslijnstukken zijn even lang en staan loodrecht op elkaar. Je kunt een bewijs leveren met

congruentie: De driehoeken Obc en Oad zijn congruent, twee zijden gelijk en een hoek.
Zie figuur op de hieronder.

Opgave 5
Twee vierkanten zitten met een hoekpunt bij O aan elkaar vast.
 $a = x + yi, b = r + si$
 $\rightarrow c = -i \cdot a = y - xi$ en $d = i \cdot b = -s + ri$

p komt overeen met pijl 1 en q met pijl 2.
 $\rightarrow p = c - b = y - xi - (r + si) =$
 $= y - r - (x + s)i$

En $q = d - a = -s + ri - (x + yi) =$
 $= -s - x + (r - y)i$



Het kan ook met complexe getallen. Dat gaan we nu doen.

In dit vraagstuk wordt gebruik gemaakt van rotatie in het complexe vlak over een hoek van $\frac{\pi}{2}$. Zowel rechts om:

- vermenigvuldigen met $-i$,

als mede linksom:

- vermenigvuldigen met i .

Let op: x, y, r en s zijn getallen in het complexe vlak met O als oorsprong.

a) Druk de getallen bij de start en eindpunten van de pijlen uit in a en b .

Het startpunt van pijl 1 is b en het eindpunt bij $-ia$, een rotatie rechtsom O .

Het startpunt van pijl 2 is a en het eindpunt bij ib , een rotatie linksom O .

b) Welk getal p hoort bij pijl 1?

De vector pijl 1, is met de gegevens onder a): $p = -ia - b$.

De vector pijl 2, is met de gegevens onder a): $q = ib - a$.

c) Je vermoedt nu, zie onderstaande tekening dat $iq = p$:

$$iq = i(ib - a) = -b - ia = p.$$

Deze gelijkheid volgt ook uit de congruentie.

d) We hebben bewezen dat pijl 1 en pijl 2 gelijk zijn.

Ze staan ook loodrecht op elkaar: pijl 2 draaien over 90° tegen de wijzers van de klok in geeft pijl 1.

Vermenigvuldigen met i .

Hieronder is **opgave 5** nog een keer gemaakt met een enigszins andere aanpak, maar wel in het complexe vlak.

Opgave 5 (vervolg)
 $p = y - r - (x + s)i$

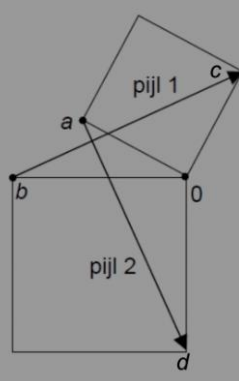
$q = -s - x + (r - y)i$

$\rightarrow iq = -is - ix - (r - y) = y - r - (x + s)i = p$

$\rightarrow$ pijl 1 en pijl 2 staan loodrecht op elkaar.

$|p| = |iq| = |i||q| = |q|$

$\rightarrow$ De pijlen zijn even lang.



$$\rightarrow iq = -is - ix - (r - y) = y - r - (x + s)i = p$$

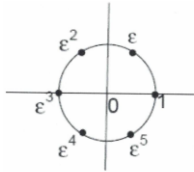
$\rightarrow$ pijl 1 en pijl 2 staan loodrecht op elkaar.

$$|p| = |iq| = |i||q| = |q|$$

$\rightarrow$ De pijlen zijn even lang.

- Draaien over $\frac{\pi}{3}$ of $\frac{\pi}{6}$

Opgave 12 § 3



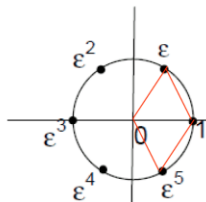
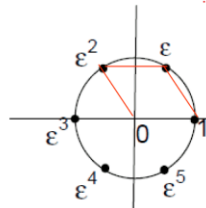
Gegeven het getal:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

→ Vermenigvuldigen met ε komt overeen met een draaiing over $\frac{\pi}{3}$.

In de figuur zie je dat $\varepsilon = 1 + \varepsilon^2$

Ook is $\varepsilon^5 + \varepsilon = 1$ dus $\varepsilon^5 = 1 - \varepsilon$



Met de eenheidscirkel in het complexe vlak kun je allerlei relatie opstellen tussen ε en machten van ε :

$$\varepsilon = 1 + \varepsilon^2 \text{ Parallelogram}$$

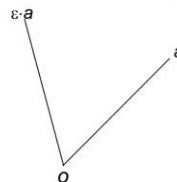
$$\varepsilon^5 + \varepsilon = 1 \text{ Parallelogram}$$

$$\text{dus } \varepsilon^5 = 1 - \varepsilon.$$

Voor draaien over $\frac{\pi}{6}$ kan je een overeenkomstige procedure volgen en ook voor $\frac{\pi}{4}$.

- Gelijkzijdige driehoeken

De getallen 0, a en $\varepsilon \cdot a$ komen overeen met de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek.



Opgave 14 § 3

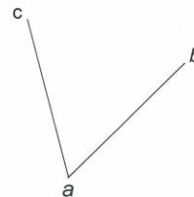
Gegeven zijn de getallen a en b .

Bereken c zodat a, b en c een gelijkzijdige driehoek vormen.

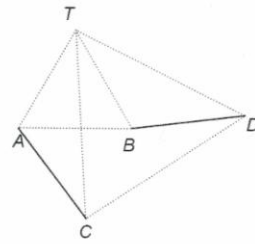
$b - a$ is het lijnstuk AB .

Er zijn twee oplossingen:

- $c = \varepsilon(b - a)$
- $c = \varepsilon^5(b - a) = (1 - \varepsilon)(b - a)$



De driehoeken ABT en CDT zijn gelijkzijdig.
 → De lijnstukken AC en BD snijden onder een hoek van 60° en zijn even lang.



Bewijs

Kies T als oorsprong.

Dan is $b = \varepsilon a$ en $d = \varepsilon c$.

Dus $b - d = \varepsilon a - \varepsilon c = \varepsilon(a - c)$.

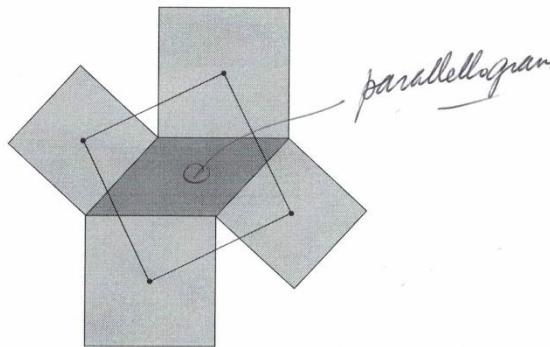
En $|b - d| = |\varepsilon(a - c)| = |a - c|$

• Een Sangaku

Bij de constructie van bijv. zwaartepunten is het soms handig om de oorsprong te verschuiven. Dan zijn de verschillende stappen beter te over zien.

Opgave 6 § 3

a) Zet op de zijden van een parallellogram vierkanten.



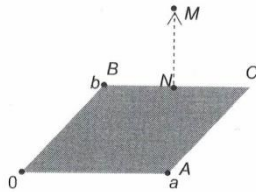
Een Sangaku beeldt zonder woorden een

stelling uit. De stelling: De middens van de vierkanten zijn de hoekpunten van een vierkant.

Ontwerper van deze Sangaku is Hans van Lint.

b) Hieronder is een parallellogram getekend.

De oorsprong O , en de getallen(vectoren) a en b , zijn in het parallellogram aangegeven.



Eén van de middens van de vierkanten is aangegeven met M . N is het midden van het lijnstuk, zijde van het parallellogram, BC . N behoort bij $b + \frac{1}{2}a$. De pijl van N naar M representeert het getal $ia/2$, rotatie $\frac{a}{2}$ linksom. Dus bij M hoort het getal $m = b + \frac{a}{2} + \frac{ia}{2} = b + \frac{1}{2}(a + ia)$. Opmerking: hier is het handig om de oorsprong over de vector b te verschuiven naar B en zo $\frac{1}{2}(a + ia)$ te bepalen en daarna bij dit getal weer b bij te tellen.

c) We gaan de middens van de ander drie vierkanten uitrekenen. Deze worden ook in a en b uitgedrukt. De procedure onder b) wordt gevolgd met de wijzers van de klok mee.

- Het midden van het lijnstuk CA : $\frac{1}{2}b$ draaien we rechtsom. Zo wordt het midden van het vierkant op $CA \Rightarrow L : a + \frac{1}{2}(b - ib)$.

- Het midden van het lijnstuk OA : $\frac{1}{2}a$ rechtsom draaien. Zo wordt het midden van het vierkant op $OA \Rightarrow K : \frac{1}{2}(a - ia)$.

- Het midden van het lijnstuk OB : $\frac{1}{2}b$ linksom draaien. Zo wordt het midden van het vierkant op lijnstuk $OB \Rightarrow P : \frac{1}{2}(b + ib)$.

d) De stelling: De middens van de vier vierkanten zijn de hoekpunten van een vierkant.

Dus te bewijzen: $KL = LM$ en $KL \perp LM$.

$$\overrightarrow{LM} = b + \frac{1}{2}(a + ia) - a - \frac{1}{2}(b - ib) = \frac{1}{2}[b - a + i(a + b)].$$

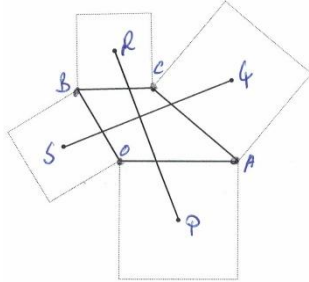
$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}ia + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}ib = \frac{1}{2}[a + b + i(a + b)].$$

$$\text{Nu } i\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}[b - a + (a + b)] \therefore KL \perp LM \text{ en } |KL| = |LM|.$$

• De stelling van Aubel

Opgave 7 § 3

Op de zijden van een willekeurige vierhoek zijn vierkanten opgezet. De middens van de vierkanten op tegenover elkaar liggende zijden, $R - P, Q - S$, worden met elkaar verbonden.



De stelling: De verbindingslijnstukken zijn even lang en staan loodrecht op elkaar. De stelling is genoemd naar Henricus Hubertus Aubel, o.a., leraar wiskunde aan het Koninklijk Atheneum van Antwerpen. Source : Wikipedia.

De hoekpunten van het vierkant $OACB$, krijgen de complexe getallen $0, a, b, c$. Dus, bijv., $c = \overrightarrow{OC}$.

De middens van de vierkanten krijgen de getallen p, q, r, s .

a) We gaan p, q, r, s in a, b, c uitdrukken.

$$-p = \frac{1}{2}(a - ia), \text{ een draaiing rechtsom van } \frac{1}{2}a.$$

$$-q = a + \frac{1}{2}(c - a) - \frac{1}{2}i(c - a) = \frac{1}{2}(a + c) + \frac{1}{2}i(a - c), \text{ een draaiing rechtsom van } \frac{1}{2}(c - a).$$

$$\text{Nota Bene: } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = c - a.$$

$$-r = b + \frac{1}{2}(c - b) + \frac{1}{2}i(c - b) = \frac{1}{2}(b + c) + \frac{1}{2}i(c - b).$$

$$-s = \frac{1}{2}(b + ib).$$

b) Het complexe getal dat bij de pijl(vector) van P naar R hoort.

De pijl(vector) van P naar R : $\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{PR} \therefore \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}, \Rightarrow \overrightarrow{PR} = r - p$, is het complexe getal dat bij de pijl(vector) van P naar R hoort.

$$\text{Met de resultaten onder a): } r - p = \frac{1}{2}(b + c) + \frac{1}{2}i(c - b) - \frac{1}{2}(a - ia) = \frac{1}{2}(-a + b + c) + \frac{1}{2}i(a - b + c).$$

c) Het complexe getal dat bij de pijl(vector) van Q naar S hoort.

Op dezelfde wijze als onder b): De pijl(vector) van Q naar S wordt gerepresenteerd door het complexe getal $s - q = \frac{1}{2}(b + ib) - \frac{1}{2}(a + c) - \frac{1}{2}i(a - c) = \frac{1}{2}(-a + b - c) + \frac{1}{2}i(-a + b + c).$

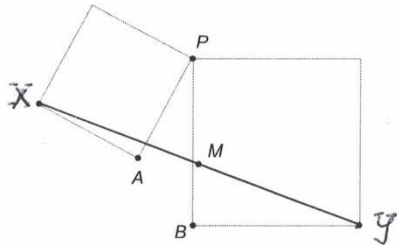
d) De stelling: De verbindingslijnstukken PR en SQ zijn evenlang en staan loodrecht op elkaar.

$$i(r - p) = \frac{1}{2}i(-a + b + c) - \frac{1}{2}(a - b + c) = \frac{1}{2}(-a + b - c) + \frac{1}{2}i(-a + b + c) = s - q.$$

Qed.

• De stelling van Bottema

Opgave 8 § 3



Op de lijnstukken PA en PB worden vierkanten gezet. Het hoekpunt X , wordt verbonden met het hoekpunt Y . Het midden van het lijnstuk XY is M . De stelling: De plaats van M hangt niet van P af. Dit wordt gedemonstreerd in the applet:

<http://www.cut.the.knot.org/Curriculum/Geometry/Bottema.shtml>

We maken van P de oorsprong van het assentelsel.

- Het hoekpunt X : a is het complexe getal behorende bij hoekpunt A . Een rotatie over $-ia$, brengt ons bij het hoekpunt X . Dus, X wordt gerepresenteerd door het complexe getal $a - ia$.

Zo geldt voor Y : $b + ib$.

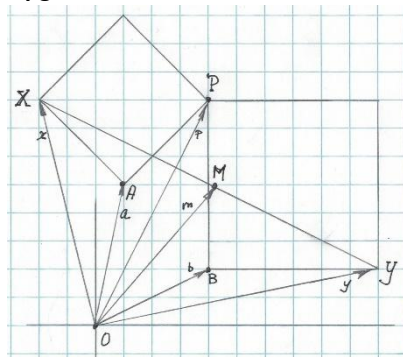
Dan vind je voor het midden M het complexe getal: $\frac{1}{2}(a + b) - \frac{1}{2}i(a - b)$.

Dit resultaat is onafhankelijk van het complexe getal dat bij P hoort.

Leg je nu de oorsprong op een willekeurige plaats, niet in P , dan vind je hetzelfde resultaat.

Met wat meer werk uiteraard, zoals hieronder wordt weergegeven:

Opgave 8 § 3, een alternatief



$$\overrightarrow{AX} = i\overrightarrow{AP}, \text{ en } \overrightarrow{BY} = -i\overrightarrow{BP}.$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} \Rightarrow a + \overrightarrow{AP} = p \Rightarrow \overrightarrow{AP} = p - a.$$

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OP} \Rightarrow b + \overrightarrow{BP} = p \Rightarrow \overrightarrow{BP} = p - b.$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OX} \Rightarrow a + \overrightarrow{AX} = x \Rightarrow x = a + i\overrightarrow{AP} = a + i(p - a).$$

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BY} = \overrightarrow{OY} \Rightarrow b + \overrightarrow{BY} = y \Rightarrow y = b - i\overrightarrow{BP} = b - i(p - b).$$

Verder:

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MY} = \overrightarrow{OY} = y,$$

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MX} = \overrightarrow{OX} = x.$$

Beide uitdrukkingen opgeteld: $2\overrightarrow{OM} = 2m = y + x$. Reminder: $\overrightarrow{MY} + \overrightarrow{MX} = 0$.

$$\text{Dus: } m = \frac{1}{2}(x + y).$$

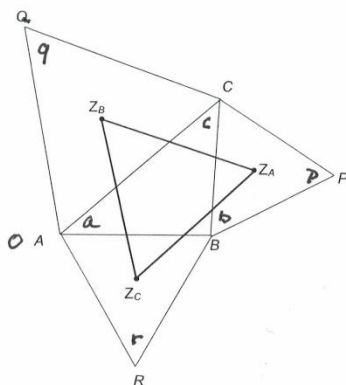
We hebben nu alle ingrediënten:

$$m = \frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{2}[a + i(p - a) + b - i(p - b)] = \frac{1}{2}(a + b) - \frac{1}{2}i(a - b), \text{ QED.}$$

• De stelling van Napoleon

Opgave 15 § 3

Ook bij het bewijs van deze stelling gebruik je de representatie van de benodigde punten in het complexe vlak door complexe getallen van de gegeven willekeurige driehoek. Ook wordt gebruik gemaakt van rotaties over hoeken van $\frac{\pi}{3}$, gelijkzijdige driehoeken. We maken gebruik van de resultaten van opgaven 12 in de bovenstaande tekst van de les.



ABC is een willekeurige driehoek. De driehoeken BCP , CAQ en ABR , zijn gelijkzijdig met zwaartepunten Z_A , Z_B en Z_C .

De stelling: De driehoek $Z_A Z_B Z_C$ is gelijkzijdig.

We gaan de stelling bewijzen met complexe getallen.

De zwaartepunten worden eveneens uitgedrukt in de gegeven complexe getallen.

Door eenhandige keuze van de oorsprong, bijv. in het hoekpunt A beperk je het aantal benodigde complexe getallen tot b en c . Hierdoor is de kans op fouten ook weer kleiner.

Bij gelijkzijdigheid van een driehoek hebben we te maken met hoeken van $\frac{\pi}{3}$. Vandaar de verwijzing naar opgave 12.

Een verdraaiing over $\frac{\pi}{3}$ betekent: vermenigvuldigen met $\varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ en $|\varepsilon| = 1$.

Hoekpunt P wordt voorgesteld door het complexe getal p :

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} = p$, enz.

$\overrightarrow{OC} = c = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = c - \overrightarrow{OB} = c - b$.

Nu geldt, opgave 12, $\overrightarrow{BP} = \varepsilon^5 \cdot \overrightarrow{BC}$, ε^5 is een verdraaiing over $\frac{\pi}{3}$ rechtsom.

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} = p \therefore p = \overrightarrow{OB} + \varepsilon^5 \cdot \overrightarrow{BC} = b + (c - b)\varepsilon^5$.

Met $\varepsilon^5 = 1 - \varepsilon = 1 - 1 - \varepsilon^2 = -\varepsilon^2$, opgave 12.

$p = b + (c - b)\varepsilon^5 = \varepsilon b - \varepsilon^2 c$.

Wat weten we van Q ? Door de keuze van A als oorsprong weten we dan $q = \varepsilon \cdot c$, een verdraaiing van $\frac{\pi}{3}$ linksom.

Wat weten we van R ? R ontstaat door $\overrightarrow{OB} = b$, over $\frac{\pi}{3}$ rechtsom te draaien: $r = \varepsilon^5 b = -\varepsilon^2 b$.

We hebben nu alle hoekpunten van de gelijkzijdige driehoeken uitgedrukt in complexe getallen.

Voor de zwaartepunten van die gelijkzijdige driehoeken hebben we een algemene uitdrukking:

$\frac{1}{3} \cdot (\text{de som van de complexe getallen van de hoekpunten})$.

Dus:

$$Z_A = \frac{1}{3}(p + c + b) = \frac{1}{3}(b + c + \varepsilon b - \varepsilon^2 c),$$

$$Z_B = \frac{1}{3}(q + c) = \frac{1}{3}(c + \varepsilon c),$$

$$Z_C = \frac{1}{3}(b + r) = \frac{1}{3}(b - \varepsilon^2 b).$$

Als de driehoek $Z_A Z_B Z_C$ gelijkbenig is, volgt uit de bovenstaande figuur dat $\varepsilon(\overrightarrow{Z_C - Z_A}) = \overrightarrow{Z_C - Z_A}$.

We hebben alle ingrediënten om na te gaan of $\varepsilon(\overrightarrow{Z_C - Z_A}) = \overrightarrow{Z_C - Z_A}$, juist is.

Dit is met de gegevens een invuloefening:

$$\text{geldt } \varepsilon \frac{1}{3}(b - \varepsilon^2 b - b - c - \varepsilon b + \varepsilon^2 c) = \frac{1}{3}(b - \varepsilon^2 b - c - \varepsilon c)?$$

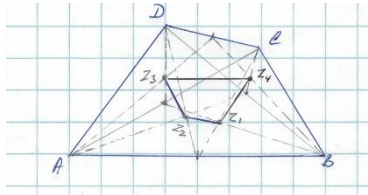
Maak gebruik van $\varepsilon^3 = -1$, en je ziet dat het vraagteken vervangen kan worden door een uitroepteken.

Samenvattend:

- de hoekpunten van de gelijkzijdige driehoeken formuleren in de complexe getallen,
- de zwaartepunten van deze driehoeken formuleren in complexe getallen,
- met de zwaartepunten kun je de zijden van de gevormde gelijkzijdige driehoek vergelijken door gebruik te maken van de rotatie $\varepsilon, \varepsilon^2$, enz.

Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven

Opgave 11 § 3



a) Teken de vierhoek ABCD en de zwaartepunten van de driehoeken ABC, ABD, ACD en BCD. De zwaartepunten van de driehoeken zijn respectievelijk Z_1, Z_2, Z_3 en Z_4 . Deze zwaartepunten vormen een vierhoek. Deze vierhoek lijkt gelijkvormig te zijn met de vierhoek ABCD. Deze vierhoek is getekend in het complexe vlak.

b) en c) Druk de complexe getallen bij de die de zwaartepunten representeren uit in a, b, c en d . Verder, Bewijs dat de vierhoek ABCD gelijkvormig is met de vierhoek gevormd door de vier zwaartepunten. Bepaal de verkleiningsfactor.

Opgelet, de stelling van de zwaartepunten: $z = \frac{1}{3}(a + b + c)$, waarbij a, b, c de kentallen zijn van de driehoek ABC.

Van $\triangle ABC$ weten we dus al de positie van het zwaartepunt $Z_1 = \frac{1}{3}(a + b + c)$. Vervolgens van $\triangle ABD \Rightarrow Z_2 = \frac{1}{3}(a + b + d)$. We weten dat $\overrightarrow{DC} = d - c$ en $\overrightarrow{Z_2Z_1} = \frac{1}{3}(a + b + d) - \frac{1}{3}(a + b + c) = \frac{1}{3}(d - c) \therefore \overrightarrow{DC} \parallel \overrightarrow{Z_2Z_1}$ en $\overrightarrow{Z_2Z_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$. Van $\triangle ACD \Rightarrow Z_3 = \frac{1}{3}(a + c + d)$. Verder $\overrightarrow{CB} = c - b$ en $\overrightarrow{Z_3Z_2} = \frac{1}{3}(a + c + d) - \frac{1}{3}(a + b + d) = \frac{1}{3}(c - b)$, $\therefore \overrightarrow{Z_3Z_2} \parallel \overrightarrow{CB}$ en $\overrightarrow{Z_3Z_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$. Geheel op dezelfde wijze vind je $\overrightarrow{Z_3Z_4} \parallel \overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{Z_3Z_4} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, en $\overrightarrow{Z_1Z_4} \parallel \overrightarrow{AD}$ en $\overrightarrow{Z_1Z_4} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. Je hebt nu alle ingrediënten. Gelet op het evenwijdig zijn van de zijden en de verhoudingsfactor $1/3$, zijn de onderzochte vierhoeken gelijkvormig en is de verkleiningsfactor $1/3$.

• Oefenen

Maken:

De opgaven van paragraaf 3.

Blok 9 De Toets: Complexe getallen.

Opgave 1: derdegraadsvergelijking

a) Gegeven is de vergelijking $y^3 + 6y + 7 = 0$. Deze vergelijking is van de gedaante: $y^3 = py + q$. Zoals je ziet: $y = -1$ is een oplossing.

Met de formule van Cardano: $y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$,

en $p = -6, q = -7$, vind je $y = -1$.

Opmerking: ook hier geldt, werk zoveel mogelijk de formule uit voordat je de rekenmachine gebruikt.

Resultaat: een nauwkeurig antwoord en zo min mogelijk fouten. Voorbeeld: de uitdrukking $\frac{6^3}{27} = \frac{2^3 \cdot 3^3}{3^3} = 8$.

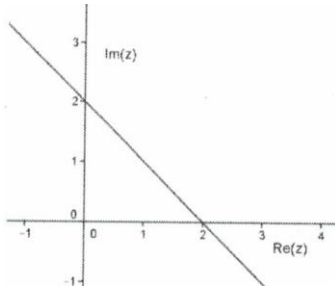
Uit $y^3 + 6y + 7 = (y + 1)(y^2 - y + 7) = 0$ en de abc-formule volgt dat $y = \frac{1}{2}(1 \pm 3\sqrt{-3})$, de andere oplossingen zijn.

b) Door substitutie in de formule van Cardano, vind je dat $y = \frac{1}{2}(1 + 3\sqrt{-3})$, inderdaad een oplossing is van $y^3 + 6y + 7 = 0$. Dit is weer een invuloefening. Aangezien je uitdrukkingen als $(1 + 3\sqrt{-3})^3$, moet uitrekenen, maak je gebruik van het binomium van Newton: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

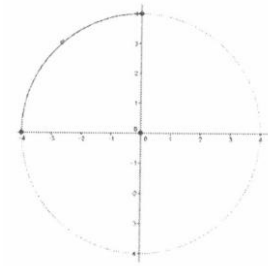
Opgave 2: het complexe vlak

a) Weergave in het complexe vlak van alle getallen z waarvoor geldt

$\text{Re}(z) + \text{Im}(z) = 2$:



b) Weergave in het complexe vlak van alle getallen z waarvoor geldt: $|z| = 4$ en $\frac{1}{2}\pi \leq \arg(z) < \pi$:



Opgave 3: herleidingen

a) $\frac{2+i}{1+i} = \frac{2+i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{3-i}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$.

b) Gebruik van poolcoördinaten:

$$z = -\sqrt{3} + i.$$

$$|z| = 2, \text{ en } \arg(z) = \frac{5}{6}\pi \Rightarrow z = 2\left[\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right].$$

Opgave 4: De Moivre

$$(2\sqrt{3} - i)^6 = ?$$

$$(2\sqrt{3} - i)^6 = 4^6 \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi \cdot i\right)^6.$$

Het argument van het complexe getal is: $-\frac{1}{6}\pi$.

$$4^6 \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi \cdot i\right)^6 = 4^6 \left[\cos\left(-\frac{1}{6}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right)\right]^6 = 4^6 [\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)] = 4^6 \cdot (-1) = -4096.$$

Opgave 5: een complexe vergelijking

We moeten dus een oplossing vinden in $\mathbb{C}$.

De vergelijking: $z^6 = -64 \Rightarrow |z| = 2$.

$$\arg(z^6) = \arg(-64) = \pi.$$

$$\arg(z^6) = 6 \cdot \arg(z) = \pi + k \cdot 2\pi \Rightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{1}{3}\pi.$$

De algemene oplossing van de complexe vergelijking:

$$z_k = 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{1}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{1}{3}\pi\right)\right], k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

We brengen de zes oplossingen in de vorm $a + ib$:

$$z_0 = 2 \cdot \left[\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right] = 2 \cdot \left[\frac{1}{2}\sqrt{3} + i \cdot \frac{1}{2}\right] = \sqrt{3} + i,$$

$$z_1 = 2 \cdot \left[\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right] = 2 \cdot [0 + i] = 2i,$$

$$z_2 = 2 \cdot \left[\cos\frac{5\pi}{6} + i \sin\frac{5\pi}{6}\right] = 2 \cdot \left[-\frac{1}{2}\sqrt{3} + i \cdot \frac{1}{2}\right] = -\sqrt{3} + i,$$

$$z_3 = 2 \cdot \left[\cos\frac{7\pi}{6} + i \sin\frac{7\pi}{6}\right] = 2 \cdot \left[-\frac{1}{2}\sqrt{3} - i \cdot \frac{1}{2}\right] = -\sqrt{3} - i,$$

$$z_4 = 2 \cdot \left[\cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2}\right] = 2 \cdot [0 - i] = -2i,$$

$$z_5 = 2 \cdot \left[\cos\frac{11\pi}{6} + i \sin\frac{11\pi}{6}\right] = 2 \cdot \left[\frac{1}{2}\sqrt{3} - i \cdot \frac{1}{2}\right] = \sqrt{3} - i.$$

Opgave 6: diagonalen in een vierkant

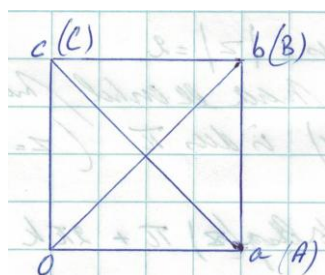
Een vierkant met de lengte van de zijde is gelijk aan 1.

Zie onderstaande tekening.

De oorsprong van het complexe vlak is in een hoekpunt van het vierkant.

De complexe getallen behorende bij de hoekpunten zijn a, b, c .

We gaan bewijzen met de complexe getallen, dat de diagonalen van het vierkant loodrecht op elkaar staan.



$a = 1, b = 1 + i$ (een draaiing linksom), en $c = i$.

Diagonaal $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = c - a = i - 1$.

Het complexe getal b voor de andere diagonaal hebben we al: $b = 1 + i$.

$c - a = i - 1 = i(i + 1) = i \cdot b$.

Door een verdraaiing i van $\overrightarrow{OB}$ linksom ontstaat $\overrightarrow{AC}$.

De diagonalen staan loodrecht op elkaar.

Blok 10 Hypothese Toetsen, Testing Hypotheses

Blok 10 Les 1 Discreet en continu

Deze les sluit aan bij paragraaf 1 van Hypothese Toetsen van de Wageningse Methode, 2013.

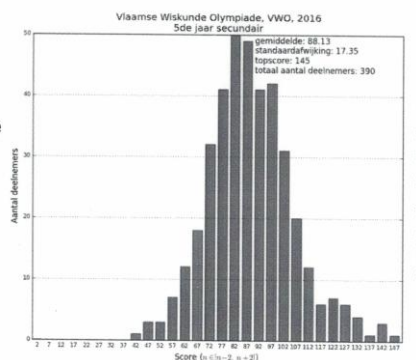
Kijk ook nog eens naar Blok 3 Binomiale Verdelingen en Blok 5 Normale Verdelingen.

- Discrete stochasten

Voorbeeld van een discrete stochast:

De score van de Wiskunde Olympiade. De mogelijke uitkomsten zijn losse punten op een getallenlijn.

Het histogram laat de scores zien van de Vlaamse Wiskunde Olympiade 2016. De scores zijn gehele getallen maar ze zijn ingedeeld in klassen met breedtes van 5. De score 82 bijvoorbeeld geeft de scores 80, 81, 82, 83, 84.

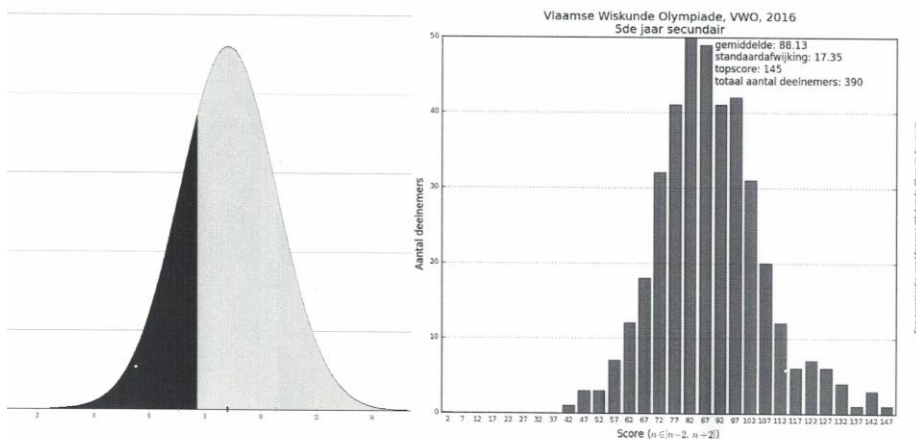


Frequenties van discrete stochasten breng je in beeld met een staafdiagram of histogram. Een kans histogram. De oppervlakte van de staven is een maat voor de bijbehorende kans. De som van de oppervlaktes van alle staven van een histogram is 1.

Een histogram heeft een klokvorm en laat zich redelijk goed weergeven door de normale verdeling met gemiddelde $\mu = 88.13$ en spreiding $\sigma = 17.35$.

De normale verdeling gaat door de middens van de staven van het histogram. Dus als de vraag gesteld wordt: "Wat is de kans op een score lager dan 80, ga na bij welke staaf 80 hoort, $\rightarrow 82$. Vul deze laatste waarde in bij de bijbehorende procedure op de Grafische Rekenmachine: $\text{normalcdf}(0, 82, 88, 17.35) = 0.362$, maar nauwkeuriger is: $\text{normalcdf}(0, 80, 88, 17.35) = 0.320$.

Zie normale verdeling en staafdiagram hieronder:

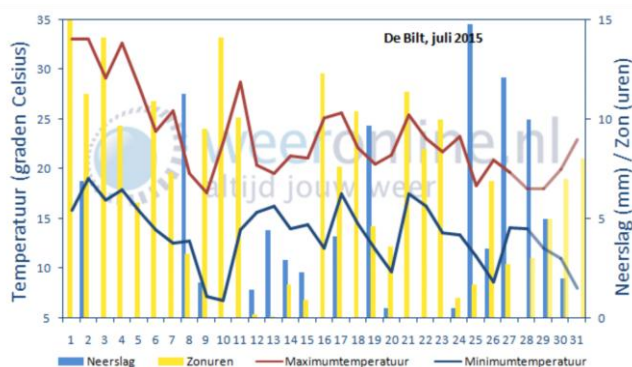


- Continue Stochasten.

Bij een continue stochast teken je een vloeiende kromme.

Twee voorbeelden van een continue stochast: de temperatuur- en neerslag registratie als functie van de tijd.

In dit geval kun je waarnemingen verbinden met doorgetrokken lijnen. Alle tussenliggende waarden doen er ook toe, hoewel ze niet zijn gemeten:



- Continuïteitscorrectie.

Voorbeeld: het werpen van een zuivere munt.

Met de binomiaalverdeling.

n is het aantal worpen, X is het aantal keren kop bij n worpen en $p = 1/2$.

$$E(X) = n \cdot p.$$

$$Sd(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}.$$

$$P(X) = \text{binom}(n, p, X).$$

Met de normale verdeling.

U is de normale verdeling 'passend' bij X :

$$\mu = E(X) = n \cdot p,$$

en,

$$\sigma = Sd(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}.$$

In onderstaande figuren zijn beide verdelingen in één Figuur weergegeven:

- het histogram X de discrete stochast,
- de normale verdeling U .

Opgave 5 § 1

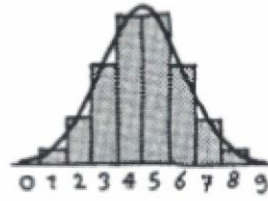
X is het aantal keren kop bij negen worpen met een zuivere munt.

X heeft een binomiale kansverdeling.

$$n = 9, p = \frac{1}{2}$$

$$E(X) = n \cdot p = 4\frac{1}{2};$$

$$Sd(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$



U is de normale verdeling 'passend' bij X :

$$\rightarrow \mu = 4,5 \text{ en } \sigma = 1,5$$

- a) X is een discrete stochast.
- b) $E(X) = 4.5$, en $Sd(X) = 1.5$.
- c) $P(X = 6) = \text{binompdf}(9, 0.5, 6) = 0.1641$
- d) $P(X = 6) \approx P(5.5 < U < 6.5) = \text{normalcdf}(5.5, 6.5, 4.5, 1.5) = 0.1613$. Een redelijke benadering van $P(X = 6) = \text{binompdf}(9, 0.5, 6) = 0.1641$.
- e) $P(X < 6) = 0.7461$, $P(U < 5.5) = 0.7475$.
- f) $P(X \leq 6.5) = 0.9102$, $P(U \leq 6.5) = 0.9088$.

Algemeen:

$$P(X) = P(X - 0.5 < U < X + 0.5) = \text{normalcdf}(X - 0.5, X + 0.5, \mu, \sigma).$$

Dus pas een continuïteitscorrectie van ± 0.5 toe voor een benadering van de kansen voor X .

Voorbeelden, met X een discrete stochast en U de continue benadering:

$$P(X = 6) \approx P(5.5 \leq U \leq 6.5),$$

$$P(3 \leq X \leq 8) \approx P(2.5 \leq U \leq 8.5),$$

$$P(3 < X \leq 8) = P(4 \leq X \leq 8) \approx P(3.5 \leq U \leq 8.5) \text{ en}$$

$$P(3 \leq X < 8) = P(3 \leq X \leq 7) \approx P(2.5 \leq U \leq 7.5).$$

Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.

Opgave 1 § 1 Verkeersdoden.

a) Het aantal verkeersdoden in de provincie Gelderland is de laatste jaren normaal verdeeld met een gemiddelde van 105 en een standaardafwijking 15. Hoe groot is in een jaar de kans op minder dan 100 verkeersdoden? We hanteren twee berekeningen met de GR:

- 1 $\text{normcdf}(0, 100, 105, 15)$,

- 2 "minder dan 100" is hetzelfde als hoogstens 99", dus $\text{normcdf}(0, 99, 105, 15)$.

ad 1 $\text{normcdf}(0, 100, 105, 15) = 0.3694$,

ad 2 $\text{normcdf}(0, 99, 105, 15) = 0.3446$.

b) De kans op precies 100 verkeersdoden is nogal klein. Hoe bereken je deze kans?

c) A. berekent de kans op precies 100 verkeersdoden op de volgende wijze: $\text{normcdf}(100, 100, 105, 15)$. $\text{normcdf}(100, 100, 105, 15) = 0$. Dit kan niet goed zijn. De kans bestaat namelijk wel, dus ongelijk aan 0.

d) De kans dat het aantal doden groter is dan 99 en kleiner dan 100 is uiteraard 0. Er bestaat geen kans op 99.5 doden.

B. berekent de kans als volgt: $\text{normcdf}(99, 100, 105, 15) = 0.0249$.

Het aantal verkeersdoden is een discrete stochast en kan alleen gehele waarden aannemen.

Opgave 2 § 1

Een discrete stochast verandert trapsgewijs. De mogelijke uitkomsten zijn een rij losse punten op de getallenlijn. Bij twee opvolgende uitkomsten kan geen enkele waarde daartussen als uitkomst optreden.

a) Kansexperiment: je stopt zes verschillende brieven in zes verschillend geadresseerde enveloppen.

X is het aantal brieven dat in de juiste envelop zit.

Waarden van X : 0, 1, 2, 3, 4 en 6. Nota bene: als er 5 goed zijn er ook 6 goed.

b) Kansexperiment: je gooit met een dobbelsteen tot je voor het eerst een zes gooit.

Y is het aantal worpen dat daarvoor nodig is.

Waarden van Y: alle positieve gehele getallen. Alle? Ja, het kan heel lang duren voordat je een zes gooit.

Opgave 3 § 1

Een continue stochast verandert traploos. De mogelijke uitkomsten zijn een interval op de getallenlijn. Bij elk tweetal uitkomsten kan elke waarde daartussen ook als uitkomst optreden.

Kansexperiment: je kiest een tomaat uit een grote partij tomaten.

Kansexperiment: je neemt de tijd op waarin iemand de 100 meter loopt.

a) Kansexperiment met een analoge klok: je kijkt op een willekeurig moment naar de klok.

T is de tijd die de klok aangeeft in minuten na het vorige hele uur.

T: discreet of continu? Bij een analoge klok wordt de tijd continu weergegeven.

b) Kansexperiment met een digitale klok: je kijkt op een willekeurig moment naar de klok.

T: discreet of continu? Bij een digitale klok wordt de tijd discreet weergegeven.

Opgave 4 § 1

a) X is het aantal keren kop bij een worp met vijf munten.

Wat is het verschil tussen $P(X=3)$ en $P(2 < X < 4)$?

Er is geen verschil. Voor discrete gebeurtenissen, zoals kruis of munt, geldt: $2 < X < 4 \equiv X = 3$.

b) Y is de jaarlijkse hoeveelheid neerslag in Nederland. Y is normaal verdeeld met gemiddelde $\mu = 80$ cm en standaardafwijking $\sigma = 15$ cm. Wat is het verschil tussen $P(Y=78)$ en $P(77 < Y < 79)$? Hier is sprake van een continue verdeling. De kans op precies 78 cm is nagenoeg gelijk aan nul en $P(77 < Y < 79)$ is ongelijk aan nul.

In de praktijk worden de gemeten waarden van een continue stochast vrijwel altijd afgerond. Een jaarlijkse neerslag van 78 cm betekent dat de hoeveelheid neerslag tussen 77.5 en 78.5 cm ligt.

Opgave 6 § 1

X is een discrete stochast en U de continue benadering van X. Zie bovenaan bladzijde 70 hierboven.

a) $P(X < 7) \approx P(U \leq 6.5)$.

b) $P(X \geq 9) \approx P(U \geq 8.5)$.

c) $P(5 < X < 12) \approx P(5.5 \leq U \leq 11.5)$.

d) $P(10 > X \geq 2) \approx P(9.5 \geq U \geq 1.5)$.

Opgave 7 § 1

Zie bovenstaande opgave 1 over het aantal verkeersdoden. Het aantal verkeersdoden in de provincie Gelderland is de laatste jaren normaal verdeeld met een gemiddelde van 105 en een standaardafwijking 15.

a) Hoe groot is in een jaar de kans op minder dan 100 verkeersdoden?

$P(X < 100) = \text{normcdf}(0, 99.5, 105, 15) = 0.3569$.

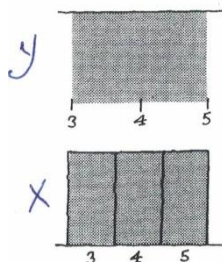
b) De kans op precies 100 verkeersdoden?

$P(X = 100) = \text{normcdf}(99.5, 100.5, 105, 15) = 0.0252$.

Overzichtsvraag 1 § 1

De discrete stochast X kan alleen de waarden 3, 4 en 5 aannemen. De continue stochast Y kan alle waarden tussen 3 en 5 aannemen. Beide kansverdelingen zijn uniform. Dat wil zeggen dat alle mogelijke waarden evenveel kans hebben.

a) In onderstaande figuur is aangegeven bij welke verdeling X hoort en bij welke verdeling Y.



b) $P(X = 3) = 1/3$. $P(X = 3) = P(X = 4) = P(X = 5)$.

$P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 1$.

$P(Y = 3) = 0$: de kans is gelijk aan de oppervlakte onder de grafiek in het interval $[3,3]$. Dat interval heeft breedte 0 en hoogte $1/3$, dus oppervlakte 0.

c) $P(X < 5) = P(X \leq 4) = P(X = 4) + P(X = 3) = \frac{2}{3}$.

$P(Y < 5) = 1$, want het oppervlak onder de grafiek over het interval $[3,5]$ is gelijk aan 1.

d) $P(4 \leq X \leq 5) = P(X = 4) + P(X = 5) = \frac{2}{3}$.

$P(4 \leq y \leq 5) = \frac{1}{2}$, want de oppervlakte onder de grafiek over het interval $[4,5]$ is gelijk aan $\frac{1}{2}$.

Overzichtsvraag 2 §1

De binomiale stochast X met 25 herhalingen laat zich goed beredeneren door de normale stochast U .

a) De gemiddelde en standaardafwijking van U ?

$\mu = E(U) = n \cdot p = 25 \cdot 0.4 = 10$.

$Var(U) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 6$.

$Sd(U) = \sigma = \sqrt{Var(U)} = \sqrt{6}$.

b) $P(X \leq 10) \approx P(U \leq 10.5)$.

$P(X < 10) = P(X \leq 9) \approx P(U \leq 9.5)$.

$P(X = 10) \approx P(9.5 \leq U \leq 10.5)$.

• Oefenen

Maken:

- De opgaven van paragraaf 1 en in ieder geval 6 en 7.
- Overzichtsvragen 1 en 2 op bladzijde 5.

Blok 10 Les 2 Wie heeft gelijk? Testen van Hypotheses. Testing Hypotheses.

Deze les sluit aan bij paragraaf 2 van Hypothese Toetsen van de Wageningse Methode, 2013.

• Populariteit van het kabinet (de regering)

Opgave 10 § 2

Een enquête van 50 personen over de populariteit van het kabinet (2013).

Voor de enquête is de aanname, volgens een artikel in een dagblad, dat 40% van de bevolking achter het kabinet staat. Het kabinet vindt dat het percentage hoger is. We onderzoeken daarom of de 40% bij benadering juist is via een kleine enquête.

De vraag is: "Staat u achter het beleid van het kabinet?"

Het statistisch model: Een binomiale verdeling.

X is het aantal personen dat "ja" antwoordt.

$n = 50$, de steekproef omvang.

a) $X=18$: het dagblad heeft gelijk,

$X=30$: de minister-president heeft gelijk.

b) We nemen aan dat 40% juist is.

Aanname: $p = 0.40$.

Wat is de verwachtingswaarde $E(X)$?

$\rightarrow E(X) = n \cdot p = 20$,

c) Wat is de kans dat $X \geq 27$?

$\rightarrow P(X \geq 27) = 1 - P(X \leq 26) = 1 - \text{binomcdf}(50, 0.4, 26) = 0.0314$

d) Veronderstel dat bij de enquête 29 mensen "ja" antwoorden. Wat denk je dan van het percentage 40% ($p = 0.40$)?

$\rightarrow P(X = 29) = \text{binompdf}(50, 0.4, 29) = 0.0043 \approx 0.4\%$

Conclusie: Onder de aanname dat $p = 0.4$ is een uitslag van $X = 29$ erg onwaarschijnlijk.

Daarmee staat de aanname onder druk.

• Het gewicht van eieren

Opgave 11 § 2

Een test van 50 eieren voor de kippenboer en de eierhandelaar. De boer beweert dat 70% van de eieren voor export geschikt is. Dus meer weegt dan 65 gram per ei. De handelaar vertrouwt die 70% niet, en beweert dat 70% te hoog is.

De test is: "Weegt een ei minder dan 65 gram?"

Het statistisch model: Een binomiale verdeling.

Y is het aantal eieren dat minder dan 65 gram weegt.

$n = 50$.

Aanname boer: $p = 0.3$.

a) $Y=13$: de boer heeft gelijk,

$Y=27$: de handelaar heeft gelijk.

b) $E(Y) = n \cdot p = 15$.

c) Onder de aanname dat de handelaar gelijk heeft, ken je de kans p niet dat een ei lichter is dan 65 gram. Dan kun je $E(Y)$ niet berekenen; je weet alleen dat $E(Y) > 15$ (aanname handelaar: $p > 0.3$ $E(Y) = n \cdot p > 15$).

De boer en de handelaar spreken van tevoren af bij welke waarden van Y de handelaar gelijk krijgt: als $Y \geq 20$.

We vinden voor deze waarden van de stochast:

$\rightarrow P(Y \geq 20) = 1 - P(Y \leq 19) = 1 - \text{binomcdf}(50, .3, 19) = 0.0848$.

Dus de kans dat meer dan 20 eieren lichter zijn dan 65 gram is ongeveer 8.5%.

Een kleine kans, maar niet heel klein.

- **Onrust in Weurt**

- **Opgave 12 § 2**

Uit gegevens van de gezondheidsdienst bleek dat van de 1300 mannen in Weurt er 33 gevallen van kanker waren. Op basis van het landelijk gemiddelde waren er 22 gevallen te verwachten. Vandaar de onrust.

Het statistisch model: **een binomiale verdeling**.

X is het aantal mannen met kanker.

$n = 1300$.

a) Aanname (landelijke) kans: $p = 0.017$

$\rightarrow E(X) = n \cdot p = 22$. Dus normaal zijn 22 kankergevallen onder mannen

b) Vermoeden over de kans in Weurt: $p > 0.017$.

Hoe groot is de kans, onder de aanname van de landelijke waarde voor de kans, dat het aantal kanker gevallen in Weurt groter of gelijk is aan 33?

$P(X \geq 33) = 1 - P(X \leq 32) = 1 - \text{binomcdf}(1300, 0.017, 32) = 0.0171$.

c) Reden tot ongerustheid? De kans is klein (1.71%) maar toch reden tot ongerustheid, want als er niets aan de hand is, is het aantal van 33 of meer kankergevallen erg onwaarschijnlijk.

d) We nemen een ander statistisch model: **een normale verdeling**.

X is het aantal mannen met kanker.

Aanname (landelijke) kans: $p = 0.017$

$\mu = n \cdot p = 22.1$,

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 4.65$.

Uitgaande van de landelijke gegevens vinden we, met continuïteitscorrectie:

$P(X \geq 33) = 1 - P(X \leq 32.5) = 1 - \text{normalcdf}(0, 32.5, 22.1, 4.65) = 0.012$.

De kans is klein (1.2%) maar toch reden tot ongerustheid.

- **Theoretisch model:**

We hebben de volgende situatie. Iemand doet een bewering, de nulhypothese, een ander twijfelt aan de juistheid van de bewering. Dus er is een andere veronderstelling, de alternatieve hypothese. Een hypothese toets is een procedure om te beslissen wie gelijk krijgt. Als voorbeeld nemen we bovenstaand voorbeeld van de onrust in Weurt.

- de eerste hypothese is de nulhypothese $H_0: p = 0.017$

- de tweede hypothese, de alternatieve hypothese $H_1: p > 0.017$

- de toetsingsgrootte X : het aantal mannen met kanker.

- het significantieniveau (of onbetrouwbaarheidsdrempel) α :

als $P(X \geq 33) < \alpha$ wordt H_0 verworpen.

Keuze voor $\alpha = 0.05, 0.01$ of 0.005 .

De keuze voor α hangt af van hoe zwaarwegend de beslissing is. Voor de

beeldvorming: Neem een normale verdeling met het gemiddelde $\mu = n \cdot p = 22$.

$P(X \geq 33) < \alpha$ betekent dat rechts in de normale verdeling het oppervlak van

bijv. $\alpha = 0.05$ wordt gekozen. Als $X \geq 33$ in dat oppervlak valt, dus

$P(X \geq 33) < \alpha$ is waar, dan wordt de nulhypothese verworpen.

- Kritiek gebied: Waarden van X waarvoor H_0 wordt verworpen.

Gegeven is een toetsingsgrootte X en een significantieniveau α .

Er zijn twee hypothesen: H_0 en H_1 .

Neem aan dat H_0 juist is.

Bepaal dan het kritieke gebied. Als H_0 waar is, kan X weliswaar een waarde in het kritieke gebied aannemen, maar het is wel (erg) onwaarschijnlijk dat het gebeurt; de kans daarop is namelijk kleiner dan α .

We nemen een steekproef, houden een enquête of voeren een experiment uit.

Als de waarde van X toch in het kritieke gebied blijkt te liggen, verwerpen we H_0 en accepteren H_1 .

Samenvattend: Waarden van X waarvoor H_0 wordt verworpen. Het kritieke gebied wordt zo bepaald dat de kans dat X een waarde aanneemt in het kritieke gebied kleiner is dan een vooraf afgesproken α .

- **Onrust in Weurt**

Hoe kleiner de kans, hoe uitzonderlijker de gebeurtenis.

Kies: $\alpha = 0.01$

Voor welke waarde van X verwerp je H_0 ?

Of: Voor welke grenswaarde g is $P(X \geq g) < 0.01$.

$P(X \geq g) = 1 - P(X \leq (g - 1))$.

Opmerking: het wordt $g - 1$ want het gaat om de binomiale verdeling. Een discrete verdeling.

$1 - \text{binomcdf}(1300, 0.017, 33) = 0.015$.

$1 - \text{binomcdf}(1300, 0.017, 34) = 0.0064$.

Voor $g \geq 35$ wordt H_0 verworpen.

Verder zie je dat je moet proberen met binomcdf de juiste waarde voor g te vinden.

Conclusie: als uit de steekproef minstens 35 mannen kanker blijken te hebben, dan is er voor Weurt reden te twifelen aan $p = 0.017$ en is $p > 0.017$ waarschijnlijker.

Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.

Opgaven 11, 13 en 14 § 2, De eieren.

Een handelaar heeft veel eieren nodig met een gewicht van minstens 65 gram. De boer beweert dat 70% van zijn eieren voor export geschikt is. Dus 30% is niet geschikt. De handelaar vertrouwt de 70% niet. Daarom wordt een steekproef van 50 eieren genomen. Het aantal eieren in de steekproef dat

minder dan 65 gram weegt is Y . We herhalen een aantal aspecten van **opgave 11**.

a) Wie ben je geneigd gelijk te geven als $Y = 13$?

Volgens de boer is $E(Y) = n \cdot p = 50 \cdot 0.3 = 15$, de boer heeft gelijk. Maar als $Y = 27$, dan heeft de handelaar gelijk.

b) $E(Y) = 15$.

Dus als de handelaar gelijk heeft dan weet de handelaar alleen dat 70% te hoog is:

$E(Y) = 50 \cdot (p > 0.3) > 15$, dit is het enige dat de handelaar weet.

c) De boer en de handelaar spreken af dat de handelaar gelijk krijgt bij $Y \geq 20$. Bereken de kans dat $Y \geq 20$, onder de aanname $p = 0.3$:

$$P(Y \geq 20) = 1 - P(Y \leq 19) = 1 - \text{binomcdf}(50, 0.3, 19) = 0.0848.$$

De nul Hypothese H_0 : de kans op een zwaar genoeg ei is 0.7.

De alternatieve hypothese H_1 : de kans op een zwaar genoeg ei is kleiner dan 0.7.

d) Neem als significantie niveau $\alpha = 0.05$. Bepaal het kritieke gebied.

Voor welke waarde van Y verwerp je H_0 ? Met andere woorden: Voor welke grenswaarde g is

$$P(Y \geq g) < 0.05.$$

Dus: $P(Y \geq g) = 1 - P[Y \leq (g - 1)]$. Laten we eens kijken bij $g = 21$ en 22 :

$$P(Y \geq 22) = 1 - \text{binomcdf}(50, 0.3, 21) = 0.0251,$$

en

$$P(Y \geq 21) = 1 - \text{binomcdf}(50, 0.3, 20) = 0.0478.$$

Het kritieke gebied is: $(21, 22, 23, \dots, 50)$.

Opgave 15 § 2 Blikmaak:

Sommige dranken zijn verkrijgbaar in blikjes en in flesjes. C. beweert dat hij de blikmaak herkent. Die bewering willen we toetsen: tien keer wordt C. twee glazen aangeboden. Het ene glas is gevuld met drank uit een flesje, het andere met dezelfde drank uit een blikje. Uit beide glazen neemt C. een slok en zegt welk glas de drank uit een blikje bevat.

a) Definieer bij deze hypothese toets de toetsingsgrootte. Hoe is de toetsingsgrootte verdeeld?

De toetsingsgrootte is het aantal keren dat C. het juiste glas aanwijst. De toetsingsgrootte is binomiaal verdeeld: de keuze is juist of onjuist.

b) Wat zijn de twee hypothesen H_0 en H_1 ? De kans dat het juiste glas wordt aangewezen noemen we p . Misschien bluft C. en kan hij de blikmaak helemaal niet herkennen. Dan gokt C. maar wat. Dat nemen we als nulhypothese, omdat dan p bekend is: $p = \frac{1}{2}$.

De nulhypothese H_0 is $p = \frac{1}{2}$. De alternatieve hypothese H_1 : $p > \frac{1}{2}$.

c) Wat is onder H_0 de verwachtingswaarde van de stochast X ? de binomiale verdeling:

$$E(X) = n \cdot p = \frac{10}{2} = 5.$$

d) Wat is het kritieke gebied? We nemen $\alpha = 10\%$.

$$\text{Dus: } P(X \geq g) = 1 - P(X \leq (g - 1)) = 0.1$$

Met binomcdf begin je bijvoorbeeld met $g = 6$. Dan vind je na herhaald proberen voor het kritieke gebied $\{8, 9, 10\}$. Je kunt dit natuurlijk ook uitrekenen met de cumulatieve uitdrukking voor de

binomiale verdeling $\sum_k^{10} \binom{10}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$. Uiteraard is de GR wat handiger.

e) Concluderen we dat C. de blikmaak kan herkennen? Er is vanuit gegaan dat C. gokt en de verwachtingswaarde 5 goede keuzes is. Nu blijkt C. er 8 goed gekozen te hebben, dus in het kritieke gebied. We moeten dan erkennen dat C. de smaak kan herkennen en niet gokt.

f) Zou de conclusie hetzelfde zijn geweest bij $\alpha = 5\%$?

$$P(X \geq g) = 1 - P(X \leq (g - 1)) = 0.05. \text{ Met de GR: } g = 8 \Rightarrow 1 - P > 0.05, \text{ en } g = 9 \Rightarrow 1 - P < 0.05.$$

Dus bij $\alpha = 5\%$ nemen we aan dat C. gegokt heeft.

Een commercieel voorbeeld:

- Keuze van de steekproefgrootte,

- Keuze van de hypothese.

Je hebt een partij bestaande voor de helft uit deugdelijke producten en voor de resterende helft uit

ondeugdelijke producten. Voor de verkoop moet je de deugdelijke van de ondeugdelijke scheiden. Een hele klus. Een steekproef ligt voor de hand. Hoe groot moet die steekproef zijn? Uiteindelijk gaat het om de kosten en de baten.

Er liggen twee vragen voor:

- hoeveel kost het uitzoeken? $\Rightarrow \text{€}1000$.

-hoeveel bedraagt de schade als de partij niet onderzocht wordt en niet blijkt te deugen? $\text{€}100000$.

Hieruit volgt dat je een risico mag nemen van $\leq 1\%$.

Een statistische formulering: als de partij ondeugdelijk is de verwachtingswaarde van het verlies $\text{€}1000$.

Hoe groot moet de steekproef zijn? We hebben een binomiale verdeling: kruis of munt.

We nemen een steekproef en stellen dat voor een kans $\leq 1\%$, we achtereenvolgens 7 deugdelijke

exemplaren moeten trekken $\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128} < 1\%$. Dus de steekproef wordt $n = 7$. Is dit alles? Neen, we noemden kosten en baten. We moeten een idee hebben wat de steekproef kost. Stel dat het onderzoeken van 1 exemplaar $\text{€}1$, kost.

Na een steekproef ter grootte van n , is de kans op een foutieve beslissing $\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (de kans om uit een vaas met voor de helft witte ballen n keer achter elkaar een witte bal te trekken). Een foutieve beslissing betekent voor het bedrijf een verlies van $\text{€}100000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Een steekproef van n kost $\text{€}n$. Een gezamenlijk verlies van $100000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + n$.

Dit verlies wil je zo klein mogelijk houden. Door een geschikte keuze van n , kun je het verlies zo klein mogelijk houden. Dus: bepaal het minimum van de verlies functie $F(n) = 100000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + n$.

Dit kan je op bijvoorbeeld twee manieren doen:

i) door de functie te tekenen met de GR of de app van WolframAlpha, of ii) de functie differentiëren en het resultaat gelijk aan nul te stellen.

Differentiëren: $\frac{dF}{dn} = 0 \Rightarrow 2^n = 10^5 \cdot \ln 2 \Rightarrow n = 16$. Het verwachte verlies bedraagt $\text{€}17.53$ indien alle 16 exemplaren deugdelijk blijken te zijn. Mocht er van de steekproef van 16 toch één ondeugdelijk zijn, dan moet de hele partij worden uitgezocht.

Let op: bij het differentiëren heb ik gebruik gemaakt van: $100000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 10^5 e^{-n \cdot \ln 2}$.

• Oefenen

De opgaven van § 2

Blok 10 Les 3 Eenzijdig of tweezijdig toetsen. One- or two-sided tests

Deze les sluit aan bij paragraaf 2 vanaf bladzijde 10 van Hypothese Toetsen van de Wageningse Methode, 2013.

• Kop of munt

Opgave 16 § 2 Kop of Munt met Kroonkurk

Kun je zuiver 'Kop of Munt' werpen met een kroonkurk? De Hypothese is dan: $p = \frac{1}{2}$.



Gooi 50 keer en tel het aantal keren dat de kurk in stand 1 (rand omhoog) valt.

Model:

X is het aantal keren dat de kurk in stand 1 valt

$$H_0: p = 0.5$$

$$H_1: p \neq 0.5, \text{ dus: } p > 0.5 \text{ of } p < 0.5$$

$$\alpha = 0.05.$$

Je test tweezijdig: je verworpt H_0 als X onwaarschijnlijk hoog is, $X = 44$, ($p > 0.5$) of onwaarschijnlijk laag is, $X = 8$, ($p < 0.5$).

→ Het kritieke gebied bestaat uit twee (test tweezijdig) stukken, elk met $\alpha = 0.025$.

Bereken g (grenswaarde) zodat $P(X \leq g) < 0.025$ en bereken g zodat $P(X \geq g) < 0.025$

Weer proberen: eerst de 'linkerkant' van de binomiale verdeling

$$\text{Binomcdf}(50, 0.5, 18) = 0.0325 \text{ en } \text{Binomcdf}(50, 0.5, 17) = 0.0164$$

nu de rechterkant

$$1 - \text{binomiaal}(50, 0.5, 31) = 0.032 \text{ en } 1 - \text{binomiaal}(50, 0.5, 32) = 0.0164$$

Het kritieke gebied is: $0 \leq X \leq 17$ of $33 \leq X \leq 50$.

Stel dat de kroonkurk 18 keer in stand 1 valt, dan verwerp je de nulhypothese niet. Als $X=34$, verwerp je de nulhypothese wel. Ook als $X=15$.

H_0 wordt verworpen als X een erg grote waarde heeft, maar ook als X een erg kleine waarde heeft. Dat komt omdat $p \neq 0.5$ de alternatieve hypothese is. We spreken dan van een tweezijdige toets.

- **Eenzijdig of tweezijdig toetsen**

Afhankelijk van de situatie kies je voor een eenzijdige of een tweezijdige toets.

Nulhypothese $H_0: p = p_0$.

Significantieniveau α .

- *Eenzijdig toetsen, links $H_1: p < p_0$*

Kritiekgebied: $P(X \leq g) < \alpha$

- *Eenzijdig toetsen, rechts $H_1: p > p_0$*

Kritiekgebied: $P(X \geq g) < \alpha$

- *Tweezijdig toetsen, $H_1: p \neq p_0$*

Kritiekgebied: $P(X \leq g) < \alpha/2$ of $P(X \geq g) = 1 - P(X < g) < \alpha/2$.

Uiteraard is bij de tweezijdige toets g "links" een ander getal dan g "rechts".

Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.

Opgave 17, § 2 Vervolg kop of munt met kroonkurk, Opgave 16

In opgave 16 hebben we gezien dat je, bij een significantieniveau van 5%, op grond van 18 keer stand 1 bij 50 worpen met de kroonkurk H_0 niet kunt verwerpen: 18 zit niet in het kritieke gebied. We doen nog een serie van 50 worpen. Het resultaat is 20 keer stand 1. Dus weer geen resultaat waarbij H_0 verworpen wordt (bij $\alpha = 5\%$). Maar het valt wel op dat de afwijking van 25 (het, onder H_0 , te verwachten aantal: $p = \frac{1}{2}$) dezelfde kant, stand 1, op is. We voegen nu de twee proeven samen. We hebben dan een serie van 100 worpen waarbij 38 (18+20) keer stand 1 wordt gegooit.

a) Bereken het (tweezijdige) kritieke gebied voor de serie van 100 worpen met $\alpha = 5\%$.

Het linker gebied $P(X \leq g) = 0.025$.

$$\text{Binomcdf}\left(100, \frac{1}{2}, g\right) = 0.025.$$

Proberen:

Het linker gebied: $g = 39$, P-cumulatief is 0.0176; en $g = 40$, P-cumulatief is 0.0284. Het kritieke gebied is dus $0 < g \leq 39$.

Het rechter gebied: $P(X \geq g) = 1 - P[X \leq (g - 1)]$.

Proberen:

Het rechter gebied: $g - 1 = 60 \Rightarrow 1 - 0.9824 = 0.0176$; $g - 1 = 59 \Rightarrow 1 - 0.9716 = 0.0284$.

Het valt op dat je voor links en rechts dezelfde getallen vindt. De binomiale verdeling benadert de normale verdeling.

b) Ga na dat op grond van het resultaat “38 keer stand 1”, H_0 nu wel verworpen wordt.

Aangezien 38 nu wel in het kritieke gebied valt, wordt H_0 verworpen.

Opgave 18, § 2 een bordspel:

Bij een spelletje *Mens erger je niet* heeft H. flink verloren. Volgens H. ligt dit aan de dobbelsteen; die zou niet helemaal in orde zijn. H. had bij het spel opvallend weinig zessen gegooi, terwijl M. juist erg vaak een zes gooide. H. heeft op school net voor het eerst van een hypothesetoets gehoord en besluit de kennis te gebruiken.

a) H. besluit een tweezijdige toets op te stellen. Ben jij het daarmee eens?

Ja, zonder voldoende kennis of gebrek aan kennis, kies je onbevooroordeeld voor een tweezijdige toets.

b) Welke hypothesen stelt H. op?

Het betreft een dobbelsteen: $H_0: p = \frac{1}{6}$; $H_1: p \neq \frac{1}{6}$.

c) Wat is het kritieke gebied bij $\alpha = 0.1$?

Het linker gebied $P(X \leq g) = 0.05$, $\text{Binomcdf}\left(100, \frac{1}{6}, g\right) = 0.05$.

Start met $g = 14 \therefore P(X \leq 14) = 0.287$; $g = 12 \therefore P(X \leq 12) = 0.1297$, en $g = 10 \therefore P(X \leq 10) = 0.0427$.

Dus $g \leq 10$.

Het rechter gebied: $P(X \geq g) = 1 - P[X \leq (g - 1)]$.

Met proberen vind je: $g \geq 24$.

d) Na de 100 worpen blijkt H. 23 keer een zes te hebben gegooid.

De alternatieve hypothese $H_1: p \neq \frac{1}{6}$, wordt niet geaccepteerd.

Opgave 19 § 2

Bij een hypothese toets is de toetsingsgrootte Y binomiaal verdeeld met $n=70$.

$H_0: p = 0.4$, $H_1: p \neq 0.4$ en $\alpha = 0.05$.

a) Wat is het kritieke gebied?

$E(Y) = n \cdot p = 0.4 \cdot 70 = 28$. Bij het beoordelen van hypothesen is het van belang om op de verwachtingswaarde te letten. Bij verrassende afwijkingen van deze waarde, bij een steekproef, kan het nodig zijn de hypothese, H_0 , aan te passen, H_1 .

Het linkerdeel van het kritieke gebied: $P(Y \leq g) \leq 0.025$. Start met $Y = 25$: $\text{binomcdf}(70, 0.4, 25) = P(Y) = 0.27$. Een wat grotere stap: $Y = 20 \Rightarrow \text{binomcdf}(70, 0.4, 20) = 0.0318$; $Y = 19 \Rightarrow \text{binomcdf}(70, 0.4, 19) = 0.0174$.

Het linker kritieke gebied is: $(0, 1, \dots, 19)$.

Het rechterdeel van het kritieke gebied: $P(Y \geq g) \leq 1 - P(Y \leq (g - 1)) = 1 - \text{binomcdf}(70, 0.4, Y)$. Start met

$Y - 1 = 36 \Rightarrow 1 - \text{binomcdf}(70, 0.4, 36) \Rightarrow 0.0199 < 0.025$. Met $Y = 35 \Rightarrow$

$1 - \text{binomcdf}(70, 0.4, 35) \Rightarrow 0.0347 > 0.025$.

Nota bene: $(g - 1) = 36 \therefore g (\equiv Y) = 37$.

Het rechter kritieke gebied is: $(37, \dots, 70)$. De hypothese H_1 wordt niet geaccepteerd

b) $H_0: p = 0.4$, $H_1: p > 0.4$ en $\alpha = 0.05$.

Wat is het kritieke gebied? We weten al dat $g - 1 = 35 \Rightarrow 1 - \text{binomcdf}(70, 0.4, 35) \Rightarrow 0.0347 < 0.05$ in het kritieke gebied ligt, zie a). In dit geval wordt de alternatieve hypothese H_1 geaccepteerd bij een steekproef van $Y = 36$.

c) $H_0: p = 0.4$, $H_1: p < 0.4$ en $\alpha = 0.05$. Wat is het kritieke gebied?

Onder a) hebben we al uitgerekend dat $\text{binomcdf}(70, 0.4, 20) = 0.0318 < 0.05$, in het kritieke gebied ligt. Met

$\text{binomcdf}(70, 0.4, 21) = 0.0546 > 0.05 \therefore 21$ ligt niet in het kritieke gebied.

Overzichtsvraag, hypothesen toetsen:

A en B zijn het niet met elkaar eens over een succeskans p . A beweert dat $p = \frac{1}{4}$. We hebben een binomiale verdeling: wel of geen succes.

Om het geschil te beslechten, nemen ze een steekproef van grootte 100. Als significantie niveau nemen ze 5%.

a) B beweert $p < \frac{1}{4}$. Dus $H_0: p = \frac{1}{4}$, en $H_1: p < \frac{1}{4}$. Een éézijdige linker toets.

De stochastische variabele X is het aantal keren succes bij 100 keer proberen. Het kritieke gebied ligt links.

Dus, voor welke waarde van k : $P(X \leq k) = 0.05$?

Proberen met de GR: binomcdf. Je moet een start getal kiezen kleiner dan 25, de verwachtingswaarde $E(X) = n \cdot p$.

Begin met $X \leq 20$: binomcdf(100, 0.25, 20)=0.149; binomcdf(100, 0.25, 18)= 0.063;

binomcdf(100, 0.25, 17)= 0.0376. Dus $P(X \leq 17)=0.0376$. Het kritieke gebied is: (0, 1, ..., 17).

b) B beweert $p > \frac{1}{4}$. Dus $H_0: p = \frac{1}{4}$, en $H_1: p > \frac{1}{4}$. Een éézijdige rechter toets.

Dus, voor welke waarde van k : $P(X \geq k) = 0.05$?

We weten: $P(X \geq k) = 1 - P[X \leq (k - 1)]$. Proberen. Je moet een start getal kiezen groter dan 25, de verwachtingswaarde $E(X) = n \cdot p$.

Start met 34. Je komt uit bij $P(X \geq 33) = 1 - P[X \leq 32] = 0.0446$.

Het kritieke gebied is: (33, 34, ..., 100).

c) B beweert $p \neq \frac{1}{4}$. Dus $H_0: p = \frac{1}{4}$, en $H_1: p \neq \frac{1}{4}$. Een tweezijdige toets.

We moeten twee toetsen uitvoeren: $P(X \leq k) = 0.025$, en met de aanpak onder a) de grootste waarde van k bepalen.

Dan vind je: $P(X \leq 16) = 0.0211$.

Voor: $P(X \geq k) = 1 - P[X \leq (k - 1)] \Rightarrow P(X \geq 35) = 0.0164$.

Nota bene: $P(X \geq 34) = 0.0276$.

Het kritieke gebied bestaat uit twee stukken. Samengevat: (0, 1, 2, ..., 16, 35, 36, ..., 100).

Opmerking: bij bovenstaande opgaven voor $n = 100$, kan de binomiale verdeling goed worden benaderd met

de normale verdeling. Het computerprogramma *De Normale Verdeling* op de schijf statistiek van de

Wageningse Methode rekt bij een toets het kritieke gebied in de verschillende gevallen uit. Dus links, rechts en tweezijdig.

- Oefenen

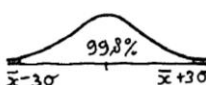
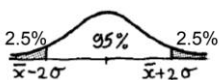
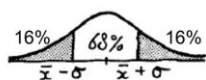
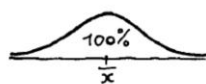
Maken: - Opgaven § 2.

Blok 10 Les 4 De normale verdeling, the normal distribution

Deze les sluit aan bij paragraaf 3 vanaf bladzijde 10 van Hypothese Toetsen van de Wageningse Methode, 2013.

- Het gebruik van de standaardafwijking σ .

Door σ te gebruiken heb je een goede controle na een berekening met de Grafische Rekenmachine.



Bijvoorbeeld(zie bovenstaande verdelingen):

$$- P(X \geq \mu + 2\sigma) = 0.025$$

$$- P(X \leq \mu - 2\sigma) = 0.025$$

→ Bij tweezijdig toetsen en $\alpha = 0.05$ zit de grenswaarde g in de buurt van $\mu + 2\sigma$ of $\mu - 2\sigma$, zie bovenstaande figuur.

→ Bij eenzijdig toetsen en $\alpha = 0.05$ zit de grenswaarde g in de buurt van $\mu + 1.6\sigma$ of $\mu - 1.6\sigma$.

- **De normale verdeling**

Opgave 20 § 3, eenzijdig links

$$H_0: \mu = 83.4 \text{ en } H_1: \mu < 83.4$$

$$\sigma = 4.6$$

$$X = 74.5$$

a) Bereken onder aanname van H_0 , de kans dat $X \leq 74.5$.

$$\rightarrow \mu - X = 83.4 - 74.5 = 8.9 \text{ en } 8.9 \text{ is ongeveer } 2\sigma = 9.2.$$

Met wat we weten van de normale verdeling, weten we dus:

$$P(X \leq 74.5) \approx 0.025.$$

Maar dat kan nauwkeuriger: met de GR vinden we: $\text{normcdf}(0, 74.5, 83.4, 4.6) = 0.0265$.

b) Neem $\alpha = 0.05$. Wordt bij het steekproef resultaat $X \leq 74.5$, dus $P(X \leq 74.5) = 0.0265$, de nulhypothese H_0 verworpen?

De grenswaarde g kunnen we ook vinden met de inverse functie op de GR:

$$\text{invNorm}(\alpha, \mu, \sigma) = \text{invNorm}(0.05, 83.4, 4.6) = 75.83 > 74.5.$$

Een controle berekening geeft voor het linker oppervlak voor de normale verdeling:

$$\text{normcdf}(0, 75.8, 83.4, 4.6) = 0.0492 < \alpha (= 0.05).$$

We verwerpen de 0-hypothese H_0 .

c) Wat is het kritieke gebied?

Het kritieke gebied is de verzameling getallen ≤ 75.83 .

Opgave 21 § 3 eenzijdig rechts

$$H_0: \mu = 83.4 \text{ en } H_1: \mu > 83.4. \text{ Dus twee hypothesen voor het gemiddelde.}$$

μ is onbekend.

$$\sigma = 4.6,$$

$$\alpha = 0.05,$$

$$X = 90.7.$$

a) Wat is het kritieke gebied?

Met de grenswaarde g en de GR:

$$\text{invNorm}(\alpha, \mu, \sigma) = \text{invNorm}(0.05, 83.4, 4.6) = 75.8. \text{ Dit is de linker grenswaarde voor 5\%.}$$

$$\text{De rechter grenswaarde } g = \mu + (\mu - 75.8) = 83.4 + (83.4 - 75.8) = 91.$$

De verzameling getallen ≥ 91 , is het kritieke gebied.

b) Wordt de hypothese $H_1: \mu > 83.4$ geaccepteerd bij het steekproef resultaat $X = 90.7$? Nee, want $90.7 < 91$.

In voorgaande analyse is gebruik gemaakt van de GR (Grafische Rekenmachine). Het kan ook zonder de GR.

$X - \mu = 90.7 - 83.4 = 7.3$ en $7.3 \approx 1.5\sigma$. Met de vuist regel voor de normale verdeling weten we dat de grenswaarde bij eenzijdig toetsen rechts en $\alpha = 0.05$, de grenswaarde g in de buurt van $\mu + 1.6\sigma$ ligt. Op grond van deze regel verwerpen we de 0-hypothese H_0 niet.

In de slides van deze Les 4 staat: "Dus $P(X \geq 90.7) \approx 0.1 > \alpha$."

Ok, H_0 wordt niet verworpen, maar waar komt 0.1 vandaan? Het vermoeden is dat 0.1 gevonden is op de volgende wijze: 1.5σ ligt tussen σ en 2σ . Dus tussen 16% en 2.5%. Gemiddeld wordt dit:

$$\frac{18.5}{2} = 9.25\% \approx 0.1.$$

Nauwkeurig:

$$\text{Met de GR: } 1 - \text{normcdf}(0, 90.7, 83.4, 4.6) = 0.0563,$$

Dus buiten het kritieke gebied.

De 0-hypothese H_0 wordt niet verworpen.

Opgave 22 § 3 tweezijdig (zie verdelingen op voorgaande blz 49)

Weer twee hypothesen:

$$H_0: \mu = 83.4 \text{ en } H_1: \mu \neq 83.4$$

$$\sigma = 4.6$$

$$\alpha = 0.05$$

$$X = 92.7$$

a) Wat is het kritieke gebied bij $\alpha = 0.05$?

We werken direct met de grenswaarde en invNorm.

Met de GR:

$$\text{invNorm}(\alpha, \mu, \sigma) = \text{invNorm}(0.025, 83.4, 4.6) \approx 74.4$$

De linker grenswaarde is 74.4

$$\text{De rechter grenswaarde is } 83.4 + (83.4 - 74.4) = 92.4.$$

Het kritieke gebied is de verzameling getallen ≤ 74.4 of ≥ 92.4 .

b) Wordt de hypothese $H_1: \mu \neq 83.4$, geaccepteerd bij het steekproefresultaat $X = 92.7$?

Aangezien de rechter grenswaarde $92.4 < 92.7$, wordt $H_1: \mu \neq 83.4$, geaccepteerd.

We verwerpen de 0-hypothese H_0 .

- **Steekproeven en de $\sqrt{n}$ – wet**

$X_1, X_2, \dots, X_n$ zijn onafhankelijke stochastische variabelen die elk normaal verdeeld zijn met gemiddelden $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ en standaarddeviaties $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$

$\rightarrow X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ is normaal verdeeld met $\mu_X = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$ en

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2}$$

Geldt in het bijzondere geval dat $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = \mu$ en dat

$$\sigma_1 =$$

$\sigma_2 = \dots = \sigma_n = \sigma$ dan is $\mu_X = n \cdot \mu$ en $\sigma_X = \sqrt{n \cdot \sigma^2} = \sqrt{n} \cdot \sigma$

- **Zakken aardappelen**

Opgave 23 § 3 Het statistische model:

Zakken met aardappelen van 2.5 kg bevatten natuurlijk zelden precies 2500 gram. Klanten beweren vaak dat er te weinig in de zakken zit. Een leverancier beweert dat er in zijn zakken van 2500 gram (2.5 kg) gemiddeld 2540 gram aardappelen zit met een standaardafwijking van 80 gram. Een consumentenvereniging doet een onderzoek. In verschillende winkels worden in totaal 40 zakken van 2500 gram gekocht. De totale inhoud T van de zakken wordt gewogen. We mogen aannemen dat T normaal verdeeld is.

T is het totale gewicht van 40 zakken aardappelen.

Het gemiddelde gewicht van een zak aardappelen is 2.54 kg. De standaardafwijking $\sigma = 0.08$ kg.

a) T is normaal verdeeld met $\mu = 40 \times 2.54 = 101.6$ kg.

b) Heb je hier te maken met een éézijdige of een tweezijdige toets?

Een éézijdige toets. De klanten en de consumentenvereniging denken dat er minder dan 101.6 kg in de 40 zakken zit.

c) Welke twee hypothesen staan hier tegenover elkaar?

$$H_0: \mu = 101.6 \text{ en } H_1: \mu < 101.6.$$

d) Hoe groot is $\text{Sd}(T)$ als $H_0: \mu = 101.6$, juist is?

We mogen gebruik maken van de $\sqrt{n}$ – wet.

De standaard afwijking van het totale gewicht is, met behulp van de $\sqrt{n}$ – wet:

$$\sigma_T = \sqrt{n} \cdot \sigma = \sqrt{40} \times 80 = 0.506 \text{ kg.}$$

e) Bepaal het kritieke gebied bij een significantie niveau 5% ($\alpha = 0.05$).

Met de GR, vinden we voor het kritieke gebied links:

$$\text{Grenswaarde } g = \text{invNorm}(0.05, 101.6, 0.5060) = 100.77.$$

Het kritieke gebied is de verzameling getallen ≤ 100.77 .

f) Het totale gewicht bleek 100.84 kg te zijn. De ontevreden klanten worden niet in het gelijk gesteld bij een significantieniveau van 5%.

- **Omzet**

Opgave 26 § 3 Omzet:

μ is onbekend, σ en Z – waarden zijn bekend.

X is de wekelijkse omzet.

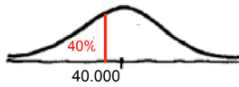
X is normaal verdeeld. Dit is geen realistische aanname maar we rekenen er toch mee.

De standaardafwijking: $\sigma = € 6515$.

In 6 van de 10 weken is de omzet hoger dan € 40.000.

Dus in 4 van de 10 weken is de omzet lager dan € 40.000 : in 40% van het aantal waarnemingen is de omzet lager dan € 40.000.

a) Bereken $E(X) = \mu$



Voor de gestandaardiseerde normaalverdeling geldt dan $Z = 0.4$. Dit is een verwarrend notatie, want 40% (of 0.4) is het oppervlak onder de curve van de normale verdeling, dus in plaats van z had er $\phi(z)$ moeten staan (zie bijlage z -waarden)

We kunnen met de tabel voor de z -waarden ($\phi(z)$) werken. Het gemiddelde van $\phi(z)$ is 50% of 0.5.

$\phi(z) = 0.4$ ligt 0.1 onder de gemiddelde waarde. Uit de tabel voor het oppervlak vind je dan

$0.25 < |z| < 0.26$. Maar we kunnen dit ook met de GR bepalen door gebruik te maken van

$\text{invNorm}(\alpha, \mu, \sigma)$. We doen dan alsof we met $\phi(z) \leq .4$, het kritieke gebied bedoelen. Je zult dan

zien dat z , de grenswaarde, negatief kan worden. Zo hebben we dat geleerd in Blok 5: $z = 0 = X - \mu$.

Dus met $\text{invNorm}(0.4, 0, 1) = -0.253$. ($0.25 < |-0.253| < 0.26$).

Nu kunnen we de verwachtingswaarde $E(X) = \mu$ berekenen.

Definitie van $z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ en het gemiddelde van z is 0: $\mu_z = 0$ en de standaarddeviatie $\sigma_z = 1$.

Hieruit volgt: $\mu = X - \sigma \cdot z$. In het rechter lid van deze uitdrukking staan bekende grootheden: $\mu = 40.000 - 6515 \times (-0.253) = €41650$.

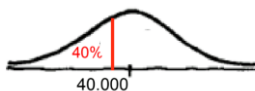
$E(X) = \mu = €41650$.

b) De eigenaar van een andere winkel beweert dat zijn omzet gemiddeld €45000, per week is met een standaardafwijking van €5000, H_0 .

Een accountant constateert dat in de afgelopen vier weken de totale omzet €168.743.36 was en

vermoedt dat de gemiddelde weekomzet lager is dan €45000, H_1 .

In dit deel van de opgave gaat het om het toetsen van een hypothese, waarbij gebruik gemaakt wordt van de $\sqrt{n}$ -wet.



Dus X valt niet in het kritieke gebied.

Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.

Opgave 25 § 3 Taal test.

Met deze test wordt onderzocht of iemand iets afweet van een bepaalde taal. De test bestaat uit 10 vragen. Bij iedere vraag zijn er drie antwoorden in de vreemde taal gegeven met de bijbehorende Nederlandse woorden, maar die staan in een willekeurige volgorde.

Bijvoorbeeld

Vreemde taal	Nederlands
pour	kat
chat	voor
pauvre	arm

De proefpersoon moet bij elke vraag de juiste volgorde van de woorden aangegeven door één van de zes mogelijke volgordes te kiezen. De proefpersoon krijgt dan zoveel punten als er woorden goed geplaatst zijn. Als de proefpersoon het doet zoals in bovenstaande tabel (de vreemde taal is Frans) dan krijgt de proefpersoon 1 punt.

X_1 is het aantal punten dat bij de eerste vraag gescoord wordt.

Neem even aan, H_0 , dat de proefpersoon niets van de vreemde taal weet.

a) Ga na dat $P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$.

Bij de eerste keuze 3 mogelijkheden. Bij de tweede keuze 2 mogelijkheden en bij de derde keuze dus nog een

mogelijkheid. Totaal 3! Mogelijkheden. Door te tellen: je kan 3 keer 1 goed kiezen $\therefore P(X_1 = 1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

b) Geef de kansverdeling van X_1 en ga na dat $E(X_1) = 1$, en $Var(X_1) = 1$.

0 keer goed kan 2 keer, dus $P(X_1 = 0) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $P(X_1 = 1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; 2 keer goed is hetzelfde als 3 keer goed $\Rightarrow (P(X_1 = 2) = 0 \text{ en } P(X_1 = 3) = \frac{1}{6})$.

$$E(X_1) = \sum_k P(X_1 = k) \cdot k = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 3 = 1.$$

$$Var(X_1) = \sum_k P(X_1 = k) \cdot (k - E(X_1))^2 = \frac{1}{3} \cdot (0 - 1)^2 + \frac{1}{2} \cdot (1 - 1)^2 + \frac{1}{6} \cdot (3 - 1)^2 = 1.$$

c) Laat T het totaal aantal punten zijn dat de proefpersoon behaalt bij 10 vragen, dus $T = X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$.

Bereken $P(T = 0)$, $P(T = 1)$, $P(T = 28)$ en $P(T = 30)$. Binomiale verdeling: $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

$P(T = 0) = \frac{1}{3}$, deze kans is onder b) uitgerekend. Maar nu bij 10 vragen en 0 goed. Binomiale verdeling, dus $(\frac{1}{3})^{10}$.

$P(T = 1)$: van de 10 vragen zijn er 9 fout beantwoord en 1 goed. Dit kan op 10 manieren:

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{3})^9.$$

Nu $T = 28$, hoe bereik je 28 punten? Tellen: $9 \cdot 3 = 27$, 9 vragen met 3 elementen(zie het voorbeeld) goed beantwoord en 1 vraag van de drie goed is dus 1 punt. Deze combinatie is de enige mogelijkheid om 28 punten te behalen $\therefore$

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{6})^9. \text{ Als laatste } T = 30, \text{ alles goed } (\frac{1}{6})^{10}.$$

d) Bereken $E(T)$ en $Var(T)$.

$$E(T) = 10E(X_1) = 10.$$

$$Var(T) = 10 Var(X_1) = 10.$$

e) Waarom is T bij benadering normaal verdeeld?

De centrale limietstelling: als onafhankelijke stochasten bij elkaar opgeteld worden, dan gaat de verdeling steeds meer op de normale verdeling lijken, naarmate het aantal stochasten toeneemt.

f) Bereken de normale verdeling van $P(T = 15)$.

$$\text{normcdf}(14.5, 15.5, 10, \sqrt{10}) = 0.0364.$$

g) We willen met een hypothese toets onderzoeken of de proefpersoon wel of niets van de taal afweet.

De nulhypothese $H_0: \mu = 10 [= E(T)]$.

De alternatieve hypothese $H_1: \mu > 10$.

h) De proefpersoon scoort in totaal 17 punten. Is deze score bij een significantieniveau van 5% voldoende om H_0 (de proefpersoon weet niets van de vreemde taal af) te verwerpen?

Met $\text{invNorm}(0.95, 10, \sqrt{10})$ vind je het kritieke gebied voor de verzameling van de getallen ≥ 15.2 Ja, de nulhypothese wordt verworpen. Ook al verhogen we 15.2 tot 15.7 in verband met de continuïteitscorrectie.

Opgave 28:

In een kogellager fabriek worden stalen kogeltjes gemaakt die een diameter tussen 3.98 en 4.02 mm dienen te hebben. Door middel van twee zeven worden de kogeltjes gesorteerd. Het is inmiddels bekend dat de diameter van de kogeltjes normaal verdeeld is met standaardafwijking $\sigma = 0.008$ mm, maar het gemiddelde μ is onbekend. Van een aselechte steekproef van 250 kogeltjes worden er 14 uit gezeefd omdat ze te dun of te dik waren.

a) Neem aan dat $\mu = 4.005$ mm, de nul Hypothese. Bereken de kans dat een aselekt kogeltje een te grote of te kleine diameter heeft. Een tweezijdige toets.

Linkerzijde: De kogeltjes die kleiner zijn dan 3.98 mm vallen af. Met de GR:

$$P(X < 3.98) = \text{normcdf}(0, 3.98, 4.005, 0.008) = 0.00089.$$

Rechterzijde: De kogeltjes groter dan 4.02 vallen af. Met de GR:

$$P(X > 4.02) = 1 - \text{normcdf}(0, 4.02, 4.005, 0.008) = 0.03039.$$

$$\text{Dus } P(X < 3.98) + P(X > 4.02) = 0.00089 + 0.03039 = 0.0313.$$

Nota Bene: het linker kritieke gebied is veel kleiner dan het rechter kritieke gebied.

b) Wordt op grond van de uitkomst van de steekproef de nul Hypothese $H_0: \mu = 4.005$ verworpen? Neem als significantieniveau $\alpha = 0.05$.

Ik neem aan dat $\alpha = 0.05$ in twee gelijke delen wordt verdeeld zoals te doen gebruikelijk is. Dit deel van het

vraagstuk is vrij lastig: is het een normale verdeling of een binomiale verdeling? Blijven we met de normale verdeling werken, dan moet H_0 worden verworpen. Ik ga er vanuit dat we met de binomiale verdeling moeten werken, dus discreet.

Dan: $P(X \geq 14 | n = 250, p = 0.0313) = 1 - P(X \leq 13 | n = 250, p = 0.0313) = 0.0271 > \alpha/2 \therefore H_0$ wordt niet verworpen. Opm: $P(X \leq 13 | n = 250, p = 0.0313) = \text{binomcdf}(250, 0.0313, 13)$.

Opgave 29 Reactietijd van een automobilist(e):

De reactietijd van een automobiliste is de tijd die zij nodig heeft om te reageren op iets wat zij ziet gebeuren. Voor automobilisten van 18 tot en met 40 jaar is de reactietijd normaal verdeeld met een gemiddelde van 0.4 seconde en standaardafwijking van 0.05 seconde.

a) Bereken hoeveel tijd 90% van de 30-jarige automobilisten nodig hebben om te reageren.

Met de GR: $\text{invNorm}(0.9, 0.4, 0.05) = 0.464$.

Opmerking: dertig jarige geeft alleen maar aan dat we de leeftijdscategorie 18 tot en met 40 jaar analyseren.

b) Het is bekend dat de reactietijd toeneemt na alcohol gebruik. Iemand uit de categorie 18 tot en met 40 jaar (de dertig-jarige) beweert dat haar reactietijd niet verandert na beperkt alcohol gebruik. Men besluit een test te doen. Hierbij blijkt de reactietijd 0.49 seconde te zijn. Onderzoek of deze reactietijd aanleiding geeft om, met een significantieniveau van 5%, de bewering van de automobiliste te verwerpen.

Dus: $H_0 \Rightarrow \mu = 0.4$ seconde en $\sigma = 0.05$ seconde.

Het kritieke gebied:

$P(X > g) = 1 - P(X \leq (1 - g)) = 1 - \text{normcdf}(0.49, 0.4, 0.05) = 0.0359 < 0.05$. In het kritieke gebied. Er is voldoende aanleiding de bewering te verwerpen.

Nota bene: er is altijd aanleiding om de bewering te verwerpen: Rij niet als je gedronken hebt!

Overzichtsvraag:

De levensduur van gloeilampen is normaal verdeeld met gemiddeld 1200 branduren en standaardafwijking 160 branduren.

a) Een willekeurige gloeilamp ging al na 904 branduren stuk.

Is dat voldoende reden om het gemiddelde van 1200 branduren te verwerpen, bij een significantieniveau van 5%, $\alpha = 0.05$?

$H_0: \mu = 1200$, en $H_1: \mu < 1200$. Een hypothese toets ééNZijdig links.

We gaan nu de kans, $P(T < 904)$, berekenen bij een normale verdeling met $\mu = 1200$ en $\sigma = 160$:

$P(T < 904) = \text{normalcdf}(0, 904, 1200, 160) = 0.0322 < 0.05$.

We verwerpen de nulhypothese H_0 .

b) Vier willekeurige gloeilampen hadden een gemiddelde levensduur van 1084 branduren.

Is dat voldoende reden om het gemiddelde van 1200 branduren te verwerpen, bij een significantieniveau van 5%?

De verwachte levensduur van 4 lampen is: $E(T) = \sum_i E(T_i) = 4 \cdot 1200 = 4800$ branduren.

De standaard afwijking is $\sqrt{n} \cdot \sigma = \sqrt{4} \cdot 160 = 320$.

Het gemeten gemiddelde van de levensduur van de 4 lampen is 1084, dus de som van de levensduren is $4 \cdot 1084 = 4336$.

De normale verdeling is $\mu = 4800$ en $\sigma = 320$:

$P(T < 4336) = \text{normalcdf}(0, 1084, 4800, 320) = 0.0735 > 0.05$. Buiten het kritieke gebied.

De nulhypothese wordt niet verworpen.

- **Oefenen**

Maken: De opgaven van paragraaf 3.

Blok 10 De Toets: Hypothese Toetsen

Opgave 1

J. doet mee aan een loterij, die elke week wordt gehouden. De kans op een prijs is gelijk aan $\frac{1}{7}$.

J. speelt een jaar lang elke week mee.

X , de stochast, is het aantal keren dat J. wint.

a) Welke waarden kan X aannemen?

Het spel wordt een jaar lang wekelijks gespeeld. Dus $X = 0, 1, 2, \dots, 52$.

b) leg uit dat je hier te maken hebt met een discrete kansrekening.

X zijn punten op de getallen lijn.

c) Bereken de kans dat J. meer dan 12 keer de prijs wint.

$$P(X > 12) = 1 - P(X \leq 12).$$

De binomiale verdeling:

$$P(X > 12) = 1 - P(X \leq 12) = 1 - \text{binomcdf}(n, p, x) =$$

$$= 1 - \text{binomcdf}\left(52, \frac{1}{7}, 12\right) = 0.0285.$$

Je kunt deze kansverdeling benaderen door de normaal verdeelde stochast U .

d) Bereken $E(U)$.

$$E(U) = n \cdot p = 52 \cdot \frac{1}{7} = 7.4286 = \mu.$$

e) Bereken $Sd(U)$.

$$Sd(U) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 2.524 = \sigma.$$

f) Bereken met behulp van de kansverdeling van U hoe groot de kans is om meer dan 10, maar minder dan 20 keer te winnen.

De kansverdeling van U is de normale verdeling. Hou rekening met de continuïteitscorrectie!

Dus:

$$\text{normalcdf}(\text{ondergrens}, \text{bovengrens}, \mu, \sigma) = \text{normalcdf}(10.5, 19.5, 7.4286, 2.524) = 0.1118.$$

Opgave 2

Een diepvriespak met ijsjes bevat volgens de verpakking 8 ijsjes. Neem aan dat het gewicht Y van een ijsje normaal verdeeld is met een gemiddelde μ van 45 gram en een standaardafwijking σ van 2 gram. Het totaalgewicht van het pak is T gram.

a) Bereken $E(T)$.

$$E(T) = 8 \cdot \mu = 360 \text{ gram}.$$

b) Bereken $Sd(T)$.

$$Sd(T) = \sqrt{8\sigma^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

c) Bereken $P(T \geq 355)$.

$$P(T \geq 355) = 1 - P(T \leq 354) = 1 - \text{normalcdf}(0, 354, 360, 4\sqrt{2}) = 0.8116.$$

Opgave 3

De inpakmachine vult pakken met hagelslag met een standaard deviatie van 2 gram. Helaas is men minder zeker van het gewicht waarmee de pakken gevuld worden. Het gewenste vulgewicht is 380 gram. De verpakking mag zeker niet te weinig bevatten maar ook niet te veel.

De kwaliteitsafdeling doet een steekproef van n is 30 pakken hagelslag. Het gewicht per pak wordt bepaald. Daarna wordt het gemiddelde gewicht bepaald.

a) Stel een hypothese toets op.

$\bar{X}$ is het gemiddelde gewicht.

$\bar{X}$ is normaal verdeeld met $\sigma = 2$.

$$H_0: \mu = 380$$

$$H_1: \mu \neq 380.$$

b) De kwaliteitsafdeling vindt in de steekproef een gemiddeld gewicht van 379.3 gram.

Onderzoek of de machine nog goed staat afgesteld, uitgaande van een significantieniveau van 5%. Een tweezijdige toets.

Met de Grafische rekenmachine:

$$P(\bar{X} \leq 379.3) = \text{normalcdf}(0, 379.3, 380, 2) = 0.0276 > \frac{0.05}{2}.$$

De nulhypothese H_0 wordt niet verworpen.

Opgave 4

Een set speelkaarten bestaat uit 52 kaarten, verdeeld in de soorten schoppen (k), harten (j), ruiten (i) en klaveren (h). Iedere soort bevat 13 kaarten, met de opdruk 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, boer, vrouw, heer of aas.

Het kaartspel bridge wordt gespeeld door 4 spelers, die ieder 13 kaarten krijgen.

Wanneer de kaarten aselekt worden gedeeld is de verwachtingswaarde van het aantal klaverkaarten dat een speler per spel krijgt gelijk aan 3.25 en de bijbehorende standaardafwijking gelijk aan 1.365.

Veel spelcomputers gebruiken het softwareprogramma 'Split' om het delen van de kaarten te stimuleren. B, vermoedt al een tijdje dat 'Split' B. te weinig klaverkaarten geeft.

Daarom houdt B. gedurende 100(= T) spellen bij, hoeveel klaverkaarten B. krijgt. Dat blijken er in totaal 302 te zijn.

Onderzoek of er voldoende aanleiding is om te veronderstellen dat het computerprogramma 'Split' B. te weinig klaverenkaarten geeft. Neem als significantieniveau 5%. Je kunt hierbij gebruik maken van het feit dat het totale aantal klaverenkaarten bij 100 spellen normaal verdeeld is.

$$H_0: \mu = 325,$$

$$H_1: \mu < 325.$$

De standaardafwijking bij $T = 100$ en een standaardafwijking per spel is 1.365, vinden we voor σ :

$$\sigma = 1.365 \cdot \sqrt{T} = 13.65.$$

We hebben nu alle ingrediënten om een mogelijke overschrijdingskans te berekenen.

Gebruik hiervoor weer de grafische rekenmachine.

$$P(X \leq 302.5) = \text{normalcdf}(0, 302.5, 325, 13.65) = 0.0496 < 0.05.$$

Er is voldoende aanleiding om de nul hypothese te verwerpen.

Het programma 'Split' geeft B. te weinig klaverenkaarten.

Nota Bene, we gebruiken 302.5 in plaats van 302 omdat kaarten discreet verdeeld zijn en er dus een continuïteitscorrectie moet worden gebruikt.

Opgave 5

Volgens een fabrikant is de stand-by tijd van de mobiele telefoons minstens 120 uur. De consumentenbond verwerpt de bewering van de fabrikant van de telefoons. Gebleken is dat bij een steekproef van lengte n de gemiddelde stand-by tijd 117.6 uur is. Hierbij is een significantie niveau van 2.5% genomen en is uitgegaan van een standaardafwijking van 5 uur.

Van hoeveel mobiele telefoons heeft de consumentenbond de stand-by tijd gemeten?

Fabrikant: $H_0, \mu \geq 120$,

Consumentenbond: $H_1 < 120$.

$$\bar{X} = 117.6.$$

$$P(\bar{X} \leq 117.6) \leq 0.025.$$

$$\text{normcdf}(0, n \cdot 117.6, n \cdot 120, 5\sqrt{n}) \leq 0.025$$

Met de Grafische Rekenmachine proberen $\Rightarrow n = 16.67$.

We kunnen ook de tabel voor de normale verdeling gebruiken: de z-waarden.

Het aantal keer de standaardafwijking σ dat een waarneming afwijkt van het gemiddelde heet de z-waarde:

$$z\text{-waarde} = \frac{\text{waarneming} - \text{gemiddelde}(\mu)}{\text{standaardafwijking}(\sigma)}.$$

Hoe groter de z-waarde, hoe uitzonderlijker de waarneming.

De 2σ -waarde voor 2.5% geeft voor $z = -1.96$.

Dus

$$1.96 = \frac{n \cdot \mu - E(T)}{\sigma(T)} = \frac{n \cdot 120 - n \cdot 117.6}{5\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{5 \cdot 1.96}{120 - 117.6} \right)^2 = 16.67.$$

Er zijn 17 mobiele telefoons getest.

Blok 11 Differentiaalvergelijkingen, Differential Equations

Blok 11 Les 1 Wat is een differentiaalvergelijking?

Deze les sluit aan bij de paragraaf 1 van Continue Dynamische Processen van de Wageningse Methode 2009

- De wereldbevolking



Stel dat de wereldbevolking met 1.1 % groeit.

$A(n)$ is het aantal mensen op de wereld in het jaar n .

$$A(2016) = 7.44 \times 10^9.$$

$$\text{Dan is } A(n+1) = A(n) \times 1.011$$

$$\text{En } A(n+k) = A(n) \times (1.011)^k$$

$$A(2050) = A(2016) \times (1.011)^{34} = 10.79 \times 10^9$$

Dat is iets meer dan 10 miljard(billion).

- De differentievergelijking

De jaarlijkse groei kun je berekenen met $A(n+1) = A(n) \cdot 1.011$

de differentievergelijking is, differentie $\Delta A(n)$,

$$\Delta A(n) = A(n+1) - A(n) =$$

$$= A(n) \cdot 1.011 - A(n) =$$

$$= A(n) \cdot (1.011 - 1) =$$

$$= 0.011 \cdot A(n)$$

De differentievergelijking is :

$$\Delta A(n) = 0.011 \cdot A(n)$$

Gevraagd:

Een functie $A(n)$ die voldoet aan $\Delta A(n) = 0.011 \cdot A(n)$

Oplossing:

$$A(n) = A(0) \cdot (1.011)^n.$$

Samenvattend:

De differentievergelijking is:

$$\Delta A(n) = 0.011 \cdot A(n)$$

$\Delta A(n)$ is de toename/afname van A in het jaar n .

Deze is evenredig met het aantal A in het jaar n .

- De wereldbevolking

(van discreet model naar continu model)

$N(t)$ is het aantal personen op het tijdstip t .

Δt is een klein tijdsinterval.

g is het aantal geboorten in dat tijdsinterval Δt .

s is het aantal sterfgevallen in Δt .

Hieruit volgt dat $\frac{g-s}{100}$ het groeipercentage is.

Aanname:

ΔN is evenredig met N , $\frac{g-s}{100}$ en met Δt .

$$\rightarrow \Delta N = \frac{g-s}{100} \cdot N \cdot \Delta t$$

$$\rightarrow \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{g-s}{100} \cdot N$$

Het zal duidelijk zijn dat N een functie van de tijd is $\rightarrow N = N(t)$. Het gaat er nu om de mate van verandering in N , the rate of change, te vinden.

De verandering in N , aangegeven met ΔN is:

$$\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t).$$

Om precies de mate van verandering te definiëren ten tijde van de tijd t moeten we Δt zo klein mogelijk maken. Natuurlijk, als we dat doen zal ΔN ook naar nul gaan.

Deel echter ΔN door Δt , dan kun je je voorstellen dat de verhouding tot een limiet nadert.

Dus, laat Δt naar 0 naderen, differential calculus,

$$\rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{g-s}{100} \cdot N \rightarrow \frac{dN}{dt} = \frac{g-s}{100} \cdot N$$

- De differentiaalvergelijking

$N(t)$ is het aantal personen op het tijdstip t .

Δt is een klein tijdsinterval.

g is het aantal geboorten in dat tijdsinterval Δt .

s is het aantal sterfgevallen in Δt .

Als je Δt naar 0 laat naderen gaat de differentievergelijking over in een differentiaalvergelijking.

$$\frac{dN}{dt} = \frac{g-s}{100} \times N = k \cdot N,$$

ook wel de Malthusiaanse groei genoemd (onder de aanname dat de groei evenredig is met N).

$\frac{dN}{dt}$ noemen we de afgeleide van N naar t .

Een differentiaalvergelijking is een vergelijking voor een functie waarin, naast eventueel de functie zelf (N), de afgeleide van de functie ($\frac{dN}{dt}$) voorkomt. Als er bovendien één waarde van de functie gegeven is, is de functie in het algemeen helemaal bepaald voor dit type differentiaalvergelijking. Het is zaak die ene functie te vinden: dat is de oplossing van de differentiaalvergelijking.

De differentiaal hier zijn: dN en dt . In de opgaven komt steeds een verhouding van de differentiaal voor zoals $\frac{dT}{dt}$

- De e-macht

Het getal e (het getal van Euler) heeft de bijzondere eigenschap dat de afgeleide van de functie e^x gelijk is aan e^x .

$$\text{Dus } \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

en

$$e \approx 2.71.$$

- **Voorbeeld van een differentiaalvergelijking**

Opgave 4 § 1 Afkoeling zie ook Oefenopgave

T is de temperatuur van een ketel water (in °C).

t is de tijd (in minuten).

$$T(0) = 100.$$

a) Aanname:

De temperatuurdaling is evenredig met T en Δt .

In formule: $T(t + \Delta t) - T(t) = -c \cdot T(t) \cdot \Delta t$ en $c > 0$

$$\rightarrow \frac{T(t+\Delta t) - T(t)}{\Delta t} = -c \cdot T(t).$$

Laat zien dat hieruit volgt: $\frac{dT}{dt} = -c \cdot T(t)$.

Als $\Delta t \rightarrow 0$ gaat $\frac{T(t+\Delta t) - T(t)}{\Delta t}$ over in $\frac{dT}{dt} = -c \cdot T(t)$.

Opmerking: $\frac{dT}{dt}$ wordt ook wel geschreven als T' .

b) $T(t) = a \cdot e^{-ct}$ is een oplossing van de differentiaalvergelijking $\frac{dT}{dt} = -c \cdot T(t)$.

Controle:

$$T' = \frac{d}{dt}(a \cdot e^{-ct}) = a \cdot (-c) \cdot e^{-ct} = -c \cdot a e^{-ct} = -c \cdot T(t).$$

Dit geldt voor elk getal a .

We noemen $T(t) = a \cdot e^{-ct}$ een oplossing omdat de constante a is nog niet bekend.

In dit voorbeeld volgt a uit de beginvoorwaarde $t = 0$:

$$T(0) = 100 \rightarrow 100 = a \cdot e^{-c \cdot 0} = a.$$

$$\text{Dus } T(t) = 100 \cdot e^{-ct}.$$

Zie verder de **Oefenopgave 4** hieronder.

Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.

Opgave 1 § 1 De wereldbevolking

Op 1 januari 2010 telt de wereldbevolking 6.84 miljard mensen en groeit jaarlijks met 1.1 %. Veronderstel dat dit percentage de komende jaren hetzelfde blijft.

a) Bereken de wereldbevolking op 1 januari van de jaren 2011 tot en met 2015.

$$1 \text{ januari } 2011: 6.84 \cdot 10^9 \cdot (1 + 0.011) = 6.915 \cdot 10^9,$$

$$1 \text{ januari } 2012: 6.84 \cdot 10^9 \cdot (1 + 0.011)^2 = 6.991 \cdot 10^9,$$

$$1 \text{ januari } 2013: 6.84 \cdot 10^9 \cdot (1 + 0.011)^3 = 7.068 \cdot 10^9,$$

$$1 \text{ januari } 2014: 6.84 \cdot 10^9 \cdot (1 + 0.011)^4 = 7.145 \cdot 10^9,$$

$$1 \text{ januari } 2015: 6.84 \cdot 10^9 \cdot (1 + 0.011)^4 = 7.225 \cdot 10^9.$$

b) Elk jaar groeit de bevolking met 1.1%. Dus elk jaar komt er 1.1% bij van een groter bedrag: niet lineaire groei, anders zou er elk jaar een gelijk bedrag bijkomen.

c) Geef een formule voor de wereldbevolking, y , in het jaar $2000 + t$.

We maken gebruik van de gegevens van 2011: 6.84 miljard mensen.

$$y = 6.84 \cdot 10^9 \cdot (1.011)^{t-10}, \text{ dus } t = 10 \Rightarrow \text{het jaar 2010}.$$

Opgave 2 § 2 Kokend water

Een ketel kokend water wordt in de buitenlucht geplaatst. Volgens een principe uit de natuurkunde is het temperatuurverlies van de ketel per minuut evenredig met het temperatuurverschil tussen de ketel en de omgeving. De buitenlucht heeft een temperatuur van 0°C. Ketel $t = 0$: 100°C. Wij nemen voor de evenredigheidsconstante 0.2. Dus na 1 minuut is de temperatuur $100 - 0.2 \cdot 100 = 80^\circ\text{C}$.

Bereken de temperatuur na 2, 3, 4 en 5 minuten.

$$\text{Na 1 minuut: } 100 - 0.2 \cdot 100 = 80,$$

$$\text{Na 2 minuten: } 80 - 0.2 \cdot 80 = 64 = 80(1 - 0.2) = 80 \cdot 0.8 = 100 \cdot 0.8 \cdot 0.8 = 100 \cdot (0.8)^2.$$

$$\text{Na 3 minuten: } 64 - 0.2 \cdot 64 = 51.2 = 64(1 - 0.2) = 64 \cdot 0.8 = 100 \cdot (0.8)^2 \cdot 0.8 = 100 \cdot (0.8)^3.$$

We hebben de algemene formulering:

$$\text{Na 4 minuten: } 100 \cdot (0.8)^4,$$

$$\text{Na 5 minuten: } 100 \cdot (0.8)^5 = 32.77^\circ\text{C}.$$

b) De formule voor de temperatuur in °C na t minuten:
 $100 \cdot (0.8)^t$ °C.

Discussie

Wat leren we van deze twee oefenopgaven?

- Hoe snel de temperatuur afneemt hangt af van de temperatuur op dat moment¹.
- Hoe snel een bevolking toeneemt, hangt af van de omvang van de bevolking op dat moment.

Zoiets komt vaker voor:

- Hoe snel een spaarkapitaal groeit, hangt af van de grootte van het kapitaal.
- Hoe snel een griep om zich heen grijpt, hangt af van het aantal mensen dat de griep al heeft en van het aantal mensen dat de griep nog niet heeft (de vatbaren).

Dit zijn voorbeelden van een dynamisch model. We spreken van een model omdat de werkelijkheid (sterk) wordt vereenvoudigd. Bij de afkoeling van de ketel water is bijvoorbeeld de buitenlucht temperatuur op constant 0°C gesteld. Bij de bevolkingsgroei zijn de aannames erg twijfelachtig dat het percentage geboortes en het percentage door migratie constant zijn. Een model beschrijft de werkelijkheid zelden helemaal goed. Toch is het zinvol om met modellen te werken, omdat het model inzicht verschaft hoe het proces zich globaal zou kunnen ontwikkelen.

We hebben de bevolkingstoename per heel jaar bekeken en de afkoeling per minuut. Maar de bevolking groeit voortdurend en de ketel water koelt voortdurend af. In feite zijn het continue processen.

Malthus publiceerde in 1798 het boek *An Essay on the Principle of Population*. In dat boek beschreef hij een model voor bevolkingsgroei. In de volgend **opgave 3** over de wereldbevolking gaan we daar nader op in. Zie ook bovenstaande samenvatting.

Opgave 3 § 1 De groei van de wereldbevolking als continue proces. Zie ook bovenstaande samenvatting.

Als het geboortepercentage gelijk is aan g en het sterftepercentage gelijk is aan s , dan wordt de toename ΔN van de bevolking gedurende een tijdsinterval van lengte Δt gegeven door: $\Delta N = \frac{g-s}{100} \cdot N \cdot \Delta t$.

a) Toelichting $\Delta N = \frac{g-s}{100} \cdot N \cdot \Delta t$.

- Er komt per jaar bij $\frac{g}{100} \cdot N$ (geboortes).
- Er gaat per jaar vanaf $\frac{s}{100} \cdot N$ (sterftes).
- Netto: $\frac{g-s}{100} \cdot N$.

Gedurende een tijdsinterval Δt verandert de bevolking dus in aantal: $\frac{g-s}{100} \cdot N \cdot \Delta t$.

b) Het getal $\frac{g-s}{100}$ heet de groei-index k , ook wel bevolkingsoverschot genoemd.

Als we Δt tot 0 laten naderen, dan gaat $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ naar $\frac{dN}{dt}$.

De bevolkingsgroei volgens Malthus wordt beschreven door: $\frac{dN}{dt} = k \cdot N$.

Het bevolkingsoverschot is 17 per duizend mensen. De wereldbevolking neemt in één jaar tijd met 17 duizendste deel toe. We rekenen de tijd t in jaren sinds 1900 en de bevolking N in miljarden (billion).

$t = 0$ in 1900.

Er geldt: $\frac{dN}{dt} = 0.017 \cdot N$, de differentiaalvergelijking.

Een oplossing van deze differentiaalvergelijking is: $N = a \cdot e^{0.017t}$, voor elk getal a .

We differentiëren $N = a \cdot e^{0.017t}$: $\frac{dN}{dt} = a \cdot 0.017 \cdot e^{0.017t} = 0.017 \cdot N$.

Bij het differentiëren hebben we gebruik gemaakt van de kettingregel.

c) In 1987 werd de vijf miljardste aardbewoner geboren. a ?

$t = 0$ in 1900.

Dus: $5 \cdot 10^9 = a \cdot e^{0.017 \cdot (1987-1900)} \therefore a = 1.39 \cdot 10^9$.

d) Voorspel op grond van bovenstaand model wanneer de wereld haar 7 miljardste bewoner kan verwelkomen.

$7 \cdot 10^9 = 1.39 \cdot 10^9 \cdot e^{0.017t} \therefore t = 106.8 \Rightarrow$ in 2006 of 2007.

$\frac{dN}{dt} = 0.017 \cdot N$ is een differentiaalvergelijking met $N(t = 87) = 5 \cdot 10^9 \Rightarrow$ er is maar één functie N welke voldoet aan de differentiaalvergelijking en $N(t = 87) = 5 \cdot 10^9$.

¹ Dit hangt af van de definitie van "snel".

Opgave 4 § 1 Afkoeling.

Een ketel kokend water wordt in de buitenlucht geplaatst. Volgens een principe uit de natuurkunde is het temperatuurverlies van de ketel per minuut evenredig met het temperatuurverschil tussen ketel en zijn omgeving. De omgeving, de buitenlucht heeft een temperatuur van 0°C .

De temperatuur van de ketel water noemen we $T^\circ \text{C}$. De tijd t in minuten. In het begin is de temperatuur van de ketel 100°C , dus $T(0) = 100$. Het verlies aan warmte tussen tijdstippen t en $t + \Delta t$ is evenredig met Δt en $T(t)$:

$$T(t + \Delta t) - T(t) = -c \cdot T(t) \cdot \Delta t, \text{ waarbij } c > 0 \Rightarrow \text{afkoeling.}$$

a) Laat zien dat $\frac{dT}{dt} = -c \cdot T$. Zie ook de bovenstaande samenvatting.

$$T(t + \Delta t) - T(t) = -c \cdot T(t) \cdot \Delta t \Rightarrow \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t} = -c \cdot T(t) \Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t} = \frac{dT}{dt} = -c \cdot T(t).$$

b) Toon aan dat $T(t) = a \cdot e^{-ct}$ aan de differentiaalvergelijking onder a) voldoet.

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} a \cdot e^{-ct} = -a \cdot c \cdot e^{-ct} = -c(a \cdot e^{-ct}) = -c \cdot T, \text{ voor elk getal } a.$$

c) Gegeven: $T(t = 0) = 100$.

Substitueer deze gegevens in $T(t) = a \cdot e^{-ct} \Rightarrow 100 = a \cdot e^0 = a \therefore a = 100$.

d) Veronderstel dat de temperatuur na 5 minuten 30°C is. Bepaal uit deze gegevens en $a = 100$ de evenredigheidsconstante c .

We weten al dat $T(t) = 100 \cdot e^{-ct}$. Met de nieuwe gegevens: $30 = 100 \cdot e^{-c \cdot 5} \therefore -5 \cdot c = \ln \frac{30}{100} \therefore -5 \cdot c = -1.204$.

Dus $c = 0.24$.

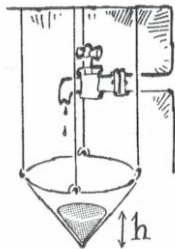
e) Na hoeveel minuten is de temperatuur 10°C ?

We hebben nu de vergelijking voor de temperatuur gevonden: $T(t) = 100 \cdot e^{-0.24t}$.

Voor de gegeven temperatuur moeten we dus oplossen: $10 = 100 \cdot e^{-0.24t} \Rightarrow -0.24t = \ln \frac{10}{100} = -2.3026 \therefore t = 9.6$ minuten.

De differentiaalvergelijking is: $\frac{dT}{dt} = -0.24 \cdot T$. Tezamen met de beginvoorwaarde $T(0) = 100$, beschrijft de differentiaalvergelijking het continue dynamische proces.

Opgave 5 § 1 Een trechter vullen



We laten een kegelvormige trechter vol lopen met water. De vulsnelheid is constant, dat wil zeggen dat er elke minuut evenveel water uit de kraan stroomt.

Als we beginnen is de trechter nog leeg. We bekijken de hoogte $h(\text{dm})$ van de vloeistofspiegel als functie van de tijd t in minuten. H is de snelheid waarmee de hoogte h van de waterspiegel stijgt in dm/min . De snelheid $\frac{dh}{dt}$ is omgekeerd met het kwadraat van de hoogte. Immers, als de hoogte 3 keer zo hoog is, is de oppervlakte van de vloeistofspiegel 9 keer zo groot. Denk aan de kegeldoorsnede. De straal van de kegeldoorsnede r is evenredig met de hoogte h . Het oppervlak is echter gelijk aan πr^2 .

In formule: $\frac{dh}{dt} = c \cdot \frac{1}{h^2}$.

Met de bovenstaande gegevens kun je dit ook zelf afleiden:

het volume V van de kegel is: $\frac{1}{3} h \pi r^2$.

Noem de tophoek van de kegel $\alpha \Rightarrow r = h \tan \alpha \therefore V = \frac{1}{3} (\tan \alpha)^2 \pi h^3$.

Gegeven: $\frac{dV}{dt} = \text{constant}$.

$$\frac{dV}{dt} = \pi (\tan \alpha)^2 h^2 \frac{dh}{dt} = \text{constant} \Rightarrow \frac{dh}{dt} \propto \frac{1}{h^2}.$$

De evenredigheidsconstante c hangt af van de vulsnelheid en van de tophoek van de kegel.

a) Bereken $\frac{dh}{dt} \equiv h'$ met $c = 4$:

$$h = 1: \frac{dh}{dt} = 4,$$

$$h = 2: \frac{dh}{dt} = 1,$$

$$h = 3: \frac{dh}{dt} = \frac{4}{9},$$

$$h = 4: \frac{dh}{dt} = \frac{1}{4}.$$

b) Wat is de groeisnelheid als $h = 0$?

De groeisnelheid is dan oneindig groot. De grafiek van h als functie van de tijd loopt in het begin verticaal.

$\frac{dh}{dt} = c \cdot \frac{1}{h^2}$ is een differentiaalvergelijking. De differentiaalvergelijking legt tezamen met de beginwaarde $h(t = 0) = 0$, het continue dynamische proces vast.

Oefenen

Lezen: bladzijde 1 tot en met 6 van paragraaf 0 en 1.

Maken: opgave van § 1

Blok 11 Les 2 Richtingsvelden

Deze les sluit aan bij de paragraaf 1 van Continue Dynamische Processen van de Wageningse Methode

• Twee variabelen

Opgave 6 § 1

Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}xy$.

$y(x)$ is de onbekende functie die voldoet aan de vergelijking. Door deze vergelijking is de functie van y nog niet helemaal vastgelegd.

De waarde van de helling van de raaklijn aan y wordt gegeven door: $-\frac{1}{4}xy$.

Voor elk punt (x, y) ligt deze waarde vast. Zie onderstaande tabel.

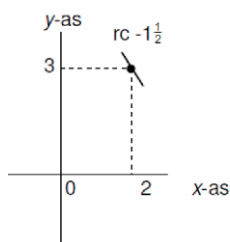
a) In het punt $x = 2$ en $y = 3$ vinden we voor de helling $\frac{dy}{dx} \equiv y' = -\frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 3 = -\frac{3}{2}$.

x	y	$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}xy$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	$-\frac{1}{4}$
-1	1	$\frac{1}{4}$
3	-1	$\frac{3}{4}$
2	3	$-1\frac{1}{2}$

Overigens valt je op dat in het punt $x = 3$ en $y = 2$ de helling ook $-3/2$ is.

b)

Voor elk punt kunnen lijnstukjes getekend worden die de helling van $y(x)$ in het punt (x, y) voorstellen. Voorbeeld met van een lijnstukje $(2,3)$, met richtingscoëfficiënt $-\frac{3}{2}$.



c) Zo kun je voor verschillende coördinaten stukjes raaklijn tekenen.

Deze lijnstukjes vormen het richtingsveld van de differentiaalvergelijking. Vanuit een beginpunt kun je de oplossingskromme langs de lijnstukjes in tekenen. De waarden van het beginpunt heet de beginwaarde.

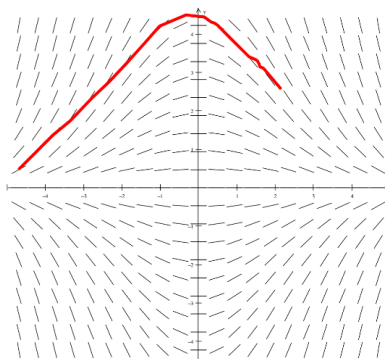
Een differentiaalvergelijking geeft de groeisnelheid van een functie in een punt als je de coördinaten van dat punt kent.

Een functie die in elk punt van de grafiek de door de differentiaalvergelijking voorgeschreven groeisnelheid heeft, dus in het richtingsveld 'past', is een oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking. In het richtingsveld stelt de helling van $y(x)$ elk lijnstukje in het punt (x, y) voor. Zie onderstaande figuur. Daarin: het richtingsveld, voorgesteld door de lijnstukjes en de oplossingskromme. De laatste wordt getekend met behulp van de lijntjes. Zoals je kunt zien, behoeft dit enige vaardigheid. Tenzij je dit met behulp van een computerprogramma doet. Je kunt je dan ook voorstellen dat van de oplossing gebruik wordt gemaakt om de oplossingskromme te tekenen. Ik maak deze opmerking om de betrekkelijkheid van het gebruik van het richtingsveld aan te geven. In onderstaande figuur is het richtingsveld en de oplossing van de differentiaalvergelijking getekend.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}xy.$$

Dit is het **richtingsveld** bij de differentiaalvergelijking.

Vanuit een beginpunt kun je de oplossingskromme langs de lijntjes intekenen.



De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking luidt:

$$y = c \cdot e^{-x^2/8}.$$

Controleer dit maar door deze vergelijking te differentiëren.

d) Winplot

Met WINPLOT kun je grafieken (en nog veel meer) tekenen.

WINPLOT is freeware: <http://math.exeteredu/rparris/winplot.html>

Kies de Nederlandstalige versie onder Dutch.

Hoe teken je een richtingsveld met WINPLOT?

- Kies Window → 2-dim
- Kies Equa → Differential → 1. dy/dx
- Kies OK

Een voorbeeld met het richtingsveld $\frac{dy}{dx} = x - y$:

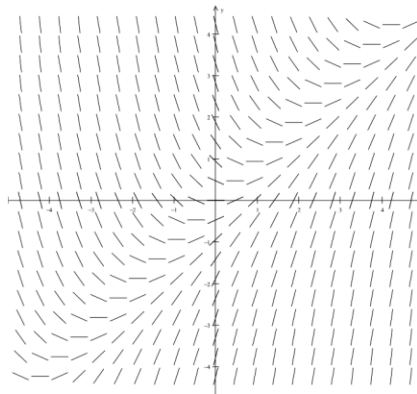
Het richtingsveld bij $\frac{dy}{dx} = x - y$

Controleer een aantal waarden van het veld langs de y- as en langs de x- as.

Bijvoorbeeld:

$\frac{dy}{dx}(0,1) = -1$ een schuin streepje naar beneden.

$\frac{dy}{dx}(2,0) = 2$ een schuin streepje naar omhoog.



Het richtingsveld bij $\frac{dy}{dx} = x - y$.

De oplossingskrommen:

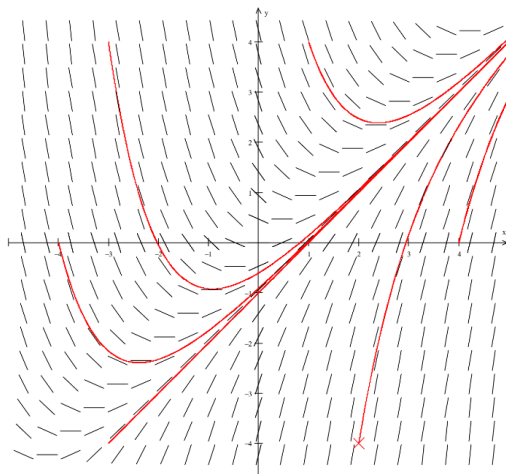
$y = x - 1$, is een oplossing van de differentiaalvergelijking.

Want: $y' \equiv \frac{dy}{dx} = \frac{d(x-1)}{dx} = 1$.

Dus: $x - y = x - (x - 1) = 1$.

In elk punt van zo'n kromme is de helling gelijk aan de waarde van de differentiaalvergelijking.

In het richtingsveld kan een aantal oplossingskrommen worden getekend:



Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.

Opgave 7 § 1 De vrije val

Een steen valt van een toren. Hierbij verwaarlozen we de wrijving: er is sprake van een "vrije val". Neem aan dat de steen na t seconden y meter is gevallen. Galilei heeft twee modellen voor de vrije val beschouwd. Eerste model: de valsnelheid is evenredig met de valweg. Tweede model: de valsnelheid is evenredig met de valtijd.

Een differentiaalvergelijking die bij het eerste model past, is van de vorm: $\frac{dy}{dt} = -c \cdot y$, voor de constante $c > 0$. Het minteken staat erom dat de beweging in de negatieve y -richting is.

a) Schrijf een differentiaalvergelijking op die bij het tweede model hoort. De valsnelheid is in dit geval evenredig met de valtijd: $\frac{dy}{dt} = -c \cdot t$, met $c > 0$.

b) Ga na dat functies van de vorm $y = a \cdot e^{-c \cdot t}$ aan de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = -c \cdot y$, het eerste model, voldoen. Dus, $\frac{dy}{dt} = a \cdot (-c \cdot e^{-c \cdot t})$ en ook $-c \cdot y = -c \cdot a \cdot e^{-c \cdot t}$. Dus $y = a \cdot e^{-c \cdot t}$ voldoet aan $\frac{dy}{dt} = -c \cdot y$. Dit eerste model kan niet goed zijn: de valsnelheid gaat volgens dit model naar 0. Zie onder e).

c) Het tweede model: $\frac{dy}{dt} = -c \cdot t$. Stel $c \cong 10$, de valversnelling. Welke oplossingsfuncties voldoen aan deze

differentiaalvergelijking? Je bedenkt dat als je de afgeleide van die functie neemt, $-10t$ over te houden. De functie is:

$$y = -5 \cdot t^2 + a, \text{ waarbij } a \text{ een constante is.}$$

d) De toren is 50 meter hoog. De oplossingsfunctie heeft het startpunt ($t = 0, y = 50$).

$$\text{Met } y = -5 \cdot t^2 + a \text{ en de start gegevens: } y = -5 \cdot t^2 + 50.$$

e) Met welke snelheid raakt de steen de grond? De valsnelheid volgt uit de afgeleide $\frac{dy}{dt}$. Met

$$y = -5 \cdot t^2 + 50 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -10 \cdot t.$$

Je moet de valtijd nog bepalen. Substitueer in $y = -5 \cdot t^2 + 50$, $y = 0 \Rightarrow t = \sqrt{10}$. Nu kan de snelheid bij het bereiken van de grond worden bepaald: $\frac{dy}{dt} = -10 \cdot t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -10\sqrt{10} \text{ m/sec}$, want de dimensie van $c \cong 10$ is m/sec^2 .

Waarom is het eerste model niet goed? De oplossing is $y = a \cdot e^{-c \cdot t}$. Dus voor ($t = 0, y = 50$) $\Rightarrow a = 50$. Nu de snelheid aan de grond: $\frac{dy}{dt} = -c \cdot y$, $y = 0$ dus $\frac{dy}{dt} = 0$. Dit resultaat is onmogelijk.

Overzichtsvraag 1 § 1

De groeisnelheid is evenredig met de wortel uit die hoeveelheid. Voorgaande zin is een differentiaalvergelijking in woorden.

a) De formule van de differentiaalvergelijking:

$$\frac{dy}{dt}, \text{ de groeisnelheid, is evenredig met } \sqrt{y} : \frac{dy}{dt} = c \cdot \sqrt{y}.$$

b) Stel $c = 2$.

Wat is de groeisnelheid op het moment dat de hoeveelheid gelijk is aan 9?

$$\frac{dy}{dt} = 2\sqrt{y} \rightarrow 2\sqrt{9} = 6.$$

c) Hoe groot is de hoeveelheid als de groeisnelheid 5 is?

$$\frac{dy}{dt} = 5 = 2\sqrt{y} \therefore y = \frac{25}{4}.$$

Overzichtsvraag 2 § 1

Toon aan dat $y = 3x$ een oplossingsfunctie is van $\frac{dy}{dx} = 3$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3x) = 3 \frac{dx}{dx} = 3.$$

Is $y = 3x$, ook een oplossingsfunctie van $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} = \frac{3x}{x} = 3, \text{ en } \frac{dy}{dx} \text{ van } y = 3x \text{ is gelijk aan } 3.$$

- **Oefenen Lezen:** bladzijde 7 tot en met 9 van paragraaf 1.

Blok 11 Les 3 Oplossingskrommen

Deze les sluit aan bij de paragraaf 2 van Continue Dynamische Processen van de Wageningse Methode

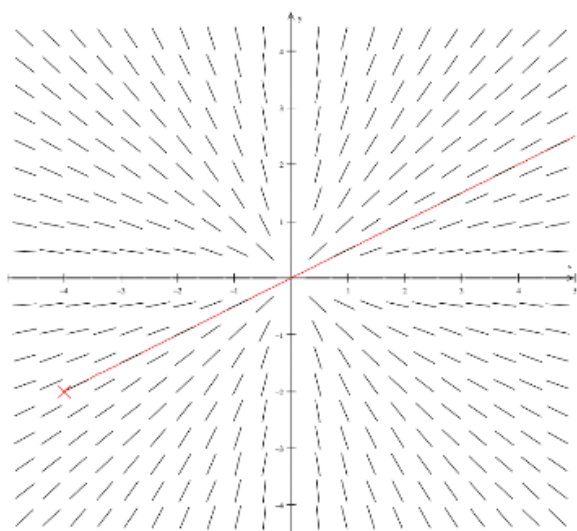
- **Oplossingskrommen**

Voorbeeld:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

De oplossingskromme door het punt $(-4, -2)$:

Zie beide onderstaande figuren.



$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} :$$

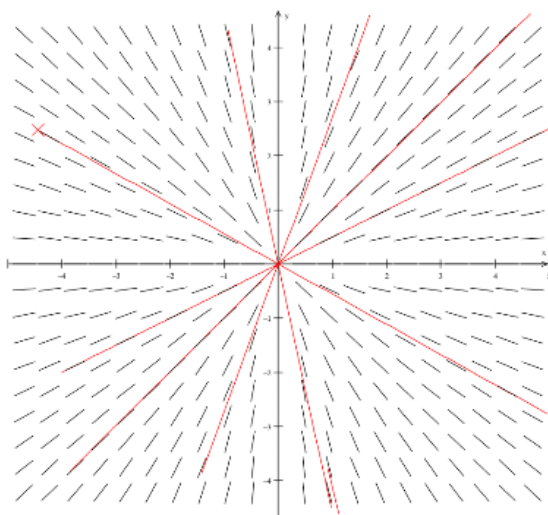
WINPLOT kan oplossingskrommen tekenen.

- Ga op een punt in het richtingsveld staan en klik een keer met de muis.

Dit punt heet de beginwaarde.

Vermoeden: Oplossingen zijn van de gedaante $y = a \cdot x$

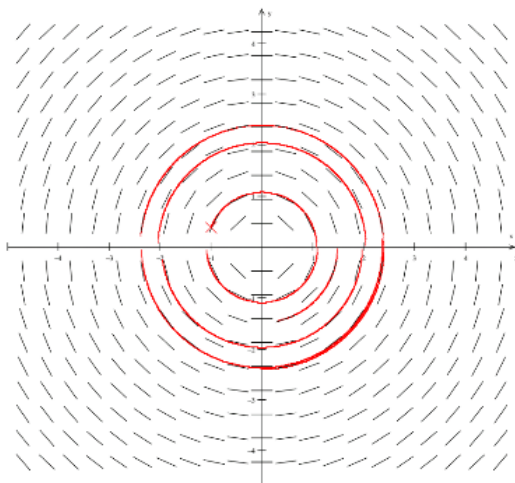
Controle: $y' \equiv \frac{dy}{dx} = a$ en $\frac{y}{x} = \frac{ax}{x} = a$, $\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} :$



Opgave 11a) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} .$

Vermoeden: oplossingen zijn cirkels met O als middelpunt en vergelijking:

$x^2 + y^2 = r^2$. Dus $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} .$



Controle: $y' \equiv \frac{dy}{dx} = \pm \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ en $-\frac{x}{y} = \frac{-x}{\pm \sqrt{r^2 - x^2}} = \pm \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$.

- **Oplossingskrommen**

Gegeven een differentiaalvergelijking: $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$.

Een functie $y = f(x)$ is een oplossingskromme van de differentiaalvergelijking als geldt dat $y' \equiv \frac{dy}{dx} = f'(x) = F[x, f(x)]$.

Hierin is de onbekende functie y in de vergelijking $\frac{dy}{dx} = F[x, f(x)]$ vervangen door de functie $f(x)$.

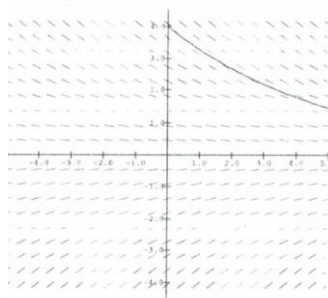
Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven

Opgave 8 § 2

De differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = -0.24$. Een differentiaalvergelijking zoals we die zijn tegengekomen in de vorige les: de afkoelingsvergelijking, maar nu met dx in plaats van dt .

a) Met Winplot kun je het richtingsveld tekenen.

b) In dat richtingsveld is hieronder een oplossingsfunctie in het richtingsveld getekend met als beginpunt (0,4).



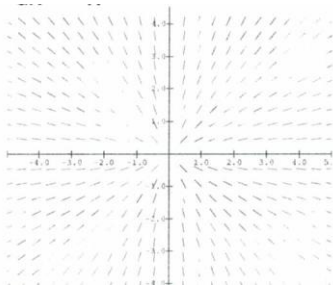
Hier zie je weer de exponentiele functie verschijnen: de afkoelingscurve.

Opgave 9 § 2

We gaan de functies met de eigenschap $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$, onderzoeken.

a) De differentiaalvergelijking voor de functie $f(x) \equiv y$, schrijven we als volgt: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

b) Met Winplot tekenen we het richtingsveld:



c) Uit bovenstaand richtingsveld volgt dat de functie een rechte lijn voorstelt: $y \equiv f(x) = ax$.

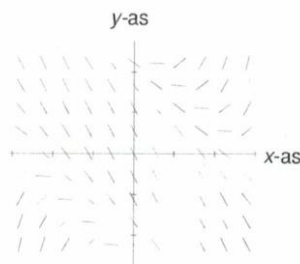
d) We controleren de juistheid van de aanname met $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$:

$$f'(x) = a, \text{ en } \frac{f(x)}{x} = \frac{ax}{x} = a \therefore f'(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

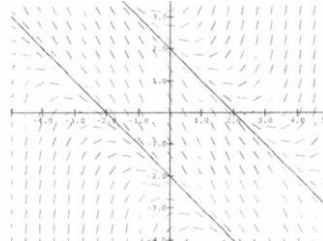
Opgave 10 § 2

Gegeven de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}(x + y)^2 - 2$.

Hieronder staat het richtingsveld:



a) Twee oplossingsfuncties van bovenstaande differentiaalvergelijking zijn lineair: $y = -x + 2$, en $y = -x - 2$.



Dat $y = -x + 2$ inderdaad aan de differentiaalvergelijking voldoet, kun je als volgt controleren:

- In elk punt van de grafiek, in het bovenstaande richtingsveld, van $y = -x + 2$, geldt dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn -1 is.

- In elk punt van de lijn $y = -x + 2$, geldt: $\frac{1}{4}(x + y)^2 - 2 = \frac{1}{4}(x + [-x + 2])^2 - 2 = -1$.

Dus in elk punt van de functie $y = -x + 2$, is de groeisnelheid gelijk aan de door de differentiaalvergelijking voorgeschreven groeisnelheid.

De methode van controleren wordt controle door substitutie genoemd.

b) Controleer door substitutie dat $y = -x - 2$, aan de differentiaalvergelijking voldoet.

- $y = -x - 2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -1$.

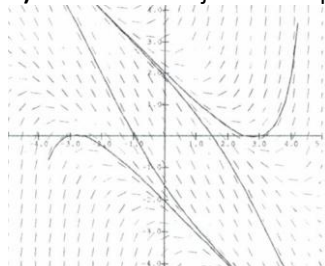
- In elk punt van de lijn $y = -x - 2$, geldt: $\frac{1}{4}(x + y)^2 - 2 = \frac{1}{4}(x + [-x - 2])^2 - 2 = -1$.

c) Wat is de kleinste waarde van de richtingscoëfficiënt van de lijnstukjes in het richtingsveld?

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}(x + y)^2 - 2 \Rightarrow (x + y)^2 \geq 0$, altijd. Dus de kleinste waarde van de richtingscoëfficiënt is -2 .

Bij deze waarde van de richtingscoëfficiënt geldt: $x + y = 0, \Rightarrow x = -y$. Dus in alle punten op de lijn $y = -x$.

d) Onderstaand zijn enkele oplossingsfuncties in het richtingsveld getekend:



e) Van een oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking is gegeven dat de functie een extreme waarde heeft in het punt met eerste coördinaat 2. Dus $x = 2$. We noemen de y-coördinaat $y = a$.

Met extreme waarde van de oplossingsfunctie wordt het maximum of het minimum van de functie bedoeld:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ in het punt } (2, a) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 = \frac{1}{4}(x+y)^2 - 2 \Rightarrow \frac{1}{4}(2+a)^2 - 2 = 0 \Rightarrow a = -2 \pm 2\sqrt{2}.$$

f) Een andere oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking heeft een buigpunt met $x = -3$.

Wat is de tweede coördinaat van het buigpunt? Definitie van het buigpunt: Het punt waar het raaklijnstukje in het richtingsveld de minimale of maximale richtingscoëfficiënt heeft $\Rightarrow \frac{dy}{dx} \equiv f$ is de functie van de raaklijn.

Dus het maximum of minimum van $f \Rightarrow \frac{df}{dx} \equiv \frac{d^2y}{dx^2} = 0 = \frac{1}{2}(x+y) \Rightarrow x = -y$. Dit resultaat hebben we ook al onder c) gevonden. Daar ging het alleen om de minimale waarde.

Met $x = -y$, vinden we de tweede coördinaat: $y = 3$.

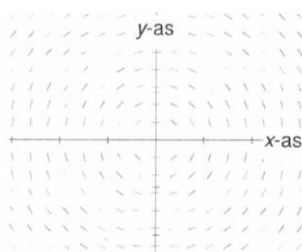
De vergelijking van de buigraaklijn:

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}(x+y)^2 - 2 \Rightarrow$ in het punt $(-3, 3)$ vinden we voor $\frac{dy}{dx} = -2$. De oplossing van deze eerste orde differentiaalvergelijking is $y = -2x + b$, waarbij we b vinden door de coördinaten $(-3, 3)$ in te vullen: $b = -3$.

De vergelijking van de buigraaklijn is dus: $y = -2x - 3$.

Opgave 11 § 2

Het richtingsveld van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, vinden we weer met WINPLOT.



a) Voor elk raaklijnstukje zie dat ze de juiste richting hebben. Zie ook Opgave 11a) in de summary.

b) Zoals in opgave 11a) in de summary is ingetekend zijn de oplossingskrommen cirkels.

c) We bekijken de cirkel met middelpunt $(0, 0)$, en straal 4. De vergelijking van de cirkel is: $x^2 + y^2 = 16$. De bovenste helft van de cirkel is de grafiek van de functie: $y = \sqrt{16 - x^2}$, $y > 0$.

We controleren dit door substitutie in differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{16-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{16-x^2}}, \text{ en } -\frac{x}{y} = \frac{-x}{\sqrt{16-x^2}}.$$

d) De formule van de functie waarvan de onderste helft van de cirkel de grafiek is: $y = -\sqrt{16 - x^2}$, $y < 0$.

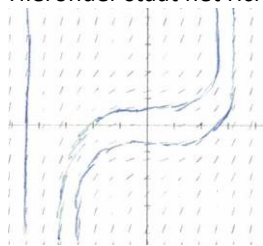
Controle door substitutie in de differentiaalvergelijking:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{16-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}, \text{ en } -\frac{x}{y} = \frac{-x}{-\sqrt{16-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}.$$

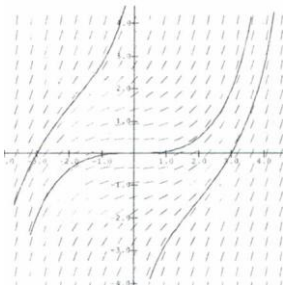
Opgave 12 § 2

De differentiaalvergelijking: $\frac{dy}{dx} = 0.2(x^2 + y^2)$.

Hieronder staat het richtingsveld getekend met enkele oplossingsfuncties:



a) Nog enkele oplossingsfuncties:



b) Alle oplossingsfuncties zijn stijgend: $\frac{dy}{dx} = 0.2(x^2 + y^2) \Rightarrow \frac{dy}{dx} \geq 0$.

c) - De punten waar de richtingscoëfficiënt gelijk is aan 1:

$\frac{dy}{dx} = 0.2(x^2 + y^2) = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 5 \Rightarrow$ de punten liggen op een cirkel met de straal gelijk aan $\sqrt{5}$ met middelpunt $(0,0)$.

- De punten waar de richtingscoëfficiënt gelijk is aan 4:

$\frac{dy}{dx} = 0.2(x^2 + y^2) = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 20 \Rightarrow$ de punten liggen op een cirkel met de straal gelijk aan $2\sqrt{5}$ met middelpunt $(0,0)$.

Opgave 13 § 2

Gegeven de differentiaalvergelijking: $\frac{dy}{dx} = y - x^2 + 4x$.

a) De verzameling punten (x, y) waarin het raaklijnstukje de richtingscoëfficiënt 0 heeft.

Dus $\frac{dy}{dx} = 0 = y - x^2 + 4x \Rightarrow y = x^2 - 4x \Rightarrow$ een parabool.

Nota bene: de punten kun je tekenen en het resultaat is een parabool met als minimum $(2, -4)$.

b) Een oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking heeft als grafiek een parabool. Geef een vergelijking van de parabool.

Probeer een parabool $y = ax^2 + bx + c$.

Bepaal $y' \equiv \frac{dy}{dx} = 2ax + b$

En: $y' \equiv \frac{dy}{dx} = 2ax + b$, en $\frac{dy}{dx} = y - x^2 + 4x$

$2ax + b (= y - x^2 + 4x) = ax^2 + bx + c - x^2 + 4x = (a - 1)x^2 + (b + 4)x + c$.

Links en rechts gelijkstellen, dus:

$2ax + b = (a - 1)x^2 + (b + 4)x + c \rightarrow$

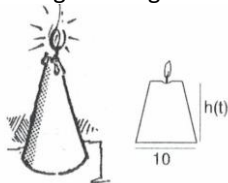
$a = 1, \rightarrow b = -2, \rightarrow c = -2$.

Substitutie van deze resultaten in $y = ax^2 + bx + c$

$y = x^2 - 2x - 2$, is inderdaad een oplossing.

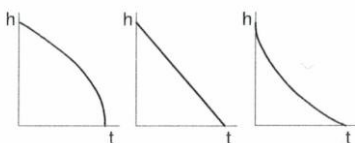
Opgave 14 § 2 Een kaars brandt op

Een kegelvormige kaars is 20 cm hoog en aan de onderzijde 10 cm breed



Hierboven staat ook het zijaanzicht van de kaars na t branduren. We beschouwen de hoogte h van de kaars(in cm) als functie van de tijd t dat de kaars brandt(in uren).

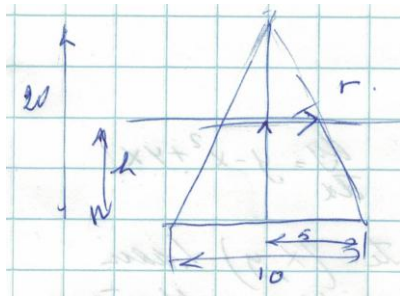
a) Welke van de drie onderstaande grafieken past het best bij de functie van $h(t)$?



De meest rechtste van de grafieken is de meest realistische grafiek.

b) $r(h)$ is de straal van de doorsnede van de kaars(kegel) op hoogte h .

Toon aan dat $r(h) = 5 - \frac{1}{4} \cdot h$.



Een schets:

Uit de schets volgt: $(20 - h):r = 20:5 \Rightarrow r = 5 - \frac{1}{4} \cdot h$.

c) $O(h)$ is de oppervlakte van de doorsnede van de kaars(kegel) op hoogte h . Dus $O(h) = \pi[r(h)]^2$.

Veronderstel dat de snelheid waarmee de kaars korter wordt omgekeerd evenredig is met $O(h)$. Dit is een redelijke veronderstelling: hoe groter het beschikbare oppervlak, des te langer het duurt voordat dit oppervlak opgebrand is.

Laat zien dat h voldoet aan het beginwaarde probleem: $\frac{dh}{dt} = c \cdot \frac{-1}{(20-h)^2}$, en $h(0) = 20$. Hierbij is c een positieve constante die bijvoorbeeld afhangt van de kwaliteit van de was van de kaars.

De aanname is dat de opbrandsnelheid $\frac{dh}{dt}$ omgekeerd evenredig is met $O(h)$.

We weten: $O(h) = \pi[r(h)]^2 = \pi(5 - \frac{1}{4} \cdot h)^2 = \frac{\pi}{16}(20 - h)^2 \therefore \frac{dh}{dt}$ is evenredig met $\frac{1}{(20-h)^2}$.

Dus: $\frac{dh}{dt} = c \cdot \frac{-1}{(20-h)^2}$.

d) Toon aan dat $h = 20 - (3ct)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow h - 20 = -(3ct)^{\frac{1}{3}}$, een oplossingsfunctie van het beginwaarde probleem is.

Beginwaarde probleem: $\frac{dh}{dt} = c \cdot \frac{-1}{(20-h)^2}$.

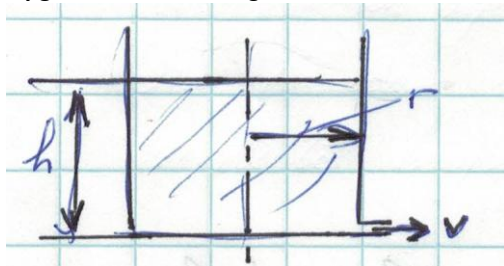
$$\frac{dh}{dt} = \frac{d}{dt} \left[20 - (3ct)^{\frac{1}{3}} \right] = -\frac{1}{3} (3ct)^{-\frac{2}{3}} 3c = \frac{-c}{(3ct)^{\frac{2}{3}}},$$

en $c \cdot \frac{-1}{(20-h)^2} = \frac{-c}{(h-20)^2} = \frac{-c}{(3ct)^{\frac{2}{3}}} \therefore h = 20 - (3ct)^{\frac{1}{3}}$ is een oplossingsfunctie.

e) De kaars is na 8 uren opgebrand. Bereken c .

$$h = 20 - (3ct)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow 0 = 20 - (3c8)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow c = \frac{20^3}{24} = \frac{1000}{3}.$$

Opgave 15 § 2 Een leegstromend vat



Een cilindervormig vat is gevuld met water. Zie de schets hierboven.

Onderin zit een gaatje waardoor water wegstroomt. We bekijken de hoogte h (in cm) van de waterspiegel als functie van de tijd t (in minuten).

Volgens een wet uit de hydrodynamica geldt:

$$\frac{dh}{dt} = -c \cdot \sqrt{h}. \text{ (Volgt uit de kinetische en potentiële energie).}$$

Hierbij hangt de positieve evenredigheidsconstante c af van de vorm en de grootte van het gaatje en de straal r van het vat. Voor c nemen we 2.

a) Hoe snel daalt de waterspiegel als het water nog 25 cm hoog staat?

$$\frac{dh}{dt} = -c \cdot \sqrt{h} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -2\sqrt{25} = -10 \text{ cm/min. Een min teken omdat de snelheid naar beneden is gericht.}$$

b) Laat zien dat voor elke $p > 0$, de functie $h = (p - t)^2$, een oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking is voor $0 \leq t \leq p$.

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d}{dt} (p - t)^2 = -2(p - t),$$

$$\frac{dh}{dt} = -c \cdot \sqrt{h} = -2 \cdot \sqrt{h} = -2\sqrt{(p - t)^2} = -2(p - t).$$

c) Op het tijdstip $t = 0$, staat het water 1 m (=100cm) hoog. Bereken p .

$$h = (p - t)^2 \Rightarrow 100 = (p - 0)^2 \Rightarrow p = 10, \text{ want } p > 0.$$

d) Na hoeveel tijd is het vat leeg?

$$\text{We weten nu: } h = (10 - t)^2.$$

Het vat is leeg als $h = 0 \Rightarrow 0 = (10 - t)^2 \Rightarrow t$ is 10 minuten.

Oefenen

Lezen: bladzijde 10 tot en met 13 van paragraaf 2.

Blok 11 Les 4 De methode van Euler; Euler's Method

Deze les sluit aan bij de paragraaf 3 van Continue Dynamische Processen van de Wageningse Methode

- De afgeleide gebruiken

Soms kun je een functiewaarde niet exact uitrekenen. Dit zal vaak het geval zijn bij het oplossen van problemen waarvoor een wiskundig model is ontwikkeld. Een dergelijk model wordt vertaald in een numeriek wiskundig model. Dit numerieke model wordt weer vertaald in een computerprogramma.

Je berekent een benadering van de functiewaarde.

Bij die benadering kun je soms de afgeleide gebruiken. In het volgende voorbeeld worden de waarden van $\ln(1.01)$ en $\ln(1.02)$ benaderd.

Reminder: $\ln \rightarrow$ de natuurlijke logaritme.

Gegeven:

$$f(x) = \ln(x)$$

$$\rightarrow f' \equiv \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \text{ en } f(1) = \ln(1) = 0.$$

$$\text{Omdat } f'(1) \approx \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x},$$

$$(\text{zie de afleiding van de afgeleide: } f' \equiv \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}).$$

$$\text{geldt ook } f(1 + \Delta x) \approx f(1) + f'(1) \cdot \Delta x.$$

Opmerking: $\Delta x \ll 1$.

Hiermee kun je $\ln(1.01)$ benaderen met $\Delta x = 0.01$:

$$\ln(1.01) \approx \ln(1) + \frac{1}{1} \times .01 = 0.01.$$

Let op : hierbij is de exacte waarde van $f' \equiv \frac{dy}{dx}$ voor $x = 1$ gebruikt.

En een volgende stap is:

$$\ln(1.02) \approx \ln(1.01) + \frac{1}{1.01} \times .01 \approx .01 + .0099 \approx .02.$$

- De methode van Euler

$f(x)$ is een differentieerbare functie voor $x = a$.

$$\text{Omdat : } f'(a) \approx \frac{f(a+\Delta a) - f(a)}{\Delta a}$$

$$\text{geldt ook } f(a + \Delta a) \approx f(a) + f'(a) \cdot \Delta a$$

Hiermee kun je $f(a + \Delta a)$ benaderen voor kleine waarden van Δa .

Je kunt de methode van Euler gebruiken om een oplossingskromme van een differentiaalvergelijking te benaderen.

Opgave 16 § 3

Van een functie f is gegeven $f(1) = 3$ en $f'(1) = 2$.

Met dit gegeven, hoe groot schat je $f(1.01)$?

Met $f(a + \Delta a) \approx f(a) + f'(a) \cdot \Delta a$, en $a = 1$ en $\Delta a = 0.01$:
 $f(1 + 0.01) = f(1.01) = f(1) + f'(1) \cdot 0.01 = 3 + 2 \cdot 0.01 = 3.02$

Voorbeeld:

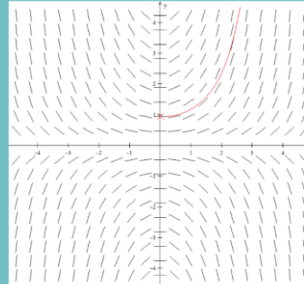
Je kunt de methode van Euler gebruiken om een oplossingskromme van een differentiaalvergelijking te benaderen.

Gegeven de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

$y = f(x)$ is de oplossingskromme met beginwaarde $f(a) = b$.

Dan geldt: $f(a + \Delta a) \approx f(a) + F(a, f(a)) \cdot \Delta a$



WINPLOT kan een oplossingskromme in een richtingsveld tekenen en gebruikt daarvoor ook de methode van Euler.

- De waarden berekenen met de GR

Opgave 17 § 3

a) Een schets van de oplossingsfunctie van de differentiaal vergelijking $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y$ staat in bovenstaand richtingsveld; $f(0) = 1$.

b) We gebruiken $f(a + \Delta a) \approx f(a) + f'(a) \cdot \Delta a$, waarbij we voor Δa steeds 1 nemen om uitgaande van $f(0)$, achtereenvolgens $f(1), f(2), \dots$ enzovoort te benaderen.

In $(0,1)$ heeft het raaklijnstukje richtingscoëfficiënt $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1 = 0$, dus

$$f(1) = f(0) + 1 \cdot 0 = 1.$$

In $(1,1)$ heeft het raaklijnstukje richtingscoëfficiënt $\frac{1}{2}$, dus

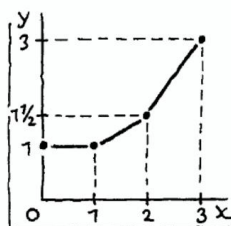
$$f(2) = f(1) + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

In $(2, \frac{3}{2})$ heeft het raaklijnstukje richtingscoëfficiënt $\frac{3}{2}$, dus

$$f(3) = f(2) + \frac{3}{2} \cdot 1 = 3.$$

In $(3, \frac{9}{2})$ heeft het raaklijnstukje richtingscoëfficiënt $\frac{9}{2}$, dus

$$f(4) = f(3) + \frac{9}{2} \cdot 1 = 3 + \frac{9}{2} = \frac{15}{2}.$$



c) Het valt te bezien of $\Delta a = 1$ wel klein is. Zijn de benaderingen die we hierboven hebben uitgerekend, groter of kleiner dan de echte functiewaarden?

Gelet op de afleiding van de afgeleide: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$, denk je dat de stap zo klein mogelijk moet zijn. Je kunt het echter ook aan het bovenstaande richtingsveld zien. De raaklijnstukjes worden steeds steiler rechts van de y-as.

d) We hebben benaderingen van de functiewaarden van f gekregen door stappen van lengte 1 in de x - richting te nemen. Je krijgt betere benaderingen, door in de x - richting stappen van $\frac{1}{2}$ te nemen. Je vindt dan $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 0 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

In $(\frac{1}{2}, 1)$ heeft het raaklijnstukje, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y$, richtingscoëfficiënt $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$, dus

$$f(1) = 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{8}.$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = f(1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot f(1) = \frac{9}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{8} = \frac{45}{32}.$$

$$f(2) = f\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{45}{32} + \frac{3}{8} \cdot \frac{45}{32} = \frac{495}{256}.$$

e) Op de GR kun je de benadering van f handig als volgt berekenen. Zet de GR in de Seq-mode. Om de benadering van f bij stapgrootte 1 en startpunt $(0,1)$ te krijgen voer je in:

nMin=0

u(n)=u(n-1) + $\Delta a (= 1)$

u(nMin)=0

v(n)=v(n-1)+0.5·u(n-1)·v(n-1)· 1

v(nMin)=1

In de tabel vind je bij $u(n)$ de eerste coördinaat en $v(n)$ de tweede coördinaat van de grafiek van de benadering van f ; $(u(0), v(0))$ is het startpunt. Nota Bene: gebruik de knop tableset.

Voor de stapgrootte $\Delta a = \frac{1}{2}$, verander

u(n)=u(n-1) + $\Delta a (= \frac{1}{2})$, en v(n)=v(n-1)+0.5·u(n-1)·v(n-1)· $\frac{1}{2}$.

f) We gaan $f(2)$ nu nauwkeurig benaderen door stapgrootte 0.01 te nemen.

nMin=0

u(n)=u(n-1) + $\Delta a (= 0.01)$

u(nMin)=0

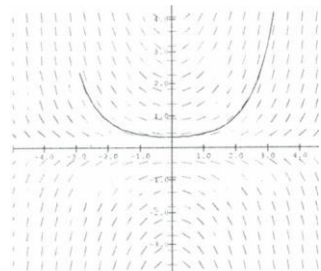
v(n)=v(n-1)+0.5·u(n-1)·v(n-1)· 0.01

v(nMin)=1

De benadering voor $f(2)$ is: v(200)=2.6958.

g) De oplossingsfunctie met startpunt $(2,1)$ noemen we g .

Onderstaand een schets van de grafiek van $\frac{1}{2}$:



h) We benaderen de functiewaarde van g volgens de methode van Euler met stapgrootte $\frac{1}{2}$.

Met de GR $g\left(\frac{1}{2}\right), g(1), g\left(\frac{3}{2}\right), \dots$

nMin=0

u(n)=u(n-1) + $\Delta a (= 0.5)$

u(nMin)=2

v(n)=v(n-1)+0.5·u(n-1)·v(n-1)· 0.5

v(nMin)=1

i) Ga na dat $y = e^{\frac{1}{4}x^2}$ een oplossingsfunctie is van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y$ die door $(0,1)$ gaat.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} e^{\frac{1}{4}x^2} = \frac{1}{4} \cdot 2x \cdot e^{\frac{1}{4}x^2} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot e^{\frac{1}{4}x^2} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y.$$

Voor $x = 2 \Rightarrow y = e = 2.718$.

Onder f) vonden we bij benadering $f(2)$ is: v(200)=2.6958.

j) Ga na dat de functies $y = c \cdot e^{\frac{1}{4}x^2}$ voor elke waarde van de constante c oplossingsfuncties zijn van de differentiaalvergelijking.

$$\frac{dy}{dx} = c \cdot e^{\frac{1}{4}x^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y.$$

k) Een formule voor g die door het punt $(2,1)$ gaat (zie g)).

$$x = 2 \text{ en } y = 1: y = c \cdot e^{\frac{1}{4}x^2} \Rightarrow 1 = c \cdot e \Rightarrow c = e^{-1} \Rightarrow y = e^{\frac{1}{4}x^2 - 1}.$$

Met het programma WINPLOT kun je de grafiek van een oplossingsfunctie laten tekenen met behulp van de methode van Euler

Schermb: 2-dim

Verg: Diffverg: dy/dx

dy/dx=....(invullen; ok

Een: dy/dx integraalkromme: teken.

Stel dat na n -stappen de benaderde kromme gaat door het punt (x_n, y_n) .

De volgende benadering (x_{n+1}, y_{n+1}) vind je met:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} x_n \cdot y_n \cdot \Delta a.$$

Deze vergelijking gebruik je om de waarden met de GR te berekenen.

Nu is voor $\Delta a = 0.1$ gekozen.

Met de GR maak je tabellen: voor x_n waarbij $x_n = x_{n-1} + 0.1$ en de startwaarde $x_0 = 0$.

Dus de x -waarde wordt steeds met een stap van .1 vergroot.

De waarde voor y_n vind je met de benaderingsformule (van Euler):

$$y_n = y_{n-1} + \frac{1}{2} x_{n-1} y_{n-1} \cdot 0.1$$

In deze benaderingsformule wordt n en $n - 1$ gebruikt samenhangend met de formules op de GR.

Gegeven de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}xy$

$y = f(x)$ is de oplossingskromme door $(0,1)$, dus $f(0) = 1$.

Neem $\Delta a = 0.1$.

De waarden berekenen met de GR

Gegeven de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y$

$y = f(x)$ is de oplossingskromme door $(0,1)$, dus $f(0) = 1$.

Neem $\Delta a = 0,1$

Zet de GR in de MODE Seq en kies Y=

```

Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
u(n)=u(n-1)+0.1
u(nMin)=0
u(n)=u(n-1)+0.5
*u(n-1)*u(n-1)*0.1
.1
u(nMin)=1
w(n)=

```

← $n = 0$
← $x_n = x_{n-1} + 0,1$
← $x_0 = 0$
← $y_n = y_{n-1} + 0,5 \cdot x_{n-1} \cdot y_{n-1} \cdot 0,1$
← $y_0 = 1$

Kies 2ND TABLE

De waarden berekenen met de GR

Gegeven de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y$

$y = f(x)$ is de oplossingskromme door $(0,1)$, dus $f(0) = 1$.

Neem $\Delta a = 0,1$

n	u(n)	v(n)
0	0	1
1	0.05	1.005
2	0.1	1.0151
3	0.15	1.0303
4	0.2	1.0509
5	0.25	1.0772

n=6

n	u(n)	v(n)
7	0.3	1.1095
8	0.35	1.1483
9	0.4	1.1942
10	0.45	1.248
11	0.5	1.3104
12	0.55	1.3824
13	0.6	1.4659

n=13

n	u(n)	v(n)
14	0.65	1.5606
15	0.7	1.6699
16	0.75	1.7951
17	0.8	1.9387
18	0.85	2.1035
19	0.9	2.2928
20	0.95	2.5107

n=20

$$x_{20} = x_0 + 20 \cdot 0,1 = 2.$$

$$y_{20} = 2,5107$$

$$f(2) = e^1 = e \cong 2.718.$$

Met de GR vind je: $e \sim y_{20} = 2.5107$.

Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.

Opgave 18 § 3 Mottenbal, het ontwerpen van een model en ermee rekenen.

Een mottenbal is een bolletje kamfer. Door verdamping wordt het bolletje steeds kleiner.

a) Wat is de oppervlakte van een mottenbal met een volume $V = 1.2 \text{ cm}^3$? We nemen een zuivere bolvorm aan met straal r . Het volume: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r = (\frac{3V}{4\pi})^{1/3} \Rightarrow r = (\frac{0.9}{\pi})^{1/3}$. Het oppervlak van de bol: $4\pi r^2 = 4\pi(\frac{0.9}{\pi})^{2/3} = 5.46 \text{ cm}^2$.

b) Stel een formule op voor de oppervlakte O van de mottenbal als functie van het volume. De ingrediënten zijn aanwezig: $O = 4\pi(\frac{3V}{4\pi})^{2/3} = (36\pi V^2)^{1/3}$.

c) Het gewicht van de mottenbal noemen we G (in grammen), de tijd noemen we t (in weken). Hoe groter de oppervlakte van de mottenbal, hoe groter de verdamping. We nemen aan dat de snelheid waarmee het gewicht van de bal afneemt evenredig met het O . Deze aanname leidt tot de volgende differentiaalvergelijking: $\frac{dG}{dt} = -c \cdot G^{2/3}$, voor een bepaalde constante c die experimenteel wordt vastgesteld. We nemen voor $c = 0.3$.

Een mottenbal weegt 8 gram.

Bepaal met de methode van Euler hoeveel gram de mottenbal weegt na 1 week. Neem een stapgrootte van 0.1.

De macht $2/3$ in de differentiaalvergelijking volgt direct uit $O = 4\pi(\frac{3V}{4\pi})^{2/3}$.

$$G(0) = 8.$$

De methode van Euler: $f(a + \Delta a) = f(a) + f'(a) \cdot \Delta a$.

Gebruik de grafische rekenmachine:

$$u_n = u_{n-1} + 0.1$$

$$v_n = v_{n-1} - 0.3 \cdot (v_{n-1})^{2/3} \cdot 0.1. \text{ Voor } n = 10 \Rightarrow v_n = 6.8534.$$

Gebruik de directe methode:

8 ENTER,

$$\text{ANS} + (-.3) \cdot \text{ANS} \cdot .1 \Rightarrow G(1) = 6.853.$$

Als toegift de exacte oplossing:

$\frac{dG}{G^{2/3}} = -0.3 \cdot dt \Rightarrow 3G^{1/3} = -0.3t + b$, where b is the constant of integration. Deze constante wordt bepaald door de beginvoorwaarde voor $G(t = 0) = 8$.

$$G^{1/3} = -0.1t + \frac{b}{3} \Rightarrow t = 0 : 8^{1/3} = \frac{b}{3} \Rightarrow b = 6 \Rightarrow G = (2 - 0.1 \cdot t)^3.$$

Na 1 week, $t = 1$,

$$G = 8 \cdot (0.95)^3 = 6.859. \text{ De formule van Euler brengt je goed in de buurt van het exacte antwoord.}$$

Overzichtsvraag

a) Y is een hoeveelheid die zich ontwikkelt in de tijd t . We gaan de methode van Euler toepassen met de stapgrootte 0.1.

Hoe groot is $Y(t + 0.1)$ ongeveer, uitgedrukt in $Y(t)$ en $Y'(t) \equiv \frac{dY}{dt}$?

$$Y'(t) \cong \frac{Y(t+0.1)-Y(t)}{0.1} \Rightarrow Y(t+0.1) \cong Y(t) + 0.1 \cdot Y'(t).$$

b) Neem $\frac{dY}{dt} = \frac{0.2}{Y}$, en $Y(1) = 3$.

Hoeveel stappen heb je nodig om $Y(2.5)$ uit te rekenen?

Uitgaande van de stapgrootte 0.1, heb je, om van $Y(1)$ bij $Y(2.5)$ uit te komen 15 stappen nodig.

c) Bereken nu $Y(2.5)$ met de grafische rekenmachine (GR).

Met de GR

$n=0$

$u(n)=u(n-1)+0.1$

$u(nMin)=1$

$v(n)=v(n-1)+[0.2/v(n-1)] \cdot 0.1$

$v(nMin)=3$

Samengevat:

We maken een tabel met in de eerste kolom t , die toeneemt van 1 tot 2.5 met stapjes van 0.1.

In de tweede kolom zetten we $Y(t)$. Gegeven is dat $Y(1) = 3$. Deze waarde kan in de eerste rij van de tweede kolom worden ingevuld.

In de derde kolom berekenen we $\frac{dY}{dt}$, als Y bekend is. Daarvoor gebruiken we $\frac{dY}{dt} = \frac{0.2}{Y}$.

In iedere volgende rij wordt $Y(t)$ berekend met $Y(t) + 0.1 \cdot \frac{dY}{dt}$, waarbij $\frac{dY}{dt}$ uit de vorige rij wordt gehaald.

• Oefenen

Lezen: paragraaf 3.

Maken: de overzichtsvragen op bladzijde 17.

Blok 11 De Toets Differentiaalvergelijkingen

Opgave 1

Gegeven de differentiaalvergelijking $\frac{du}{dt} = -5u^2$.

a) Laat zien dat $u(t) = \frac{1}{5t-k}$, een oplossing is van de vergelijking en k is een constant getal.

$$\frac{du}{dt} = \frac{-5}{(5t-k)^2} = -5 \left(\frac{1}{5t-k} \right)^2 = -5u^2.$$

b) Gegeven is $u(0) = 50$. Bereken k .

$$u(0) = \frac{1}{-k} = 40 \Rightarrow k = -\frac{1}{40}.$$

Opgave 2

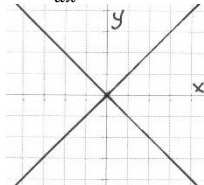
Gegeven de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = y^2 - x^2$.

a) Bereken de waarde van de groeisnelheid in het punt $(1,2)$.

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2^2 - 1^2 = 3.$$

b) Maak een tekening van de punten (x, y) van het vlak waarvoor geldt dat de groeisnelheid 0 is.

$$\text{Dus } \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (y+x)(y-x) = 0 \Rightarrow y = x, \text{ of } y = -x.$$



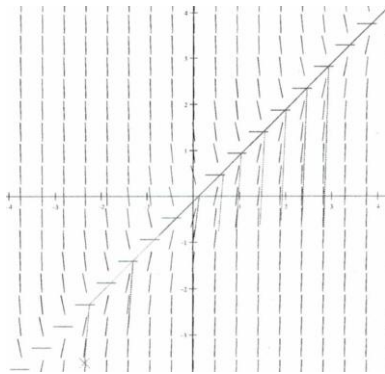
c) Laat zien dat de lijn $y = x$, geen oplossingskromme is van de differentiaalvergelijking.

Als $y = x$, dan geldt dat $\frac{dy}{dx} = 1$, terwijl $\frac{dy}{dx} = y^2 - x^2$ resulteert in $\frac{dy}{dx} = 0$.

Opgave 3

In de onderstaande figuur is het richtingsveld met een oplossingskromme getekend bij de

differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = 10(x - y)$.



Je kunt uit dit richtingsveld aflezen dat een rechte lijn een oplossingskromme is van de vergelijking.

Bepaal de vergelijking van de lijn en laat zien dat die vergelijking een oplossing is.

DE algemene vergelijking voor de rechte lijn: $y = ax + k \rightarrow \frac{dy}{dx} = a$.

De vergelijking $\frac{dy}{dx} = 10(x - y) \rightarrow \frac{dy}{dx} = 10(x - ax - k) = 10x(1 - a) - 10k$.

Gegeven: $\frac{dy}{dx} = a$, dus onafhankelijk van $x \therefore (1 - a) = 0, \frac{dy}{dx} = -10k$

De algemene vergelijking voor de rechte lijn reduceert tot: $y = x + k \rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 = -10k \therefore k = -\frac{1}{10}$.

Opgave 4

Een luchtballon verliest elke 5 minuten 5% van het volume. $V(t)$ is het volume (in liter) op tijdstip t (in minuten) en $r(t)$ (in dm) is de straal van de ballon. Voor het volume geldt: $V(t) = \frac{4}{3}\pi[r(t)]^3$. Door het luchtverlies neemt de straal af.

a) Laat zien dat de differentiaalvergelijking $\frac{dr}{dt} = -0.05 \cdot \frac{1}{3} \cdot r$.

We weten(gegeven) dat $\frac{dV}{dt} = -0.05 \cdot V$.

$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{4}{3}\pi[r(t)]^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3 \cdot r^2 \cdot \frac{dr}{dt} = -0.05 \cdot V = -0.05 \cdot \frac{4}{3}\pi[r(t)]^3 \rightarrow \frac{dr}{dt} = -0.05 \cdot \frac{1}{3} \cdot r$.

b) Op begintijd $t = 0$, is $r(0) = 1.97$ dm

Geef met de methode van Euler een benadering voor de straal voor $t = 1$ en $t = 2$.

We moeten wel een stapgrootte kiezen. We nemen een stapgrootte van 1(min).

$\frac{dr}{dt} = -0.05 \cdot \frac{1}{3} \cdot r$:

$r(1) = r(0) - 0.05 \cdot \frac{1}{3} \cdot r(0) \cdot 1 = 1.94$,

$r(2) = r(1) - 0.05 \cdot \frac{1}{3} \cdot r(1) \cdot 1 = 1.91$.

Nota Bene met de GR en stapgrootte van 0.1 (dus 10 stappen)

$u(n) = u(n-1) + 0.1$

$u(nMin) = 0$

$v(n) = v(n-1) - \frac{1}{3} \cdot 0.05 \cdot v(n-1) \cdot 0.1$

$v(nMin) = 1.97$

Met de GR vinden we dan:

$r(1) = 1.937$,

$r(2) = 1.905$.

Hoe goed is de stapgrootte 0.1?

Controle met behulp van de exacte oplossing: $r = 1.97e^{-\frac{0.05}{3}t}$:

$r(1) = 1.937$,

$r(2) = 1.905$.

Gegeven de nauwkeurigheid van de beginvoorwaarde is de stapgrootte van 0.1 acceptabel.

Blok 11 Toegift, De gravitatieput; A friendly μ -Blackhole

Deze toegift sluit aan bij de paragraaf 3 van Continue Dynamische Processen van de Wageningse Methode

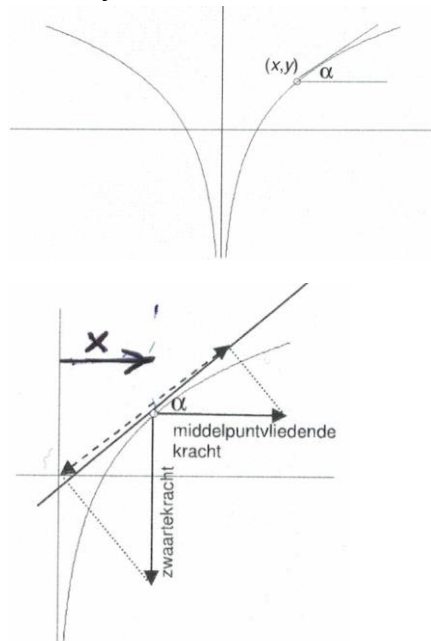
In beide onderstaande figuren is een doorsnede getekend van een trechter (funnel). De trechter roteert met een bepaalde rotatiesnelheid. Wanneer een voorwerp, voldoende licht, in de draaiende trechter wordt geworpen, zal uiteindelijk het voorwerp in het midden van de trechter verdwijnen.

Het voorwerp heeft de massa m .

De verticale zwaartekracht is: $m \cdot g$,

De horizontale middelpuntvliedende kracht is: $m \cdot \frac{v^2}{x}$,

Waarbij v de omtreksnelheid is, loodrecht op het vlak van tekening.



Hoe krijgen we het voor elkaar dat het voorwerp in de trechter in een horizontale cirkel draait?

Het voorwerp ligt op de wand van de trechter. Dus als het voorwerp op dezelfde plek moet blijven, moeten de componenten van bovengenoemde krachten tegengesteld zijn en elkaar opheffen:

$$\rightarrow m \cdot g \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = m \cdot \frac{v^2}{x} \cos \alpha \rightarrow m \cdot g \sin \alpha = m \cdot \frac{v^2}{x} \cos \alpha \rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{v^2}{g \cdot x}.$$

Met behulp van bovenstaande vergelijking kunnen we een vergelijking vinden voor de vorm van de trechter.

Voor de raaklijn in het punt (x, y) in bovenstaande tekening geldt:

$$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{v^2}{g \cdot x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{v^2}{g} \frac{1}{x}.$$

Het voorwerp draait in een horizontale baan $\rightarrow \frac{v^2}{g}$ is constant.

De functie die de vorm van de trechter beschrijft vinden we door de differentiaal vergelijking

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v^2}{g} \frac{1}{x} \text{ op te lossen:}$$

$$dy = \frac{v^2}{g} \frac{dx}{x} \rightarrow y = \frac{v^2}{g} \ln x,$$

de natuurlijke logaritme met $x > 0$.

In de differentiaal vergelijking komt m niet meer voor $\rightarrow$ het verschijnsel geldt voor elke m .

Bij het uitvoeren van het experiment, zal het voorwerp altijd een naar beneden gerichte snelheid hebben, hoe klein ook. Daardoor kan v niet constant zijn. De differentiaalvergelijking is, voor de beschrijving van de werkelijkheid, ingewikkelder.

Blok 12 Kegelsneden

Blok 12 les 1 Gelijke afstand

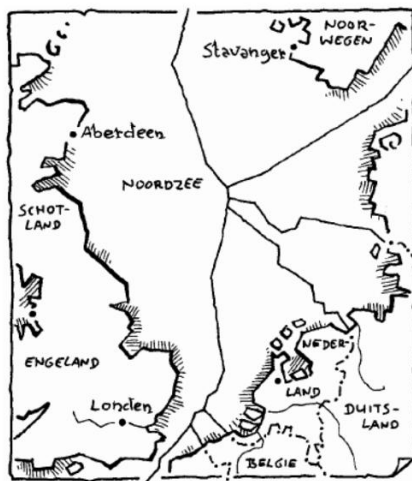
Deze les sluit aan bij paragraaf 1 van Conflictlijnen van de Wageningse Methode 2016

- De verdeling van de Noordzee

Het nabuurprincipe:

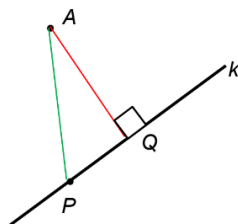
Elk stuk van de zeebodem hoort bij het land waar het stuk het dichtst bij ligt.

Maar hoe meet je de afstand van een punt tot de kust?



- Afstand

Gegeven: een lijn k en een punt A buiten de lijn.



→ De kortste verbinding van A met de punten op de lijn is een loodlijnstuk vanuit A op k .

Bewijs

AQ is de loodlijn van A op k .

$|AQ|$ is de lengte van AQ .

Kies een willekeurig punt P op k ($P \neq Q$).

Volgens de stelling van Pythagoras geldt:

$$|AP|^2 = |AQ|^2 + |PQ|^2$$

Dan is $|AP|^2 > |AQ|^2$ en dus ook $|AP| > |AQ|$

- Iso-afstand

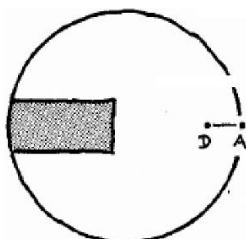
Definitie:

Gegeven is een gebied.

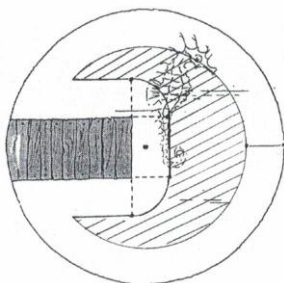
De punten die buiten het gebied liggen, op een afstand x van de rand van het gebied, vormen de zogenaamde iso- x -afstandslijnen.

Opgave 4 § 1

In een perfect rond meertje staat een aanlegsteiger. A. vist in het meertje op forel. A. kan elke plek aan de rand van de vijver en op de steiger (donker gearceerd) kiezen. In het onderstaande plaatje zie je A. op een bepaalde plaats staan. Als A. de hengel zo ver mogelijk over de vijver steekt. Komt de dobber op plek D.



a) Teken(arceer) het gebied waar de forellen geen gevaar lopen te worden gevangen.



b) De diameter van het meertje is 18 meter. De steiger is 4 meter breed en is in het midden 8 meter lang.

Hoe lang moet de hengel minstens zijn, opdat de vissen alleen nog maar onder de steiger veilig zijn?

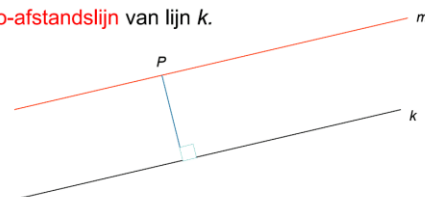
Over het midden van de steiger gemeten resteert 10 meter. Dus met een hengel die langer is dan 5 meter verdwijnt de veilige zone.

• Gelijke afstand tot een lijn

Gegeven: een lijn k en een lijn m evenwijdig aan k .

→ Elk punt P op m heeft dezelfde afstand tot k .

→ m is een **iso-afstandslijn** van lijn k .



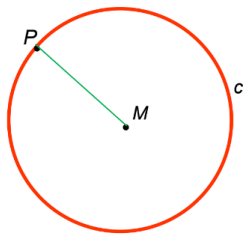
Er is nog een iso-afstandslijn bij k met dezelfde afstand als m tot k . Deze ligt aan de andere kant van k .

• Gelijke afstand tot een punt

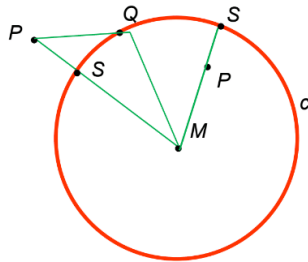
Gegeven een punt M en een cirkel c met M als middelpunt, zie hieronder.

→ Elk punt P op c heeft dezelfde afstand tot M .

→ c is een iso-afstandslijn van punt M .



- Afstand van een punt tot een cirkel



Bewering

Een cirkel met M als middelpunt.

Punt P ligt binnen of buiten de cirkel.

S is het snijpunt van het lijnstuk PM met de cirkel.

Dan is $|PS|$ de kortste afstand van P tot de cirkel.

Bewijs:

Kies Q willekeurig op de cirkel ($Q \neq S$).

Dan is $|PQ| + |QM| > |PM|$ de driehoeksongelijkheid (Cauchy-Schwarz)

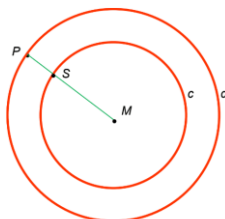
$|QM| = |SM|$ dus $|PQ| > |PS|$.

- Gelijke afstand tot een cirkel

Gegeven: een cirkel c met middelpunt M en een cirkel d , buiten c , met hetzelfde middelpunt M .

→ elk punt P op d heeft dezelfde afstand tot cirkel c .

→ d is een iso-afstandslijn van cirkel c .



Er kan nog een iso-afstandslijn zijn bij c met dezelfde afstand als d tot c .

Dit is een cirkel met middelpunt M binnen cirkel c dezelfde afstand als d tot c .

- Gelijke afstand tot een kromme.

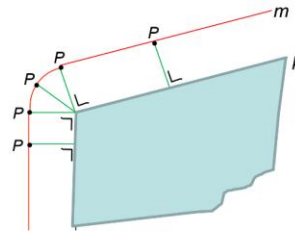
De afstand van een punt P tot een kromme k is de lengte van het kortste lijnstuk PQ waarbij Q op k ligt.

Elke kromme m is iso-afstandslijn van een kromme k als elk punt P op m dezelfde afstand heeft tot k .

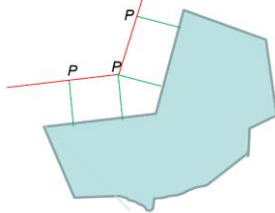
Voorbeeld 1

k bestaat uit twee halfrechten die een hoek met elkaar maken.

m bestaat uit twee halfrechten, evenwijdig met k en een cirkelboog met het hoekpunt als middelpunt.

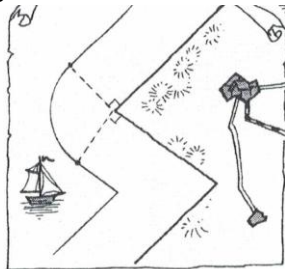


Voorbeeld 2:

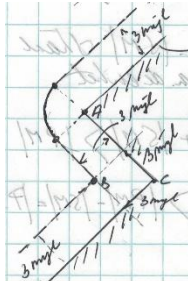


Opgave 3 § 1

Een kustlijn maakt twee scherpe hoeken: een landinwaartse en een zee-inwaartse. Zie de Figuur hieronder:



a) De punten die op afstand 3 mijl uit de kust liggen vormen de driemijlslijn. Teken de driemijlslijn. Zie Figuur hieronder:



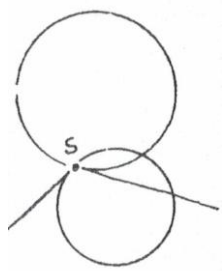
b) Bij het punt A tekenen we een cirkel met een straal van 3 mijl. Deze cirkel raakt aan de rechte 3 mijlslijn uit de kust. De aansluitpunten zijn aangegeven. De afstand BC is dus meer dan 3 mijl. Dat is de consequentie van de methodiek.

- **Opmerkingen bij iso-afstandslijnen**

In paragraaf 1 van de Wageningse methode wordt het onderwerp snijdende cirkels besproken, o.a. op blz. 3.

Bijv.: Laat S een gemeenschappelijk punt zijn van twee cirkels. Bekijk op beide cirkels een boog met eindpunt S . Onder de hoek die deze cirkelbogen met elkaar maken, verstaan wij de hoek die de bijbehorende halve raaklijnen met elkaar maken. In S maken de cirkels dus vier hoeken, die twee aan twee gelijk zijn.

Zie de Figuur hieronder:



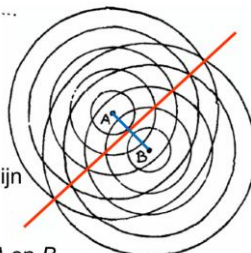
- **Gelijke afstand tot twee punten.**

Gegeven twee punten A en B .
De iso-afstandslijnen rond A en B zijn cirkels met A en B als middelpunten.

De snijpunten van de cirkels met gelijke straal liggen even ver van A als van B .

Deze snijpunten liggen op de middelloodlijn van het lijnstuk AB .

Deze lijn is de **conflictlijn** van de punten A en B .
De punten op deze lijn liggen even ver van A als van B .



- **Meetkundige plaats**

Een meetkundige plaats is de verzameling punten in het vlak die aan een specifieke meetkundige eigenschap voldoet.

Voorbeeld:

Een cirkel is de meetkundige plaats van punten die even ver van een gegeven punt, het middelpunt, liggen.

Stelling:

De middelloodlijn van een lijnstuk AB is de meetkundige plaats van punten die even ver van A als van B liggen.

Het bewijs bestaat uit twee gedeelten:

1. Gegeven een punt P dat even ver van A als van B af ligt, laat zien dat P op de middelloodlijn ligt.
2. Gegeven een punt P op de middelloodlijn, laat zien dat P dat even ver van A als van B af ligt.

NB: Je bewijst dus dat de middelloodlijn precies alle punten P met de eigenschap bevat. Dus geen punten meer of minder.

Bewijs 1.

Gegeven een punt P dat even ver van A als B af ligt.

Teken de loodlijn vanuit P op AB .

Q is het voetpunt van de loodlijn.

$\rightarrow \triangle APQ \cong \triangle BPQ$ (zzr)

$\rightarrow AQ = BQ$

$\rightarrow P$ ligt op de middelloodlijn van AB .



Bewijs 2.

P ligt op de middelloodlijn van AB .

$AQ = BQ$

$\angle AQP = \angle BQP$

QP is gemeenschappelijk

$\triangle AQP$ congruent met $\triangle BQP \therefore AP = BP$.

- Meetkundige plaats en conflictlijn

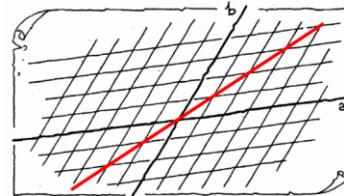
De middelloodlijn van een lijnstuk AB is de meetkundige plaats van punten P die even ver van A als van B af liggen.

De middelloodlijn van een lijnstuk AB is de conflictlijn van A en B .

- Gelijke afstand tot twee lijnen.

Gegeven twee snijdende lijnen a en b .
De iso-afstandslijnen rond a en b zijn lijnen evenwijdig met a en b .

De snijpunten van de lijnen met gelijke afstand tot a en b liggen even ver van a als van b .



Deze snijpunten liggen op de bissectrice van de lijnen a en b .

- Meetkundige plaats

Stelling

De bissectrice van twee snijdende lijnen a en b is de meetkundige plaats van de punten P die even ver van A als van B af liggen.

Het bewijs bestaat uit twee gedeelten:

1 Gegeven een punt P dat even ver van a als van b ligt, laat zien dat P op de bissectrice ligt.

2 Gegeven een punt P op de bissectrice, laat zien dat P even ver van a als van b ligt.

Bewijs 1

Gegeven een punt P dat even ver van a als van b ligt.

Q is het snijpunt van beide lijnen.

Teken de loodlijnen vanuit P op a en b .

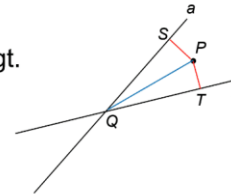
De voetpunten zijn S en T .

Teken PQ .

$\rightarrow \triangle SPQ \cong \triangle TPQ$ (zzr)

$\rightarrow \angle SQP = \angle TQP$

$\rightarrow P$ ligt op de bissectrice van a en b .



Bewijs 2.

P ligt op de bissectrice

$\angle SQP = \angle TQP$

QP is gemeenschappelijk

$\angle QSP = \angle QTP = 90^\circ$

Dus $SP = TP \therefore P$ ligt even ver van a als van b .

- Meetkundige plaats en conflictlijn.

De meetkundige plaats van punten P die even ver van een figuur A als van een figuur B liggen, heet de conflictlijn van A en B .

Voorbeelden:

- De middelloodlijn van een lijnstuk AB is de conflictlijn van A en B .

- De bissectrice van twee snijdende lijnen a en b is de conflictlijn van de lijnen a en b .

- **Samengevat**

- Een kromme m is iso-afstandslijn van een kromme k als elk punt P op m dezelfde afstand heeft tot k .

De punten die buiten een gebied liggen, op afstand x van de rand van het gebied, vormen de zogenaamde iso- x -afstandslijn.

- De conflictlijn van twee punten A en B bevat alle punten die even ver van A als van B af liggen.

- De conflictlijn van twee lijnen a en b bevat alle punten die even ver van a als van b liggen.

- Een meetkundige plaats is de verzameling punten in het vlak die aan een specifieke meetkundige eigenschap voldoen.

- De middelloodlijn van een lijnstuk AB is de conflictlijn van A en B .

- De bissectrice van twee snijdende lijnen a en b is de conflictlijn van de lijnen a en b .

Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.

Opgave 5: Iso- x -afstandslijnen (zie definitie hierboven in de summary).

a) Hoe lang is de iso- x -afstandslijn bij een cirkelvormig gebied met straal 2?

De afstand uitdrukken in x .

De straal wordt $x + 2$. De lengte van de iso- x -afstandslijn wordt: $2\pi(x + 2)$.

b) Hoe lang is de iso- x -afstandslijn bij een driehoek met zijden 3, 4 en 5?

Zie schets van de driehoek hieronder.

De rechte stukken van de iso- x -afstandslijn zijn weer 3, 4 en 5 lang. Totaal: 12.

De andere stukken van de iso- x -afstandslijn zijn cirkelsegmenten. We gaan daarvan de lengte bepalen. Dat doen we door de booghoeken uit te rekenen.

Bij elk hoekpunt teken je een complete cirkel met straal x . De lengte van de 3 cirkel omtrekken is $3 \times 2\pi x$.

Bij elk hoekpunt, zie schets moet je van de iso- x -afstandslijn er ook $2 \times \frac{\pi}{2}x$, dus totaal $3 \times 2 \times \frac{\pi}{2}x = 3\pi x$

af trekken. We zijn er nog niet. Ook de bijdrage van de hoeken van de driehoek moet van de iso- x -afstandslijn worden afgetrokken. De totale iso- x -afstandslijn wordt daarmee: $12 + 6\pi x - 3\pi x - \pi x = 12 + 2\pi x$.

c) Hoe lang is de iso- x -afstandslijn bij een rechthoek met zijden 2 en 5?

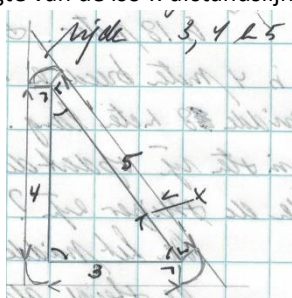
Een schets is hier niet nodig. Je ziet het voor je. De 4 rechte zijden: $(2 \times 2 + 2 \times 5) = 14$.

De vierbooghoeken zijn elk $\frac{\pi}{2}$. De totale lengte van de iso- x -afstandslijn is: $14 + 4 \times \frac{\pi}{2}x = 14 + 2\pi x$.

d) Een vierhoekig gebied heeft zijden van 2, 3, 4 en 5 en heeft geen inspringende hoeken.

Ook hier is een schets niet nodig. Er zijn geen inspringende hoeken. De som van de hoeken van deze vierhoek is dus 2π . Dus van de iso- x -afstandslijn moet je $2\pi x$ aftrekken. Net als in de onderstaande schets voor de driehoek is aangegeven, moet je bij de vierhoek $4 \times 2 \times \frac{\pi}{2}x = 4\pi x$ van de iso- x -afstandslijn aftrekken. Van de vierhoekpunten van de vierhoek resteert voor de iso- x -afstandslijn: $4 \times 2\pi x - 2\pi x - 4\pi x = 2\pi x$.

De totale lengte van de iso- x -afstandslijn is $2 + 3 + 4 + 5 + 2\pi x = 14 + 2\pi x$.



Een schets:

Opgave 6 § 1

Dezelfde vragen als bij opgave 5, maar nu voor de oppervlakte van de zone tussen de iso-x-afstandslijn en de gebieden die in opgave 5 zijn onderzocht.

a) Hoe groot is het oppervlak van de zone tussen de iso-x-afstandslijn en het cirkelvormig gebied met straal 2? De oppervlakte van de zone is:

$$\pi(x+2)^2 - \pi \cdot 2^2 = \pi \cdot (x^2 + 4x).$$

b) Hoe groot is het oppervlak van de zone tussen de iso-x-afstandslijn en een driehoek met zijden 3,4, en 5? Zie ook bovenstaande schets in opgave 5.

De cirkelsegmenten van de hoekpunten zijn opgeteld gelijk aan $2\pi x$.

De gevraagde oppervlakte is: $(3+4+5)x + \pi x^2 = \pi x^2 + 12x$.

c) Hoe groot is het oppervlak van de zone tussen de iso-x-afstandslijn een eenrechthoek met zijden 2 en 5?

De rechthoek met zijden van 2 en 5: $(2+2+5+5)x = 14x$.

De cirkelsegmenten bij de hoekpunten die samen een hoek van 2π vormen, dragen een oppervlak van πx^2 bij. Dus totaal: $\pi x^2 + 14x$.

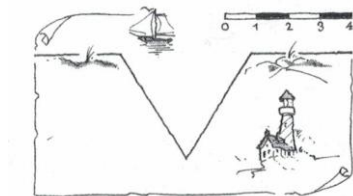
d) Hoe groot is het oppervlak van de zone tussen de iso-x-afstandslijn en een vierhoekig gebied met zijden van 2,3,4 en 5 en geen inspringende hoeken?

Zoals we hebben gevonden in opgave 5 vormen de vierhoekpunten een hoek van 2π .

De totale oppervlakte is: $(2+3+4+5)x + \pi x^2 = \pi x^2 + 14x$.

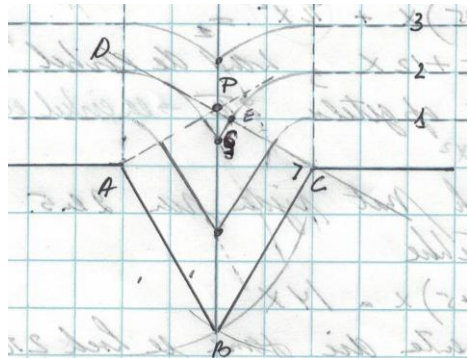
Opgave 7 § 1

We bekijken een land met een V-vormige inham. Zie het plaatje hieronder:



Bij het bovenstaande plaatje is een schaalstok getekend. De inham is een gelijkzijdige driehoek met zijde 4.

a) Teken in de zee de iso-1-afstandslijn, de iso-2-afstandslijn en de iso-3-afstandslijn. Geef aan waar de rechte stukken aansluiten op de cirkelbogen.



b) De iso-1-afstandslijn ende iso-2-afstandslijn bestaan uit twee cirkelbogen en vier rechte stukken. De iso-3-afstandslijn bestaat uit twee cirkelbogen en twee rechte stukken. Zie hierboven.

Bereken de kleinste waarde van x , waarvoor de iso- x -afstandslijn uit twee cirkelbogen en twee rechte stukken bestaat. De cirkelbogen lopen door tot de lijn $CD \perp BC$. $\angle BCP = 90^\circ$.

Nota Bene: Door de gekozen schaal van bovenstaande schets raakt CD aan de iso-2-afstandslijn. Dit is dus toeval en heeft geen betekenis.

Daar waar de cirkelboog van de iso- x -afstandslijn de bisectrice van $\angle ABC$ snijdt vinden we de gevraagde iso- x -afstandslijn. Dus als $\triangle PEG \rightarrow 0$. $|PC|$ is de kleinste waarde van x .

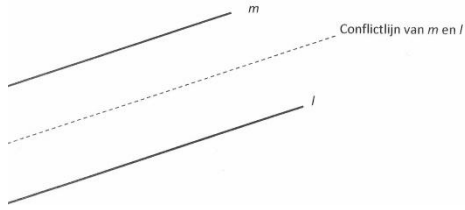
Van de rechthoekige driehoek kennen we alle hoeken en 1 zijde ($= 4$). $\angle PBC = 30^\circ$, $\angle BCP = 90^\circ$, en $\angle BPC = 60^\circ$.

$$|PB| = \frac{4}{\sin 60^\circ} = \frac{8}{3}\sqrt{3} \Rightarrow |PC| = \frac{1}{2}|PB| = \frac{4}{3}\sqrt{3} \Rightarrow \text{de kleinste waarde van } x.$$

Opgave 14 § 1

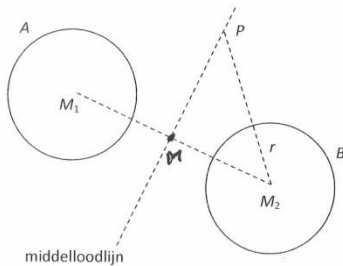
a) Gegeven zijn twee evenwijdige lijnen.

Omschrijf de verzameling punten die op gelijke afstand van de lijnen liggen.



De enige punten die op gelijke afstand liggen tot m en l liggen er precies midden tussen. De conflictlijn is dus de lijn tussen m en l , met gelijke afstand tot beide lijnen.

b) Gegeven zijn twee cirkels met dezelfde straal r die elkaar niet snijden. Omschrijf de verzameling punten die op gelijke afstand van de cirkels liggen.



Het punt M op M_1M_2 ligt op gelijke afstand van de cirkels. Het punt P is het snijpunt van de twee cirkels met middelpunt M_1 en M_2 en straal $M_1P = M_2P$. P ligt op gelijke afstand van de cirkels met straal r . Uit congruentie volgt dat PM loodrecht op M_1M_2 staat. De verzameling van punten P met gelijke afstand tot de cirkels ligt op de middelloodlijn van de verbindinglijn van de middelpunten van beide cirkels. Deze middelloodlijn is de conflictlijn van beide cirkels omdat de cirkels gelijke stralen hebben.

• Oefenen

Bestuderen: paragraaf 1.

Maken: de opgaven van paragraaf 1.

Blok 12 Les 2 Conflictlijnen en Kegelsneden

Deze les sluit aan bij de paragrafen 2, 3 en 4 van Conflictlijnen van de Wageningse Methode 2016

• Meetkundige plaats en conflictlijn (herhaling).

De meetkundige plaats van punten P die even ver van een figuur (of gebied) A als van een figuur (of gebied) B liggen, heet een conflictlijn van A en B . Dus voor een punt P op de conflictlijn van A en B $\leftrightarrow d(P, A) = d(P, B)$. Een punt van A dat het dichtst bij P ligt, noemen we een voetpunt van P op A .

Voorbeelden:

De middelloodlijn van een lijnstuk AB is de conflictlijn van A en B .

De bissectrice van twee snijdende lijnen a en b is de conflictlijn van de lijnen a en b .

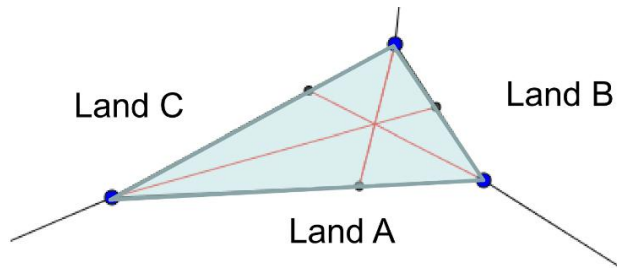
• Drie landen.

Drie landen verdelen een binnenzee.

Volgens het naastebuurprincipe hoort een plek op zee tot het land dat het dichtste bij ligt. De bijbehorende grenslijn heet de conflictlijn tussen, bijv., twee gebieden.

De conflictlijnen van de grenzen aan de binnenzee zijn de bissectrices vanuit de hoekpunten. Hier wordt ervan uit gegaan dat de binnenzee eenvoudig voorgesteld

kan worden door een driehoek, waarbij de zijden van de driehoek de begrenzing van de binnensee vormen.



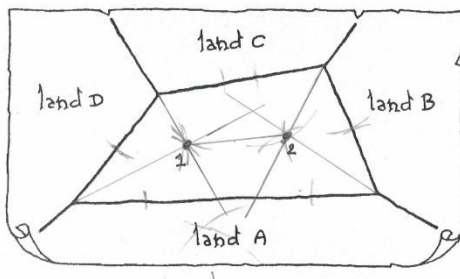
De conflictlijnen van de grenzen zijn de bissectrices vanuit de hoekpunten.

Opgave 26 Vierlanden

Vier landen grenzen aan een binnensee. Ze verdelen de binnensee volgens het naastebuurprincipe.

a) De binnensee wordt verdeeld met behulp van de bissectrices. Het gaat om de afstand tussen lijnen.

b) Er zijn twee drielandenpunten: A,D en C en van A,B en C. Zie onderstaande Figuur.



Het verbindings lijnstuk van deze drielandenpunten is

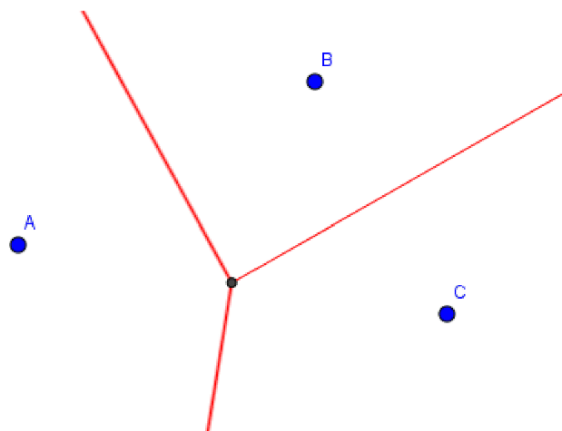
grenslijn tussen A's deel en C's deel van de binnensee. Het is een stuk van de bissectrice van de hoek die de kusten van land A en land C met elkaar maken.

de punten met gelijke afstanden tot land A en land C bevinden zich op de bissectrices. 1 en 2 liggen op de bissectrices en dus op gelijke afstand van land A en land C. Het is aannemelijk dat de ook de punten op het lijnstuk 1-2 op gelijke afstand liggen van land A en land C.

• Drie plaatsen

Teken de middelloodlijnen van de drie punten. Dus de middelloodlijn van AB , etc.

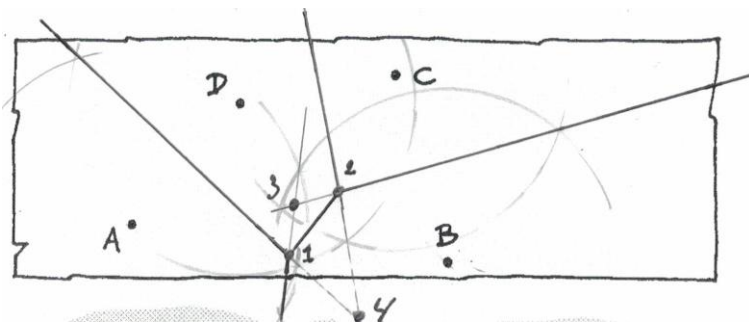
Deze lijnen gaan door het drielandenpunt. De halflijnen, dus dat deel van de middelloodlijnen gezien vanuit het drielanden punt, verdelen het vlak in drie gelijke gebieden.



• Vier plaatsen

Opgave 27 Vier Plaatsen

Verdeel vier centra, A, B, C , en D , volgens het naastebuurprincipe.



Verdeel eerst het gebied rond de punten B, C en D : drie middelloodlijnen. Zo vind je een drielandenpunt voor B, C en D : punt 2.

En verdeel vervolgens rond de punten A, B en D . Zo vind je punt 1 op vergelijkbare wijze als punt 2.

Er ontstaan dan op deze wijze in het algemeen twee drielandenpunten. Maak de verdeling af door het verbindingslijntje tussen de twee drielandenpunten. Punt 1 ligt op gelijke afstand van D en B , evenals punt 2 $\Rightarrow$ dit lijnstuk is een gedeelte van de middelloodlijn van BD .

Punt 3 ligt op de middelloodlijn van AC , evenals punt 4. Maar het lijnstuk 3-4 verbindt geen 3-landenpunt.

- **Werken met Geogebra**

In les 4 blok 8, Vlakke Meetkunde, heb je met het programma Geogebra leren werken.

Bij de opgaven in deze les kun je ook Geogebra gebruiken.

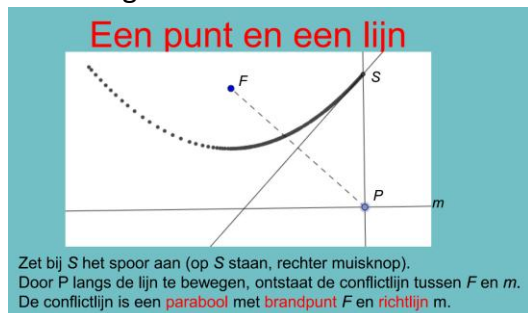
- **Een punt en een lijn**

Gegeven een rechte grenslijn m en een punt F niet op m .

Verdeel het vlak volgens het naastebuurprincipe tussen F en m .

Kies een willekeurig punt P op m . P kan je overal kiezen op m .

Met Geogebra:



(Spoor is een actie in Geogebra: Beweeg P langs m .)

Zonder Geogebra.

Teken de loodlijn uit P op m . (Zie ook bovenstaande tekening).

Teken de middelloodlijn van FP .

Punt S is het snijpunt van deze middelloodlijn en de loodlijn uit P . Hieruit blijkt waarom je de loodlijn uit P neemt: de kortste afstand van een punt tot een lijn is de loodlijn vanuit dat punt (S) op de lijn.

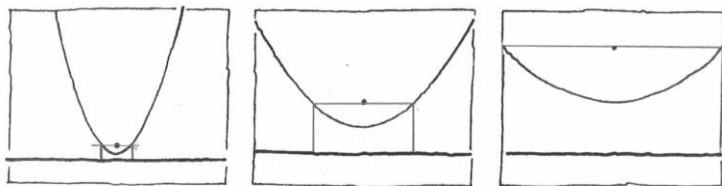
Waarom ligt S even ver van P als van F ? $\triangle FSP$ is een gelijkbenige driehoek met $FS = SP$.

Met Geogebra kan je nu de conflictlijn tekenen. Maar dat is niet nodig. Door de voorgaande stappen een paar keer te herhalen vind je ook de conflictlijn. Dus door P langs de lijn m te bewegen. Zonder Geogebra is dit wat meer werk.

Door P langs de lijn m te bewegen, ontstaat de conflictlijn tussen F en m . De

conflictlijn is een parabool met brandpunt F en richtlijn (ook grenslijn genoemd) m .

Opgave 34 Een punt en een lijn

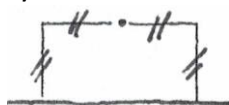


Hierboven staan drie parabolen

met hun brandpunten en richtlijnen.

a) In bovenstaande Figuur zijn drie rechthoeken getekend. De onderkant van de rechthoek ligt op de richtlijn, het brandpunt is het midden van de boven kant van de rechthoek en twee hoekpunten liggen op de parabool.

b) Wat is de verhouding van de zijden van de rechthoek?



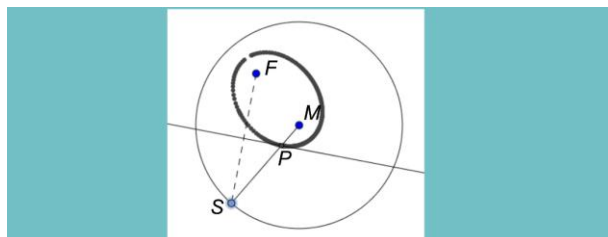
De verhouding is 2:1, want de hoekpunten van de rechthoeken links- en rechtsboven liggen even ver van het brandpunt als de richtlijn.

- Een cirkel en een punt binnen de cirkel.

Gegeven een cirkel c met middelpunt M .

F is een vast punt binnen de cirkel c .

Je gaat de conflictlijn tussen c (dat wil zeggen de punten op de cirkel) en F construeren.



De punten P liggen op de conflictlijn van F met de cirkel.
De conflictlijn is een **ellips** met **brandpunten** F en M .

Met Geogebra kun je een cirkel en een punt binnen de cirkel tekenen. Maar het kan natuurlijk ook met passer en papier.

Teken een punt S willekeurig op c (dus op de cirkel)

Teken het lijnstuk SM .

Teken de middelloodlijn van FS .

Noem P het snijpunt van de lijnen SM en de middelloodlijn.

Waarom ligt P even ver van F als van S ? $\triangle FPS$ is een gelijkbenige driehoek.

Met Geogebra kun je S langs de cirkel bewegen.

Gebruik je passer en papier, herhaal dan de voorgaande handelingen.

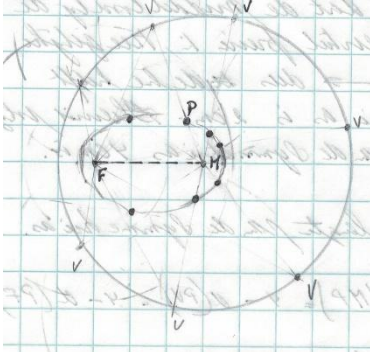
Alle punten P die je zo vindt liggen op de conflictlijn van F met de cirkel.

De conflictlijn is een ellips met brandpunten F en M . De cirkel c heet de richtcirkel van de ellips. Voor elk punt P op de ellips is de som $PM + PF (= PS)$ constant. Die constante is de straal van de richtcirkels en heet de ellipsconstante.

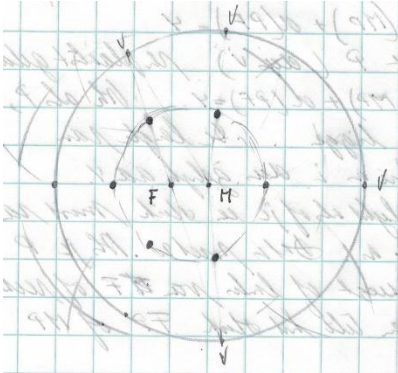
Opgave 40 De constructie van de ellips uit voetpunten

a) Teken een cirkel r met straal van 4 cm en een punt F op afstand 3 cm van het middelpunt M . Kies

vijf voetpunten op r en voer de constructie (bovenstaande samenvatting) uit met elk van deze voetpunten. Schets daarna de ellips met F als brandpunt en r als richtlijn.



b) Dezelfde opdracht, maar nu met F op afstand van 1 cm van het middelpunt M van r .



Het is uit beide constructies duidelijk dat FM de symmetrieas is. F en M liggen zo dicht bij elkaar dat de ellips een cirkel lijkt. Hier geldt ook weer: de middelloodlijn van VF snijdt VM in het punt $P \Rightarrow P$ ligt dus op de conflictlijn $\equiv$ ellips. In bovenstaand geval dus bijna een cirkel.

Als $F \rightarrow M$ gaat, halveert de middelloodlijn van VF , VM . De ellips is een cirkel geworden met een straal gelijk aan de halve straal van de richtlijn.

c) Bereken van de twee ellipsen onder a) en b) de lengte van de symmetrieas binnen de ellips.

Als eerste meet je natuurlijk de afstand op wanneer je de constructie op de juiste schaal hebt uitgevoerd: 4 cm. Onder b) hebben we vastgesteld dat de ellips een cirkel wordt als $F \rightarrow M$ gaat. Een cirkel is dus een speciale ellips. Aangezien in het limiet geval de straal van de ellips 2 cm is, is de lengte van de symmetrieas 4 cm.

d) Zijn alle ellipsen gelijk?

De verhouding van de lange en korte as is niet voor elke ellips hetzelfde. De verhouding varieert van 1:1 voor de ellips gelijk aan een cirkel tot groot voor een "lange-platte" ellips.

Dus: Alle ellipsen zijn niet gelijk.

Opgave 41 Een cirkel met een punt daarbinnen

a) Bekijk nog eens de bovenstaande geschetste constructie.

Leg uit dat $|PF| + |PM|$ voor elk punt P op de ellips hetzelfde is.

P ligt op de middelloodlijn van $FV \therefore |PF| = |PV|$, voor elk punt P .

Voor een gegeven cirkel met straal $|MV|$: $|MP| = |MV| - |PV|$.

$|MV|$ is een constante, zeg C .

$|MP| = C - |PV| \therefore |MP| + |PV| = C$,

met $|PF| = |PV|$, geldt dus $|MP| + |PF| = C$, de ellipsconstante.

b) Verwissel de rollen van F en M . Wat is de conflictlijn tussen het punt M en de cirkel r' met middelpunt F en dezelfde straal als r ?

Die conflictlijn bestaat ook uit de punten P waarvoor geldt $|MP| + |PF| = |MV| \equiv$ de straal van de richtcirkel. Het is dezelfde ellips als onder a).

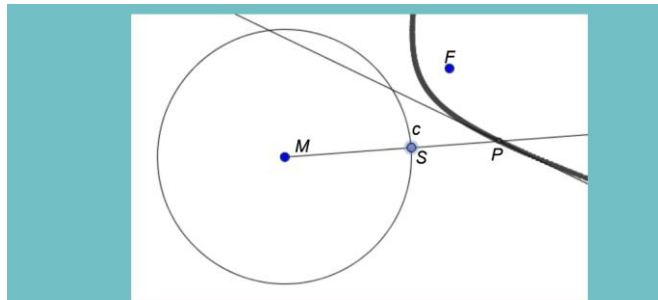
F en M zijn dus gelijkwaardig. F en M zijn de brandpunten van de ellips en de ellips heeft twee richtcirkels.

Als F_1 en F_2 de brandpunten zijn van een ellips, dan is voor elk punt P op de ellips de som van de afstand van P tot F_1 en F_2 hetzelfde. $|PF_1| + |PF_2|$ is constant. De constante is de straal van beide richtcirkels: de ellipsconstante.

Een ellips met brandpunten F_1 en F_2 heeft twee symmetrieassen: De lijn F_1F_2 en de middelloodlijn van F_1F_2 . Deze symmetrieassen snijden de ellips in de zogenaamde toppen. Het lijnstuk dat door de ellips van de lijn F_1F_2 wordt afgesneden heet de lange as. Het lijnstuk dat door de ellips van de middelloodlijn van F_1 en F_2 wordt afgesneden heet de korte as.

- Een cirkel en een punt buiten de cirkel, F .

Kies weer een punt S dat je willekeurig kiest op de cirkel c met middelpunt M .



De punten P liggen op een **hyperbool** met brandpunt F .
De hyperbool is de conflictlijn tussen F en c .

Teken, met Geogebra of passer en papier, de halve lijn(straal) MS vanuit M .

Teken de middelloodlijn van FS .

Noem P het snijpunt van de lijnen MS en de middelloodlijn.

Waarom ligt ook nu P even ver van F als van c ? $\triangle SPF$ is weer een gelijkbenige driehoek.

Met Geogebra beweeg je S langs de cirkel c . Dus met passer en papier construeer je voor verschillende punten S op de cirkel c verschillende punten P .

De punten P liggen op een hyperbool met brandpunten F en M .

De hyperbool is de conflictlijn tussen F en c , de richtcirkel van de hyperbool.

Let op: hier hebben we slechts één tak van de hyperbool behandeld. De andere tak vind je door de rollen van F en M te verwisselen.

Voor elk punt P op de hyperbool geldt: $|PM| - |PF|$ is constant. Die constante is de straal van de richtcirkels: de hyperboolconstante.

Opgave 47 De Hyperbool

a) Bekijk nog eens de bovenstaande constructie van de hyperbool. De cirkel is aangegeven met c ipv r .
Leg uit dat $|PM| - |PF|$, voor elk punt P op de hyperbool hetzelfde is.

Van de constructie hebben we geleerd dat $|PS| = |PF|$: de definitie van de middelloodlijn.

$|PM| - |PS| = |SM| \equiv r$ de straal van de cirkel: $|PM| - |PF| = |SM| \equiv r$ de straal van de cirkel, een constante.

b) Verwissel de rollen van F en M . De conflict lijn tussen het punt F en de cirkel r' met middelpunt F en dezelfde straal als r is ook een hyperbooltak.

Wat weet je van $|PM| - |PF|$ voor de punten P op deze conflictlijn?

De conflictlijn construeren we op dezelfde wijze maar nu met F als middelpunt en M in de rol van F , zoals beschreven onder a). Ook voor de punten M en P geldt: $|PM| - |PF| = r$.

We hebben nu een richtcirkel met middelpunt F en straal r .

c) We hebben nu twee hyperbooltakken. Wat hebben die met elkaar te maken? Als je deze tekent met de beide cirkels dan zie je dat de symmetrieas/spiegellijn van beide hyperbolen op de middelloodlijn ligt van FM . De verbindinglijn van de middelpunten (brandpunten) van beide cirkels.

De twee hyperbooltakken samen vormen de hyperbool met brandpunten F en M . Een hyperbool heeft dus twee brandpunten en twee richtcirkels.

Als F_1 en F_2 de brandpunten zijn van een hyperbool, dan is voor elk punt P op de hyperbool het absolute verschil van zijn afstanden tot F_1 en F_2 hetzelfde:
 $||PF_1| - |PF_2||$ is constant.
 Die constante is de straal van de richtcirkels.
 We noemen haar de **hyperboolconstante**.

Een hyperbool met brandpunten F_1 en F_2 heeft twee **symmetrieassen**: de lijn F_1F_2 en de middelloodlijn van F_1F_2 . De eerste symmetrieas snijdt de hyperbool in de zogenaamde **toppen**. Het verbindingslijnstuk tussen de toppen heet de **as** van de hyperbool.

Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.

Opgave 42

Van een ellips is de afstand $|F_1F_2| = 24$ en de ellips constante is 26.

a) Hoe lang is de lange as? Zie ook onderstaande schets in opgave 43.

Voor het punt P op de ellips geldt: $|PF_1| + |PF_2|$ is constant. De constante is de straal van de richtcirkel. De constante is gegeven en gelijk aan 26. De lengte van de lange as is 26.

b) Bereken de lengte van de korte as.

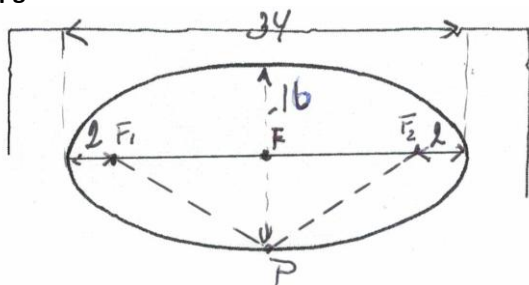
$$|FF_1| = |FF_2| = \frac{24}{2} = 12.$$

De ellipsconstante: $|PF_1| + |PF_2| = 26 \Rightarrow |PF_1| = |PF_2| = 13$. Zie ook onderstaande Figuur.

$$\Delta F_1FP \cong \Delta F_2FP, \text{ rechthoekige driehoeken} \Rightarrow |PF| = \sqrt{|PF_1|^2 - |FF_1|^2} = \sqrt{169 - 144} = 5.$$

De lengte van de korte as is dus: $2 \cdot 5 = 10$.

Opgave 43:



Van een ellips is de lange as 34 en de korte as 16. Zie bovenstaande Figuur.

a) Wat is de ellipsconstante?

De ellipsconstante is de straal van de richtcirkel en de straal is gelijk aan de lange as van de ellips. De ellipsconstante is dus 34.

b) Bereken de afstand van de brandpunten. (Het antwoord is al in de schets opgenomen).

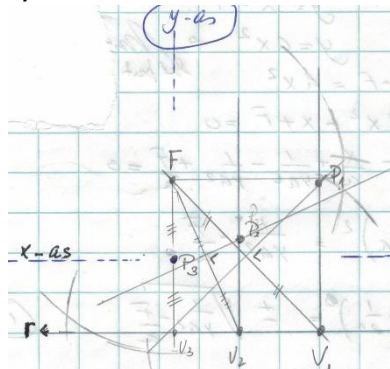
P is het punt op de ellips en ligt op de korte as $\Rightarrow |FP| = 8$. In de schets zijn de brandpunten getekend F_1 en F_2 . De straal van de richtcirkel is $34 = |PF_1| + |PF_2|$. Voor het punt P op de korte as geldt: $|PF_1| = |PF_2| = \frac{34}{2} = 17$.

$$\text{Pythagoras: } |FF_1| = |FF_2| = \sqrt{|PF_1|^2 - |FP|^2} = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = 15 \therefore |F_1F_2| = 2 \cdot |FF_1| = 30.$$

c) De resultaten zijn in de schets opgenomen.

- CABRI
- PenL(Passer en Lineaal) (freesoftware)
- Wingeometry (freesoftware)
- Geonet (freesoftware)
- GeoGebra, tegenwoordig het standaardprogramma op dit gebied.

a) Gebruik de software. Ik heb het nog ouderwets gedaan met passer, liniaal en potlood.



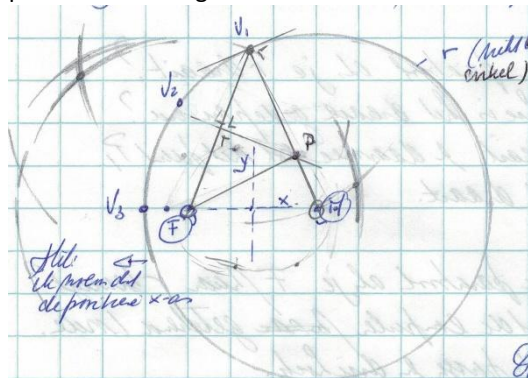
Met $y = x - f \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1$. De raaklijn aan de parabool.

F beweegt naar $r \therefore f$ wordt kleiner.

De vergelijking van bovenstaande parabool is: $y = \frac{1}{4f}x^2 \Rightarrow$ met kleiner wordende f wordt y groter bij een gegeven waarde van $x \Rightarrow$ de parabool wordt smaller.

Opgave 53 Ellips

a) Teken een cirkel r en een punt F daarbinnen. Kies een voetpunt V_1 op r . Construeer hierbij een punt P van de ellips met richtcirkel r en brandpunt F . Het middelpunt van de cirkel is M . Ik heb weer de methode met de passer en lineaal gebruikt. Zie onderstaande schets.



Met verschillende punten V_i construeer je zo de ellips.

b) Het punt P is het snijpunt van de loodlijn in V_1 op de cirkel r en de middelloodlijn van FV_1 .

Deze middelloodlijn van FV_1 is de raaklijn aan de ellips.

Illustratie van de raaklijn: kies links en rechts van V_2 een aantal punten op de richtcirkel. Construeer een aantal punten P_i links en rechts van P en beweeg de punten op de richtcirkel naar V_2 . De punten P_i bewegen "glad" naar P toe. Een illustratie van de raaklijn. Op de computer is dit wat gemakkelijker te demonsteren dan met passer en lineaal.

Opgave 54 Ellips Zie opgave 53 hierboven.

a) Hoe verandert de ellips als je F om het middelpunt M draait?

De ellips verandert niet en draait met F mee. Gelet op de symmetrie kun je ook zeggen dat je F met rust laat en de cirkel draait.

b) Hoe verandert de ellips als je het punt F naar r toe beweegt?

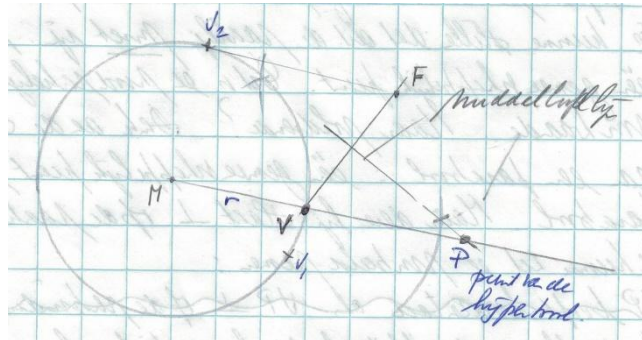
Dan wordt de ellips platter. In het geval dat F samenvalt met V_3 is de ellips verdwenen en is gelijk aan het lijnstuk V_3M . Het punt P valt dan steeds samen met M .

En als het punt F naar M , het middelpunt van r beweegt?

De ellips wordt dan ronder. Als F en M samenvallen is de ellips een cirkel geworden met als straal de helft van de straal van de richtcirkel. De middelloodlijn van FV_1 is gelijk aan de middelloodlijn van MV_1 . Het punt P ligt in het midden van $V_iP (\equiv V_iM)$.

Opgave 55

a) Teken een cirkel r en een punt F buiten de cirkel.



Kies een voetpunt V op r . Construeer hierbij een punt P van de hyperbool tak met richt cirkel r en brandpunt F . Met de computer doe je dit door V over r te slepen. Ik heb weer met passer en lineaal gewerkt.

b) Het punt P is het snijpunt van de loodlijn in V op r en de middelloodlijn van FV . Als je de constructie uitvoert op de computer dan zie je dat de middelloodlijnen de raaklijnen aan de hyperbool vormen.

c) Welke punten kunnen als voetpunt optreden?

Trek de raaklijnen vanuit F naar r . De punten van r tussen de raakpunten in kunnen als voetpunt optreden. Dus tussen V_1 en V_2 , zie bovenstaande schets.
Zou je een punt V_3 kiezen links van V_2 op r (en ook links van V_1) dan snijdt de middelloodlijn van FV_3 de lijn V_3M in een punt P binnen de cirkel.

Opgave 56 Zie ook opgave 55

a) Hoe verandert de hyperbool als je F (opage 55) om het middelpunt M van r draait?

Dan draait de hyperbool mee. De hyperbool verandert dus niet. Gelet op de symmetrie, kun je ook de cirkel draaien. Dan zie je direct dat er niets verandert.

b) Hoe verandert de hyperbool als het punt F naar de cirkel r beweegt? In de limiet met F op de cirkel r verdwijnt de hyperbool. Als het punt F naar de cirkel r beweegt, wordt de "opening" van de hyperbool kleiner. De hyperbool wordt dus smaller.

Met GeoGebra kun je de baan tekenen die een punt beschrijft als een ander punt wordt versleept. Een conflictlijn is ook zo'n baan: het is de verzameling van punten met een zekere eigenschap. Zo'n verzameling noemt men ook wel LOCUS of MEETKUNDIGE PLAATS.

Opgave 57

a) Gegeven zijn twee punten A en B .

Wat is de meetkundige plaats van punten die op gelijke afstand van A en B liggen?

De middelloodlijn van AB .

b) Gegeven zijn twee lijnen a en b .

Wat is de meetkundige plaats van punten die op gelijke afstand van a en b liggen?

- Als $a \parallel b$, de middenparallel van a en b .

- Als $a \nparallel b$, het bisectrice paar van de hoeken die a en b maken.

c) Gegeven is het punt A en een positief getal r .

Wat is de meetkundige plaats van de punten die op afstand r van A liggen?

De cirkel met straal r en middelpunt A .

d) Gegeven zijn een cirkel c met straal r en een positief getal s .

Wat is de meetkundige plaats van punten die op afstand s van c liggen?

- $s < r$: twee cirkels met de stralen $r + s$ en $r - s$.

- $s = r$: een cirkel met straal $r + s$ en een punt zijnde het middelpunt van de cirkel.

- $s > r$: een cirkel met straal $r + s$.

e) Gegeven zijn een lijn a en een punt A dat niet op de lijn a ligt.

Wat is de meetkundige plaats van de punten die op gelijke afstand van A en a liggen?

De meetkundige plaats van punten is een parabool met brandpunt A en richtlijn a .

f) Gegeven zijn een lijn a en daarop een punt A .

Wat is de meetkundige plaats van punten die op gelijke afstand van A en a liggen?

De loodlijn in A op a .

g) Gegeven zijn een cirkel r en een punt A daarbinnen.

Wat is de meetkundige plaats van punten die op gelijke afstand van A en r liggen?

De meetkundige plaats van punten is een ellips met brandpunt A en richtcirkel r .

h) Gegeven zijn een cirkel r en een punt A daarbuiten.

Wat is de meetkundige plaats van punten die op gelijke afstand van A en r liggen?

De hyperbool tak met brandpunt A en richtcirkel r .

i) Gegeven zijn een cirkel r en een punt A daarop.

Wat is de meetkundige plaats van punten die op gelijke afstand van A en r liggen?

De halve lijn die in het middelpunt van r begint en die door A gaat.

- **Oefenen**

Maken: De opgaven van paragraaf 4.

Blok 12 Les 3 Een kegel snijden

Deze les sluit aan bij de paragraaf 5 van Conflictlijnen van de Wageningse Methode 2016

- Een schemerlamp

De lichtbundel van een schemerlamp tegen een muur heeft de vorm van een parabool. De parabool is één van de vier kegelsneden.

Kegelsneden vind je terug in allerlei

Toepassingen, zoals:

- De banen van planeten zijn ellipsen
- Koeltorens van elektriciteitscentrales hebben de vorm van een hyperbool.

Hoewel totaal verschillend van vorm, vormen de kegelsneden een vaste familie van meetkundige figuren.



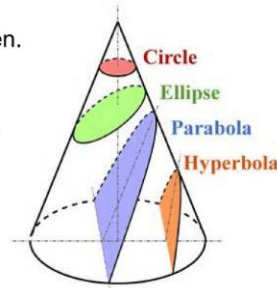
- Vier kegelsneden

Je kunt een kegel op meerdere manieren doorsnijden.

De vorm van de doorsnede wordt bepaald door de hoek die het snijvlak maakt met de as van de kegel.

Je kunt zo vier verschillende figuren krijgen:

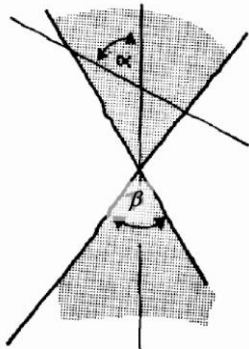
- Een cirkel
- Een ellips
- Een parabool
- Een hyperbool



Dit zijn de vier **kegelsneden**.

α is de hoek van het snijvlak met de as van de kegel.

β is de tophoek van de kegel.



Opgave 59

Zie bovenstaande schets

a) Voor welke α is de snijfiguur(doorsnede) een cirkel?

- $\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow$ cirkel.

b) Voor welke α is de snijfiguur(doorsnede) een ellips?

- $\frac{\beta}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow$ ellips.

De ellips, kegelsnede, is een langgerekte, dus smalle ellips voor α iets groter dan $\beta/2$.

c) Hoe moet je een kegel snijden om twee rechte lijnen te krijgen?

Door de top van de kegel zoals gegeven in bovenstaande schets. Twee snijdende rechte lijnen.

d) Wat merk je op over de snijkrommen als je de kegel snijdt met twee evenwijdige vlakken?

Die snijkrommen zijn gelijkvormig. Je vindt dan gelijkvormige cirkels, ellipsen, parabolen en hyperbolen.

Voor de volledigheid de overige hoeken en kegelsneden:

- $\alpha = \frac{\beta}{2} \rightarrow$ parabool
- $\alpha < \frac{\beta}{2} \rightarrow$ hyperbool

- **Standaardvergelijkingen**

Je kunt een kegelsnede herkennen aan de bijbehorende vergelijkingen.

- Rechte lijn: $y = ax + b$
- Parabool: $y = px^2$
- Cirkel: $x^2 + y^2 = r^2$
- Ellips: $ax^2 + by^2 = r^2, (a, b > 0)$
- Hyperbool: $x \cdot y = c$

Voorbeeld:

Gegeven de vergelijking $x^2 + 3x + y^2 - 6y = 12$.

Door kwadraatafsplitsing kun je de vergelijking herleiden:

$$x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} + y^2 - 2 \cdot 3y + 9 = 12 + \frac{9}{4} + 9$$

$$(x + \frac{3}{2})^2 + (y - 3)^2 = 23\frac{1}{4}$$

Dit is de vergelijking van een cirkel met middelpunt $(-\frac{3}{2}, 3)$ en straal $\sqrt{23\frac{1}{4}}$.

Gegeven is de vergelijking $x^2 - 4x + y^2 + 12y = 12$.

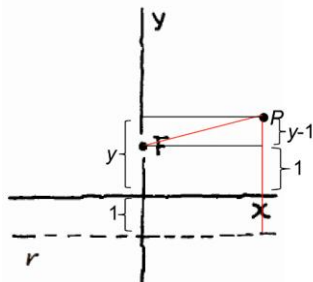
$$x^2 - 4x + y^2 + 12y = 12 \rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 12y + 36 = 12 + 4 + 36 \rightarrow$$

$$\rightarrow (x - 2)^2 + (y + 6)^2 = 52 \rightarrow \text{een cirkel met middelpunt } (2, -6) \text{ en straal } 2\sqrt{13}.$$

- **Vergelijking van de parabool als conflictlijn.**

Gegeven: een parabool als conflictlijn, met brandpunt F en richtlijn r .

Gevraagd: de bijbehorende vergelijking (van de parabool, conflictlijn).



$F = (0, 1)$ en r is de lijn $y = -1$.

Het punt $P(x, y)$ ligt op de conflictlijn van brandpunt F en richtlijn r .

Wat weten we? Dat de afstand PF gelijk is aan de afstand van P tot r (de loodlijn uit P op richtlijn r). Dus: $d(P, F) = d(P, r)$.

$$d(P, F) = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2},$$

en

$$d(P, r) = y + 1.$$

Met $d(P, F) = d(P, r)$ hebben we:

$$\rightarrow \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = y + 1$$

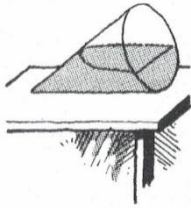
$x^2 + (y - 1)^2 = (y + 1)^2$. Dit kun je verder uitwerken:

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2 + 2y + 1 \text{ of}$$

$$x^2 = 4y.$$

Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.

Opgave 60:



Een holle doorzichtige kegel ligt op tafel. De kegel is gedeeltelijk gevuld met water.

a) Wat is de vorm van het wateroppervlak, weergegeven in de schets? Het wateroppervlak snijdt slechts de helft van de kegel $\Rightarrow$ een parabool.

b) Wat wordt de vorm van het wateroppervlak als de kegel bij de top wordt opgetild? Als de kegel bij de top wordt opgetild, zal de verlengde doorsnede ook de andere, denkbeeldige, helft van de kegel doorsnijden $\Rightarrow$ hyperbool.

c) Als de kegel bij het grondvlak wordt opgetild? Als de rechterkant, het grondvlak, wordt opgetild zal de doorsnede overgaan in een ellips. Ga je nog door met tillen dan wordt de doorsnede een cirkel.

Opgave 61

Laat in een donkere kamer een lichtkegel schuin op de vloer vallen. Het verlichte deel van de vloer is een kegelsnede.

a) Wat weet je van de lichtkegel ten opzichte van de vloer, als het verlichte deel een parabool is?

Kijk naar de schets van opgave 60. Deze schets geeft de situatie weer. De bovenste kant van de lichtkegel is evenwijdig met de vloer.

b) Hoe moet je de licht kegel draaien om een ellips te krijgen?

De lichtkegel moet steiler, meer omlaag schijnen.

En een hyperbool?

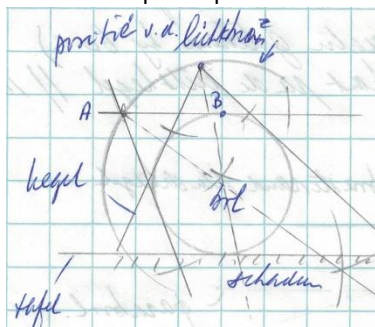
De lichtkegel moet minder steil omlaag schijnen. Zelfs minder dan bij de parabool.

c) Van een staande schemerlamp laat de kap geen licht door. Zodoende wordt maar een deel verlicht van de muur. Wat is de vorm van de lichtvlek op de muur?

Gelet op de wijze waarop de muur de kegel onderbreekt, een doorsnede evenwijdig met de as van de kegel van het lichtpunt, is de vorm een tak van een hyperbool.

Opgave 62

Een bol ligt op tafel en wordt beschenen door een puntvormige lichtbron. De schaduw die de bol op tafel werpt, is een kegelsnede. Wat weet je van de positie van de lichtbron ten opzichte van de bol als de schaduw een parabool is? Zie onderstaande schets. De lichtbron A ligt op een cirkel met als middelpunt de bol. B is een punt op de bol.



De lichtbron A bevindt zich op dezelfde hoogte boven de tafel als het punt B in bovenstaande schets. B is het hoogste punt van de bol. In dat geval is de schaduw een parabool. Bevindt A zich wat hoger, dan krijg je een lang gerekte ellips. Bevindt A zich wat lager, dan krijg je een hyperbool als schaduw.

Opgave de parabool $y = px^2$

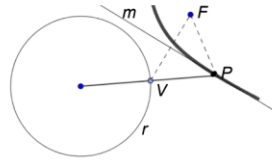
Wat zijn de coördinaten van het brandpunt en wat is de vergelijking van de richtlijn?

In onderstaande Figuur is de situatie geschetst.

Stelling

Gegeven:

- een lijn of cirkel r ,
- een punt F niet op r ,
- een punt P op de conflictlijn van r en F ,
- het voetpunt V van P op r ,
- de middelloodlijn m van FV .



Dan is:

m een raaklijn aan de conflictlijn en P is het raakpunt.

Het voetpunt V wordt gevonden door P te verbinden met het middelpunt van de cirkel. m is de middelloodlijn van FV .

Te bewijzen

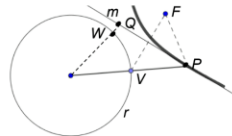
m is een raaklijn aan de conflictlijn en P is het raakpunt

Bewijs

Kies Q op m , $Q \neq P$ en W is het voetpunt van Q .

→ $d(Q, r) = d(Q, W)$ want dat is de kortste afstand van Q tot de punten op r .

→ $d(Q, r) < d(Q, V)$



$d(Q, V) = d(Q, F)$ want Q ligt op de middelloodlijn.

→ $d(Q, r) < d(Q, F)$

→ Alle punten op m liggen dichterbij r dan bij F .

→ Alle punten op m liggen aan één kant van de conflictlijn en dus is m een raaklijn.

• Raaklijneigenschap van kegelsneden.

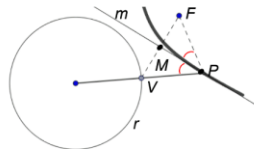
Noem M het snijpunt van m met VF .

Te bewijzen:

$$\angle VPM = \angle FPM$$

Bewijs

$$\triangle VPM \cong \triangle FPM \text{ (zzz)}$$



Dit is de **raaklijneigenschap**.

Dus:

Gegeven is de parabool/ellips/hyperbool met F als brandpunt en r als richtlijn/richtcirkel.

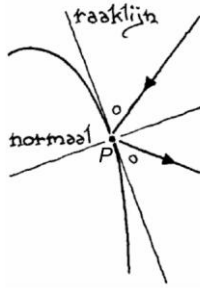
P is een punt op de parabool/ellips/hyperbool en V is het voetpunt van P op r .

Dan is de raaklijn in P middelloodlijn van FV en deze maakt gelijke hoeken met PF en PV .

• Hoek van inval = hoek van terugkaatsing

Een lichtstraal valt in P op een spiegelend oppervlak. Dan is volgens een wet uit de optica, de hoek die de lichtstraal maakt met de raaklijn, gelijk aan de hoek van de teruggekaatste lichtstraal met die raaklijn.

Zie onderstaande figuur.



- Een parabolische spiegel

de conflictlijn van de lijn r en punt F is een parabool.

Een lichtstraal staat loodrecht op de richtlijn r en valt in P op de parabolische spiegel.

$\angle P_1$ is de invallende hoek met de raaklijn.

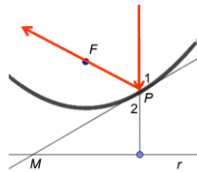
$\angle P_1 = \angle P_2$ (overstaande hoeken)

M is het snijpunt van de raaklijn met r .

$\angle P_2 = \angle FPM$ (raaklijneigenschap)

$\rightarrow \angle P_1 = \angle FPM$

$\rightarrow$ De teruggekaatste straal gaat door het brandpunt F .

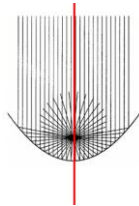


De raaklijn in een punt P van een parabool maakt gelijke hoeken met de lijn die P verbindt met het brandpunt en de lijn door P loodrecht op de richtlijn.

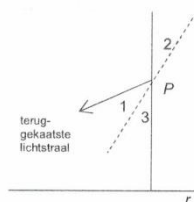
De as van een parabolische spiegel is de lijn door het brandpunt F die loodrecht staat op de richtlijn.

Een lichtbundel valt evenwijdig aan de as op een parabolische spiegel

$\rightarrow$ De teruggekaatste stralen gaan door het brandpunt F . Zie onderstaande Figuur.



Opgave 71



a) Gegeven een parabool. De lichtstralen vallen op de parabool zoals weergegeven in de tekst van de summary. De raaklijn in het punt P aan de parabool is gestippeld weergegeven in bovenstaande schets. Er geldt:

$\angle 2 = \angle 3$, overstaande hoeken,

$\angle 1 = \angle 2$, hoek van inval is gelijk aan de hoek van terugkaatsing,

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 3$.

Uit de raaklijneigenschap volgt dat de teruggekaatste lichtstraal door het brandpunt gaat.

b) De weg van elk van de getekende lichtstralen in het plaatje van de summary tot het brandpunt even

lang is.

De wegen vanaf de spiegel tot het brandpunt zijn even lang als tot de richtlijn r . De weglengte tot het brandpunt is dus gelijk aan de weglengte tot de richtlijn. En al die weglengtes zijn gelijk. Dit is het wezenlijke van de parabolische spiegel. Waren de weglengtes niet gelijk dan functioneerde de spiegel niet. Licht- en geluidsgolven zouden elkaar dan niet versterken. Dit is overigens een onderwerp in de Natuurkunde.

- Een elliptische spiegel

De conflictlijn van de cirkel r en een punt F binnen de cirkel is een ellips. Zie onderstaande figuur.

Een lichtstraal vanuit het middelpunt C treft de binnenkant van de ellips in P .

$\angle P_1$ is de invallende hoek met de raaklijn.

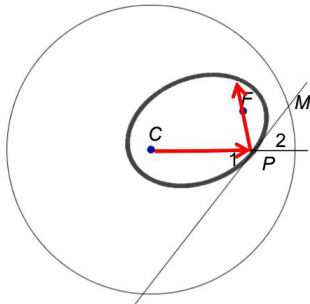
$\angle P_1 = \angle P_2$ (overstaande hoeken).

M is het snijpunt van de raaklijn met r .

$\angle P_2 = \angle FPM$ (raaklijn eigenschap),

$\Rightarrow \angle P_1 = \angle FPM$,

$\Rightarrow$ De teruggekaatste straal gaat door het brandpunt F .



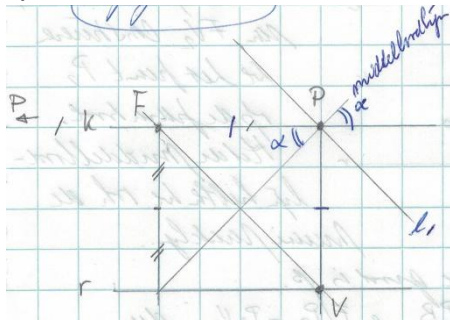
De raaklijn in een punt P van een ellips of hyperbool maakt gelijke hoeken met de lijnen die P verbinden met beide brandpunten.

Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.

Opgave 68

Gegeven is een rechte lijn r en een punt F . k is de lijn die evenwijdig is aan r .

a) Onderstaande een schets van de situatie.



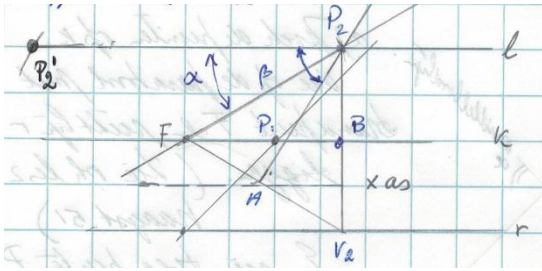
Zoek de punten op k die op de parabool met brandpunt F en richtlijn r liggen.

Er zijn twee punten P links en rechts van F , op gelijke afstand van F . Symmetrie. Het tweede punt P heb ik met een pijl aangegeven.

b) Hoe groot zijn de hoeken waaronder k de parabool snijdt? Dat zijn de hoeken die k maakt met de raaklijn aan de parabool. P ligt op de parabool. We laten de loodlijn neer vanuit P op r de richtlijn. Het voetpunt is V . De middelloodlijn van FV snijdt k in P . De middelloodlijn is ook de raaklijn. De $\angle \alpha$ die k maakt met de raaklijn (=middelloodlijn) is 45° .

c) l is de lijn die evenwijdig is aan r zodanig dat F midden tussen r en l in ligt.

Zie onderstaande schets:



Zoek de snijpunten van l met de parabool. P_1 ligt op de parabool, zie onder b).

We kiezen het punt P_2 op l zodanig dat P_2V_2 , de loodlijn in V_2 , gelijk is aan P_2F . Met als gevolg dat P_2 op de parabool ligt. Dit is het ene snijpunt van l met de parabool. Het andere snijpunt volgt uit symmetrie en is P_2' .

d) Hoe groot zijn de hoeken waaronder l de parabool snijdt? Dus hoe groot is β ?

Een aantal uitdrukkingen en gevolgtrekkingen:

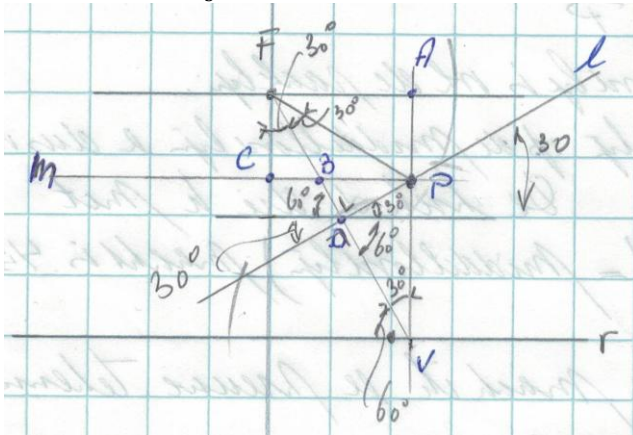
$$|P_2V_2| = 2 \cdot |P_2B|, \text{ en } |P_2V_2| = |P_2F| \therefore |P_2B| = \frac{1}{2}|P_2F| \therefore \angle P_2FB = 30^\circ = \alpha.$$

$\triangle P_2FV_2$ is een gelijkzijdige driehoek: $\angle FP_2V_2 = 60^\circ (= 90^\circ - \alpha)$ en $|P_2V_2| = |P_2F|$.

$\angle FP_2A = 30^\circ$, want P_2A is de middellloodlijn dus $\angle FP_2A + \alpha = 60^\circ$.

e) m is de lijn die evenwijdig is aan r en tussen F en r loopt. De lijn m snijdt de parabool onder hoeken van 30° .

Bewijs $d(m, F) = \frac{1}{3} \cdot d(r, F)$ of anders geschreven $|(m, F)| = \frac{1}{3} |(r, F)|$. Zie onderstaande schets.



De lijn m snijdt de parabool onder hoeken van 30° . Dat betekent dat de hoek tussen m en de raaklijn gelijk is aan 30° . Deze raaklijn is de lijn l . De 30° is aangegeven in bovenstaande schets. De lijn l is dus de middellloodlijn van $FV \Rightarrow d(FP) = d(PV)$.

Ervan uitgaande dat de hoek tussen m en de raaklijn gelijk is aan $30^\circ \Rightarrow \angle CFP = 60^\circ$. Verder volgt daaruit dat $|FC| = \frac{1}{2}d(FP) = \frac{1}{2}|PV| \Rightarrow \frac{1}{2}|PV| + |PV| = d(F, r)$, [$|FC| + |PV| = d(F, r)$].

$$|FC| \equiv d(F, m) = \frac{1}{2}|PV|.$$

$$\frac{1}{2}d(PV) + |PV| = \frac{3}{2}|PV| = d(F, r) \Rightarrow |PV| = \frac{2}{3}d(F, r) \Rightarrow d(F, m) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}d(F, r) = \frac{1}{3}d(F, r).$$

Opgave 72

Fluisteren op grote afstand.

Op een kinderspeelplaats in Antwerpen staan twee parabolische spiegels met dezelfde as. De spiegels staan 50 meter van elkaar en zijn naar elkaar toe gericht. Hoe kun je met deze spiegels fluisteren en toch over een grote afstand verstaan worden?

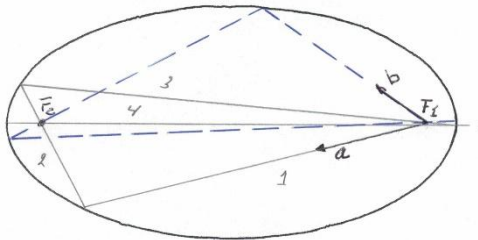
Zie ook opgave 71 in de tekst van de bovenstaande summary.

De ene persoon bevindt zich met de mond in het brandpunt van de ene parabolische spiegel. De door deze persoon geproduceerde geluidsgoaven worden door de spiegel een evenwijdige bundel, evenwijdig aan de as van de spiegel. Door de spiegel aan de overkant wordt de evenwijdige bundel geconcentreerd naar het brandpunt van die spiegel. De andere persoon moet zich dus met het oor in het brandpunt van de ontvangende spiegel bevinden.

Opgave 75

Gegeven een elliptische spiegel met brandpunten F_1 en F_2 . Vanuit het brandpunt F_1 vertrekt lichtstraal a .

a) In onderstaande schets zijn de eerste vier spiegelingen aangegeven (1,2,3,4). Bij de constructie van de spiegelingen maken we gebruik van de raaklijneigenschap van de ellips: "De raaklijn in een punt van een ellips maakt gelijke hoeken met de lijnen die dat punt verbinden met beide brandpunten".



b) Wat is de limietbaan van de lichtstraal?

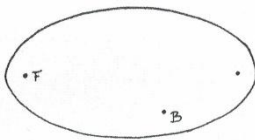
Uit bovenstaande schets volgt dat na vier reflecties, de lange as de limietbaan is.

c) Hoe zit dat als de lichtstraal in een andere richting, b , vertrekt?

Dan is de limietbaan ook de lange as.

Opgave 76:

Op een ellipsvormig biljart liggen twee ballen: F en B . Bal F ligt in één van de brandpunten. Zie onderstaande schets.



a) Hoe moet de biljarter (Hij/Zij) bal B stoten om via de band (de ellips) zonder effect bal F , één van de brandpunten, frontaal te raken?

Via het andere brandpunt (waar bal F niet ligt). De raaklijn eigenschap.

b) Hoe moet de biljarter bal B (ook nu zonder effect) stoten zodat deze via twee banden frontaal op F komt? Door langs de lijn FB , van F af, te stoten. De bal loopt via de band naar het andere brandpunt en dan via de volgende band naar het brandpunt F .

c) de biljarter probeert bal B rechtstreeks op bal F te spelen. De biljarter geeft de bal veel vaart mee, maar mikt onnauwkeurig zodat bal F net wordt gemist: en wel zo dat de bal achter F langsgaat. Is er hoop dat de bal na een aantal banden toch nog op bal F stoot?

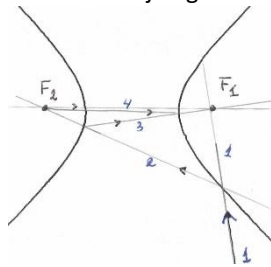
Als de baan van de bal achter het rechter brandpunt gaat, gaat de bal ook achter F langs

De bal gaat niet meer door het rechter brandpunt omdat F wordt gemist. Er is geen hoop dat bal F nog wordt geraakt.

Opgave 77

Gegeven is een hyperbolische spiegel met de brandpunten F_1 en F_2 . Er komt een lichtstraal aan zoals aangegeven (1). Als de lichtstraal niet zou worden gespiegeld, zou de lichtstraal door één van de brandpunten gaan. Verlengde van (1).

a) In onderstaande schets zijn de eerste vier spiegelingen getekend. Bij het tekenen maken we weer gebruik van de raaklijneigenschap.



b) Wat is de limietbaan van de lichtstraal?

De as van de hyperbool: de verbindingslijn van de beide brandpunten.

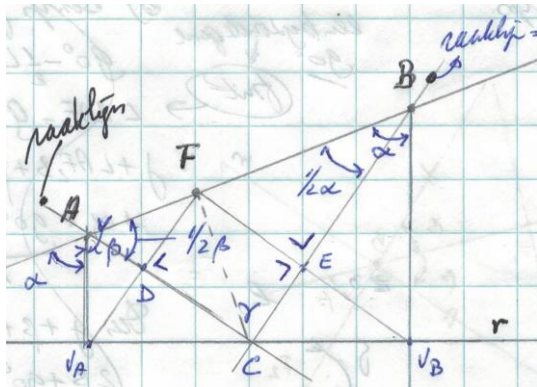
c) Hoe zit dat als de lichtstraal vanuit een andere richting komt, maar wel in de richting van het brandpunt gaat?

Dan is de limietbaan ook de as van de hyperbool.

Opgave 78

Van een parabool is gegeven de richtlijn r en het brandpunt F . Een lijn door F snijdt de parabool in de punten A en B .

a) In onderstaande schets zijn de raaklijnen in A en B aan de parabool getekend.



Laat de loodlijnen uit A en B neer op r , met voetpunten V_A en V_B . De middelloodlijnen van FV_A en FV_B zijn de raaklijnen zoals getekend.

b) Bewijs dat de voornoemde raaklijnen loodrecht op elkaar staan.

$$FV_A \parallel FV_B.$$

$$\angle \alpha + \angle \beta = 180^\circ.$$

De beide middelloodlijnen zijn de bisectrices van deze hoeken: $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = 90^\circ \therefore \gamma = 90^\circ$. Dus de middelloodlijnen staan loodrecht op elkaar.

c) Bewijs dat het snijpunt van de raaklijnen op de richtlijn r van de parabool liggen.

$\triangle AV_A C$ en $\triangle AFC$ zijn congruent, want

$$|AV_A| = |AF|,$$

$$\angle V_A A C (= \frac{1}{2}\beta) = \angle F A C (= \frac{1}{2}\beta),$$

AC gemeenschappelijk.

Uit de congruentie volgt ook $\angle AFC = 90^\circ$.

Verder

$$\angle V_B C B = \angle F C B, \text{ want } C \text{ ligt op de middelloodlijn van } FV_B,$$

en

$$|BV_B| = |FB|.$$

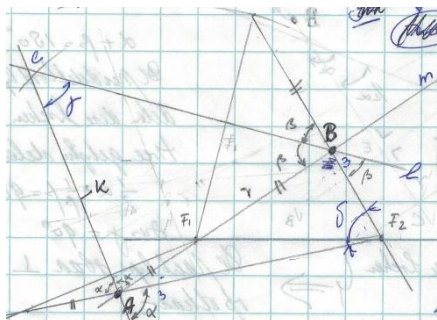
Dus $\triangle V_B C B$ en $\triangle F C B$ zijn congruent $\therefore \angle V_B C B = \angle F C B$. Dit laatste resultaat hadden we al gevonden.

$\angle V_A C V_B = \angle V_A C A + \angle A C F + \angle F C B + \angle B C V_B = 2 \cdot (\angle A C F + \angle F C B) = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow V_A, C$ en V_B liggen op één lijn.

Opgave 79

Van een ellips zijn de brandpunten F_1 en F_2 gegeven. Een lijn door F_1 snijdt de ellips in de punten A en B .

Zie onderstaande schets



a) De raaklijnen in A en B aan de ellips.

Beschrijving van de constructie:

- B ligt op de ellips,

- F_2B gebruiken om de middelloodlijn l te construeren. l is de raaklijn.

Op vergelijkbare wijze wordt de raaklijn k in het punt A op de ellips geconstrueerd.

b) Bewijs dat de hoek tussen beide raaklijnen $\gamma = 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot \angle AF_2B$.

De $\triangle ABC$: $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$.

$$- 2\alpha + \angle BAF_2 = 180^\circ \rightarrow \alpha = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAF_2),$$

$$- 2\beta + \angle F_2BA = 180^\circ \rightarrow \beta = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle F_2BA).$$

$$\text{Dus } \gamma = \frac{1}{2}(\angle BAF_2 + \angle F_2BA).$$

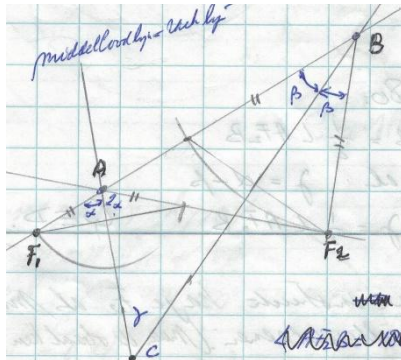
$$- \angle BAF_2 + \angle F_2BA + \delta = 180^\circ \rightarrow \frac{1}{2}(\angle BAF_2 + \angle F_2BA) = \gamma = 90^\circ - \frac{1}{2}\delta \equiv 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot \angle AF_2B.$$

Opgave 80

Van een hyperbool zijn de brandpunten F_1 en F_2 gegeven. Een lijn door F_1 snijdt de ellips in de punten A en B .

a) De raaklijnen in A en B aan de hyperbool.

Zie onderstaande schets



De middelloodlijnen zijn geconstrueerd en daarmee de raaklijnen.

De gelijke hoeken zijn aangegeven.

b) Bewijs $\gamma = \frac{1}{2} \cdot \angle AF_2B$.

$$\gamma = 180^\circ - \angle CAB - \angle CBA = 180^\circ - \angle CAB - \beta.$$

$$\angle CAB = 180^\circ - \alpha \Rightarrow \gamma = \alpha - \beta.$$

$$\angle AF_2B = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) - 2\beta = 2\alpha - 2\beta \Rightarrow \alpha - \beta = \frac{1}{2} \cdot \angle AF_2B \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2} \cdot \angle AF_2B.$$

Blok 12 De Toets Kegelsneden.

Opgave 1

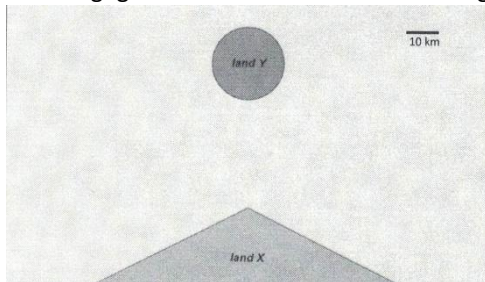
a) Teken in onderstaande figuur de iso-afstandslijnen.

Definitie iso-afstandslijnen

Gegeven is een gebied.

De punten die buiten het gebied liggen, op een afstand x van de rand van het gebied, vormen de zogenaamde iso- x -afstandslijnen.

Met de gegevens uit onderstaande schets ligt de iso-afstandslijn op 10 km van land Y en land X ?



Dus een cirkelrand rond land Y met breedte van 10 km?

Twee lijnstukken evenwijdig aan de kustlijnen van land X met een breedte van 10 km. En een cirkelsegment

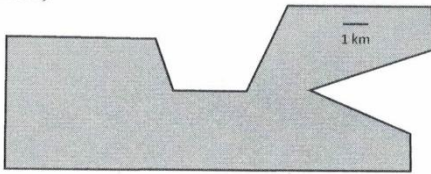
met de landpunt van X als middelpunt en een straal van 10 km?

Maar je kunt je ook bedenken dat de gegeven 10 km alleen de schaal is.

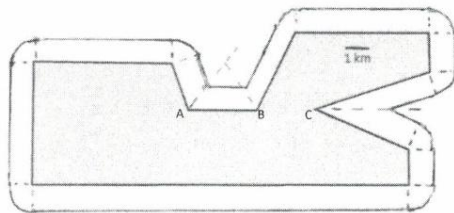
Gelet op de definitie van iso-afstandslijn kun je elke afstand kiezen. De lijnen kunnen elkaar dan snijden.

Het ligt daarom voor de hand met de gegeven schaal voor een cirkelrand rond Y een breedte van 20 km te kiezen. Hetzelfde geldt dan voor land X met als resultaat dat de beide isoafstandslijnen elkaar raken.

b) Teken in onderstaande Figuur de iso-afstandslijn(en).



We tekenen de isoafstands lijn met de in de bovenstaande Figuur weergegeven 1km afstand:



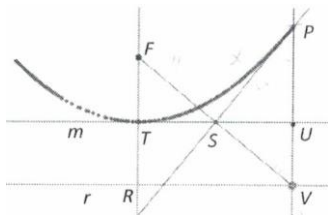
Bij de punten A, B en C zijn de bisectrices getekend.

Bij de overige hoekpunten zijn de cirkelsegmenten getekend met een straal van 1 km.

Langs de kust zijn evenwijdige lijnen getekend op 1 km afstand van de kust.

Opgave 2

In onderstaande tekening zie je de constructie van een parabool als conflictlijn en de richtlijn r .



V is het voetpunt van de loodlijn uit P . V wordt ook wel het vrije punt genoemd.

De lijn m is evenwijdig aan r en gaat door de top T van de parabool.

S is het snijpunt van FV met m .

U is het snijpunt van PV met m .

a) Bewijs dat $|TS| = |SU|$.

Blok 12 Les 2:

Gegeven een punt F en de richtlijn r . Je construeert de conflictlijn door op r een punt V (vrijpunt of voetpunt) te kiezen. In dat punt V richt je de loodlijn op. Construeer daarna de middelloodlijn van FV . Deze snijdt de loodlijn opgericht in V , in het punt P dat op gelijke afstand ligt van F en $V \Rightarrow$ de definitie van de parabool. We weten dus dat S in het midden van FV ligt: $|FS| = |SV|$

R ligt op de richtlijn $r \Rightarrow |FT| = |TR| \Rightarrow |FT| = |UV|$.

Verder geldt: $\angle FST = \angle USV$.

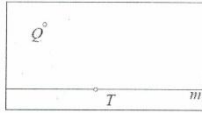
Uit deze gegevens volgt: $\triangle FTS \cong \triangle VUS \therefore |TS| = |SU|$.

b) Bewijs dat PS loodrecht staat op FV .

S ligt op de middelloodlijn van $FV \therefore PS \perp FV$. De definitie van de parabool.

c) Gebruik deze voorgaand genoemde en eigenschappen om een parabool te construeren die:

- Een gegeven punt T als top heeft,
 - raakt aan de lijn m die door T gaat,
 - en door het gegeven punt Q gaat,
- zoals weergegeven in onderstaande schets.



We kunnen gebruik maken van S uit a) en b).

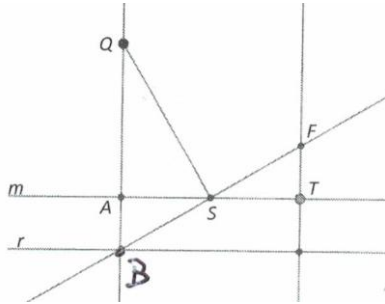
We kennen de top T , dus het brandpunt F ligt op de loodlijn opgericht in T .

Q ligt op de parabool.

De parabool construeren betekent het brandpunt F en de richtlijn r bepalen.

De situatie is het spiegelbeeld van de schets aan het begin van de opgave.

Zie onderstaande schets.



- Teken de lijn door Q loodrecht op m , met voetpunt A (vergelijkbaar met U bij a) en b)).

- Kies S als het midden van AT .

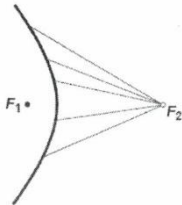
- De lijn loodrecht op QS in het punt S , snijdt de lijn loodrecht op m opgericht in T in het punt F . Hiermee hebben we het brandpunt gevonden.

- De richtlijn r is evenwijdig aan m op afstand $|FT|$, want $\triangle FTS \cong \triangle BAS$.

De ingrediënten voor het construeren van meerdere punten op de parabool zijn hiermee gevonden. Kies daartoe de voetpunten V op de richtlijn r . Richt de loodlijn op in V construeer de middelloodlijn van FV .

het snijpunt van deze middelloodlijn en de loodlijn opgericht in V geeft weer een nieuw punt van de parabool.

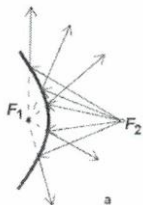
Opgave 3



Hierboven zie je een bolle hyperbolische spiegel. F_1 en F_2 zijn de brandpunten van de hyperbool.

a) In welke richting worden de lichtstralen teruggekaatst die vanuit F_2 vertrekken.

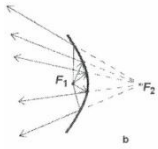
Zie onderstaande schets:



De lichtstraal valt op een punt van de bolle spiegel. Voor de raaklijn in dat punt op de bolle spiegel geldt dat die raaklijn gelijke hoeken maakt met de lijnen die dat punt met de brandpunten verbindt. Verder hebben we te maken met de hoek van inval is de hoek van weerkaatsing. Het lijkt dus alsof de lichtstraal uit F_1 komt.

b) Stel, je hebt nu een holle hyperbolische spiegel met een lichtbron in F_1 . Waar lijken de lichtstralen vandaan te komen?

De lichtstralen lijken nu uit F_2 te komen. Zie onderstaande schets.



c) Als je op één of andere manier stralen hebt die allemaal op F_2 gericht zijn, hoe gedragen zich die na weerkaatsing?

Die lichtstralen gaan allemaal naar F_1 . De constructie van de hyperbool.

Teken een richtcirkel met middelpunt F_2 . Neem een richtstraal gericht op F_2 . Deze snijdt de richtcirkel in het voetpunt(vrijpunt) V . Construeer de middelloodlijn van VF_1 . Zo vind je weer de hyperbool met brandpunten F_1 en F_2 .

- **Oefenen**

Lezen: Paragraaf 6.

Maken: de opgaven van paragraaf 6.

Blok 13 Poisson Verdeling

Blok 13 Les 1 Wachten

Deze les sluit aan bij paragraaf 1 van Poisson Verdeling van de Wageningse Methode 2009.

- **De winkel**

Van een winkel is bekend dat er gemiddeld 10 klanten per uur binnenkomen. Wat is de kans dat er de komende 5 minuten geen klant binnen komt?

Dit is de centrale vraag in dit blok.

Als je kunt schatten hoe groot de toeloop van je klanten is, dan kun je de nodige maatregelen nemen om de bediening vlot te laten verlopen. Bijvoorbeeld: over het aantal bedienden achter de toonbank.

Eerst een korte herhaling van de binomiale verdeling.

- **Herhaling: De binomiale verdeling**

Je gooit 10 keer met een zuivere dobbelsteen.

Wat is de kans dat je drie keer een 6 gooit?

Uitwerking:

Je gooit drie keer een 6. De kans daarop is $\left(\frac{1}{6}\right)^3$.

Maar je gooit ook zeven keer geen 6. De kans daarop is $\left(\frac{5}{6}\right)^7$.

Deze situatie kan zich op $\binom{10}{3}$ manieren voordoen.

De kans is dus $\binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7$.

Je kunt dit berekenen met de GR: $\text{binompdf}(10, 0.1667, 3) = 0.155$

Conclusie:

Als je dit experiment 1000 keer zou herhalen, dan kun je 155 keer verwachten dat je drie 6-en gooide in 10 beurten.

Dus:

Een kans experiment wordt n keer herhaald.

p is de kans op succes.

$1 - p = q$ is de kans op mislukking.

De binomiale kans op k successen is dan: $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$.

Je kunt dit met de GR berekenen met $\text{binompdf}(n, p, k)$.

Algemeen het binomium van Newton:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}.$$

- **Wachttijdtheorie**

Wachttijdtheorie is een onderdeel van de kansrekening. Centrale vragen zijn:

- als er gemiddeld vijf klanten per uur komen, hoeveel mag je er dan in het komende kwartier verwachten?
- Als je gemiddeld 20 minuten moet wachten op een lift, hoe groot is de kans dat je meer dan 1 uur op een lift moet wachten?
- hoeveel kassa's moeten er zijn om de wachttijd minder dan 5 minuten te houden?

- **De winkel**

Terug naar de winkel.

Opgave 1

Van een winkel is bekend dat er gemiddeld 10 klanten per uur binnenkomen. Wat is de kans dat er de komende 5 minuten geen klant binnen komt? We nemen aan dat de klanten onafhankelijk van elkaar in de winkel komen. Elk moment van binnenkomst is voor elk van de klanten even waarschijnlijk.

In een uur zitten 12 periodes van 5 minuten.

Geef de klanten een(denkbeeldig) nummer los van de volgorde van aankomst. De klanten 1 tot en met 10 kunnen naar willekeur kiezen uit deze periodes.

a) Wat is de kans dat klant 1 niet in de komende 5 minuten arriveert?

Succes telt als een klant in de gekozen 5 minuten binnenkomt.

De kans op succes is $1/12$. De kans op geen succes is $11/12$.

b) Wat is de kans dat klant 7 niet in de komende 5 minuten arriveert? Aangezien de klanten onafhankelijk van elkaar kunnen binnenkomen, geldt ook voor klant 7; de kans is $11/12$.

c) De kans dat geen van de 10 klanten in de gekozen periode binnenkomt is dus:

$$\binom{10}{0} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^0 \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^{10-0} = 0.42.$$

Opmerking: is hiermee de boven gestelde vraag afdoende beantwoord? Er was gegeven dat er gemiddeld tien klanten per uur zouden komen. Dat is iets anders dan dat er elk uur precies tien klanten komen. En waarom kijken we per uur?

Opgave 4 De winkel

a) Van een winkel is bekend dat er gemiddeld 10 klanten per uur binnenkomen. Wat is de kans dat er 3 klanten binnenkomen tussen 14.15 uur en 14.30 uur?

Nota Bene: elk kwartier heeft dezelfde kans.

In een uur zitten 4 periodes van 15 minuten.

De stochast X is het aantal klanten dat in een gekozen kwartier binnenkomt.

De kans op succes is $\frac{1}{4}$.

Er zijn 10 klanten. Het experiment wordt dus 10 keer herhaald. De stochast kan de waarden 0, 1, 2, ..., 9, en 10 aannemen.

b) We nummeren de klanten 1 t/m 10. Wat is de kans dat klant 2, 6 en 9 tussen 14.15 en 14.30 uur komen en alle anderen niet? Dus 3 wel en 7 niet.

$$P = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^7.$$

c) Onder b): 3 keer(J) wel en 7 keer niet(N). Dat kan bijvoorbeeld in de volgende volgorde:

NJNNNJNNJN. Aan de hand van dit rijtje wordt nog weer eens duidelijk gemaakt waarom het aantal

mogelijkheden $\frac{10!}{3!7!}$ is.

Hoeveel rijtjes kun je maken? Een trekking waarbij niet gelet wordt op de volgorde: $\binom{n}{k} = \binom{10}{3}$.

d) Wat is dus $P(X = 3)$, de kans dat er drie klanten tussen 14.15 en 14.30 uur komen?

De kans is een binomiale verdeling.

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7 = \text{binompdf}(10, 0.25, 3) = 0.25.$$

• Jarig

Opgave 5

Jan zit in een klas met 25 leerlingen.

Wat is de kans dat er precies twee klasgenoten zijn die in dezelfde week jarig zijn als Jan? Dan zijn er dus 3 in dezelfde week jarig. Een klassiek probleem.

Uitwerking

$n = 24$ (het aantal zonder Jan)

$p = 1/52$ (kans op succes)

$k = 2$

$$P(X = 2) = \binom{24}{2} \cdot \left(\frac{1}{52}\right)^2 \cdot \left(\frac{51}{52}\right)^{22} \approx 0.067.$$

Oefenen en uitgewerkte Oefenopgave.

Opgave 2, wachttijden probleem:

a) Bereken uitgaande van 20 klanten per twee uur wat de kans is op geen klanten in de komende 5 minuten.

Geen klanten in de komende 5 minuten (= 1/24 deel van twee uren).

De kans dat er een klant komt is, de kans op succes, : $p = 1/24$.

De kans dat er geen klant komt is, de kans op geen succes $1 - p = 23/24$.

$$\therefore \text{De kans op geen klant in de eerste 5 minuten} = \binom{24}{0} \cdot \left(\frac{1}{24}\right)^0 \cdot \left(\frac{23}{24}\right)^{20} = 0.4269.$$

b) Wat is het verschil met 10 klanten per uur ten opzichte van 20 klanten per twee uur? Zie bovenstaand vraagstuk onder a).

Op het eerste gezicht lijkt het hetzelfde vraagstuk. Echter, je moet nu de eerste 5 minuten relateren aan 1 uur in plaats van twee uren. In het geval van 10 klanten in 1 uur is de kans $\binom{10}{0} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^0 \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^{10} = 0.4189$.

Het verschil is niet groot. Het quotiënt van beide kansen is:

$$\frac{\binom{24}{0} \cdot \left(\frac{1}{24}\right)^0 \cdot \left(\frac{23}{24}\right)^{20}}{\binom{10}{0} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^0 \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^{10}} = \left(\frac{23 \cdot 23}{22 \cdot 24}\right)^{10} = \left(1 + \frac{1}{22}\right)^{10} \left(1 - \frac{1}{24}\right)^{10} = \left(1 + \frac{10}{22} + \dots\right) \left(1 - \frac{10}{24} + \dots\right) = \left(1 + \frac{10}{22} - \frac{10}{24} + \dots\right) = \\ = \left[1 + \frac{10(24-22)}{22 \cdot 24} + \dots\right] \cong 1 + \frac{20}{22 \cdot 24}, \text{ "old school"}.$$

Hoe ontstaat dit verschil: in het geval van de 20 klanten en twee uren gaat het om de relatie van 5 minuten en 2 uren.

In het andere geval gaat het om de relatie van 5 minuten en 1 uur.

Opgave 3 de winkel

a) Wat is onder de aanname dat er tien klanten per uur komen de kans dat er 1 klant in in de eerste 5 minuten komt?

$$\text{De kans is: } \binom{10}{1} \left(\frac{1}{12}\right)^1 \left(\frac{11}{12}\right)^9,$$

$$\text{met de GR: } \text{binompdf}\left(10, \frac{1}{12}, 1\right) = 0.3808.$$

b) Twee klanten in de komende vijf minuten?

$$\text{De kans is: } \binom{10}{2} \left(\frac{1}{12}\right)^2 \left(\frac{11}{12}\right)^8,$$

$$\text{met de GR: } \text{binompdf}\left(10, \frac{1}{12}, 2\right) = 0.1588.$$

Opgave 6 Zitplaatsen in een vliegtuig

Een vliegtuig heeft 200 zitplaatsen. Van de geboekte vluchten komt 5% van de passagiers niet opdagen.

Daarom verkoopt de vliegtuig maatschappij niet 200 maar 204 zitplaatsen.

a) Bereken de kans dat er één zitplaats te weinig zal blijken te zijn.

We doen deze kansberekening zonder GR. Het aantal reizigers dat niet komt opdagen is binomiaal verdeeld. $p = 0.05$, en 204.

De vraagstelling wordt: Wat is de kans dat er 201 passagiers komen opdagen?

Algemeen: $P = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

$$P = \binom{204}{3} (0.05)^3 (1 - 0.05)^{201} = 0.0058.$$

Nota bene: $P = 203 \cdot 202 \cdot 32 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot (1 - 0.05)^{201}$.

Verder kun je van $(1 - 0.05)^{201}$ met het binomium van Newton een schatting maken.

Hetzelfde resultaat bereik je met als er 201 passagiers wel komen opdagen, $p = 0.95$,

$$P = \binom{204}{201} (0.95)^{201} (0.05)^3 = 0.0058.$$

b) Met de GR:

- $\text{binompdf}(204, 0.05, 3) = 0.0058$,

of

- $\text{binompdf}(204, 0.95, 201) = 0.0058$.

Opgave 7

Laat X het aantal successen zijn bij binomiaal kansexperiment met n herhalingen, elk met een succeskans p .

Dan geldt: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, voor $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

a) De formule voor $P(X = k)$ laat zich vereenvoudigen in het geval $p = \frac{1}{2}$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = P(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

b) Welke afspraak moet je maken voor 0^0 om de formule ook te laten gelden in het geval $p = 0$?

Kies $k = 0$.

Dan is $P(X = 0) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. In dit geval is de kans op geen succes, $p = 0$, $P(X = 0) = 1$.

En voor alle $k = 1, 2, \dots, n$ geldt $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 0$, want $0^1 = 0$, enzovoort.

Dus moet $\binom{n}{0} 0^0 (1-0)^n = 1 \Rightarrow 0^0 = 1$

• Oefenen

Blok 13 Les 2 De Poissonverdeling

Deze les sluit aan bij paragraaf 2 van Poisson Verdeling van de Wageningse Methode 2009.

• De winkel

Door ervaring is bekend dat er gemiddeld λ klanten per uur binnenkomen.

De klanten komen onafhankelijk van elkaar binnen. De aankomsttijd van de ene klant hangt niet af van de andere klant.

X is het aantal klanten dat er in een uur binnen kan komen.

Dan is :

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \text{ voor } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Deze formule wordt afgeleid in deze les.

• De brandweer

Opgave 18, een voorbeeld

a) In een jaar komen er gemiddeld 123 brandmeldingen binnen voor een bepaalde stad.

Wat is de kans dat er op een dag precies twee brandmeldingen zijn?

Uitwerking

123 meldingen in een jaar is gemiddeld $\frac{123}{365} = 0,337$ meldingen per dag.

$\lambda = 0,337, k = 2$:

$$P(X = 2) = \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = \frac{(\frac{123}{365})^2}{2!} e^{-\frac{123}{365}} = 0,0405.$$

Dat is ongeveer 4%.

4% van 365 dagen is 14,6 dagen. Dus op 15 van de 365 dagen kun je dubbele meldingen verwachten.

b) Er vallen in Nederland jaarlijks gemiddeld 810 fietsdoden in het verkeer.

Bereken de kans dat er morgen drie fietsdoden vallen.

Gemiddeld vallen er 810/365 fietsdoden per dag.

Poissonverdeling $\lambda = 810/365$.

$P(x = 3)$?

$$\text{Poissonverdeling: } P(x = 3) = \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} = \frac{(810/365)^3}{3!} e^{-810/365}.$$

Met de GR:

- poissonpdf(λ, k) geeft de kans op k voorvallen bij een Poissonverdeling met parameter λ .

- poissoncdf(λ, k) geeft de kans op hoogstens k voorvallen bij een Poissonverdeling met parameter λ .

$$\text{poissonpdf}(\lambda, k) = \text{poissonpdf}\left(\frac{810}{365}, 3\right) = 0.198.$$

Opgave 19

a) Opgave 18a) met de GR:

$$\text{poissonpdf}\left(\frac{123}{365}, 2\right) = 0.04054.$$

Opgave 18b) met de GR:

$$\text{poissonpdf}\left(\frac{810}{365}, 3\right) = 0.19799.$$

b) Gemiddeld worden er elke dag in Nederland 496 baby's geboren. Wat is de kans dat er morgen niet meer dan 450 baby's geboren worden in Nederland?

Let op: de vraag is "niet meer dan"! Dus Poisson cumulatief gebruiken: $\lambda = 496$, en $k = 450$.

$$\text{poissoncdf}(496, 450) = 0.0193.$$

c) Zie bovenstaande vraag 18b). Er vallen in Nederland jaarlijks gemiddeld 810 fietsdoden in het verkeer. Bereken de kans dat er in een jaar minder dan 800 fietsdoden vallen in het verkeer.

$$\text{poissoncdf}(810, 799) = 0.3580.$$

• De winkel

Opgave 10

Stel dat er in een winkel gemiddeld 10 klanten per uur binnenkomen. Wat is de kans dat er in het komende kwartier precies 3 klanten binnenkomen? Dit is het centrale thema van Les 2.

a) Waarom is het belangrijk voor de winkelier (bedrijfsleiding) om te weten wat de kans is op 3 klanten in een kwartier? Dan weet de bedrijfsleiding hoeveel personeel er ingezet moet worden. Je wil geen klanten verliezen.

b) Hoe groot schat je de kans op 3 klanten in een kwartier als er gemiddeld 10 per uur komen? Het gaat er om of je een idee hebt; je kunt natuurlijk onmogelijk zomaar de kans berekenen. 10 klanten per uur wil zeggen gemiddeld 6 minuten voor een klant. Dus 3 klanten in 18 minuten. Ik schat de kans iets kleiner dan 50%!?

Opgave 11:

a) Er komen 10 klanten per uur binnen. De klanten komen onafhankelijk van elkaar binnen. Wat betekent dat?

De aankomsttijd van de ene klant hangt niet af van de aankomsttijden van de andere klanten.

b) Wat is de kans dat er 8 klanten het eerste halfuur komen en de resterende 2 klanten in het tweede halfuur?

Uitwerking

Met de binomiale verdeling.

X is het aantal klanten dat in het eerste halfuur binnenkomt.

$n = 10$ en $p = \frac{1}{2}$. (Nota Bene: de kans op een klant is dus $\frac{1}{2}$).

$$P(X = 8) = \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \text{binompdf}(10, 0.5, 8) = 0.04.$$

Nota Bene: de relatie tussen de Poisson verdeling en de binomiale verdeling wordt behandeld in Oefenopgave 16.

c) Het personeel is druk bezig om alle klanten van dienst te zijn. Stel dat elke klant precies 5 minuten nodig heeft om geholpen te worden. Hoe groot schat je de kans dat geen enkele klant hoeft te wachten? De kans zal niet groot zijn. Er is niet veel speling. Als een klant binnenkomt als de vorige net weg is, is er maar 10 minuten in een uur over.

- **De abstracte winkel**

$P_1(n)$ is de kans op precies n klanten in een uur.

$P_{\frac{1}{2}}(n)$ is de kans op precies n klanten in een half uur.

- $P_1(0)$ is de kans op 0 klant in een uur:

Geen klant in een uur dat kan als volgt:

“0 klanten in het eerste half uur en nul klanten in het tweede half uur.”

$$\rightarrow P_1(0) = (P_{\frac{1}{2}}(0))^2.$$

- $P_1(1)$ is de kans op 1 klant in een uur:

Eén klant in een uur, dat kan als volgt:

1 klant in het eerste half uur en 0 klanten in het tweede halfuur
of:

0 klanten in het eerste halfuur en 1 klant in het tweede halfuur

$$\rightarrow P_1(1) = P_{\frac{1}{2}}(1) \cdot P_{\frac{1}{2}}(0) + P_{\frac{1}{2}}(0) \cdot P_{\frac{1}{2}}(1) = 2 \cdot P_{\frac{1}{2}}(0) \cdot P_{\frac{1}{2}}(1).$$

- Nu twee klanten in een uur:

2 klanten in het eerste halfuur en 0 klanten in het tweede halfuur
of:

1 klant in het eerste halfuur en 1 klant in het tweede halfuur

of:

0 klanten in het eerste halfuur en 2 klanten in het tweede halfuur

$$\begin{aligned} P_1(2) &= P_{\frac{1}{2}}(2) \cdot P_{\frac{1}{2}}(0) + P_{\frac{1}{2}}(1) \cdot P_{\frac{1}{2}}(1) + P_{\frac{1}{2}}(0) \cdot P_{\frac{1}{2}}(2) = \\ &= [P_{\frac{1}{2}}(1)]^2 + 2 \cdot P_{\frac{1}{2}}(0) \cdot P_{\frac{1}{2}}(2). \end{aligned}$$

- 3 klanten in een uur:

Opgave 12

a) Er geldt $P_1(0) = [P_{\frac{1}{2}}(0)]^2$.

Immers, de kans op 0 klanten in een uur = de kans op 0 klanten in het eerste halfuur en 0 klanten in het tweede halfuur = de kans op 0 klanten in het eerste halfuur · de kans op 0 klanten in het tweede halfuur. Dus de kansen op de twee gebeurtenissen zijn gelijk en die moet je vermenigvuldigen.

Druk zo $P_1(1)$ uit in $P_{\frac{1}{2}}(0)$ en $P_{\frac{1}{2}}(1)$. Dit is in de bovenstaande tekst van de summary uitgewerkt bij de abstracte winkel: $P_1(1) = P_{\frac{1}{2}}(1) \cdot P_{\frac{1}{2}}(0) + P_{\frac{1}{2}}(0) \cdot P_{\frac{1}{2}}(1) = 2 \cdot P_{\frac{1}{2}}(0) \cdot P_{\frac{1}{2}}(1)$.

b) $P_1(3)$ uitgedrukt in: $P_{\frac{1}{2}}(0)$, $P_{\frac{1}{2}}(1)$, $P_{\frac{1}{2}}(2)$ en $P_{\frac{1}{2}}(3)$.

- 3 klanten in het eerste halfuur en 0 klanten in het tweede halfuur.

- 2 klanten in het eerste halfuur en 1 klant in het tweede halfuur.
- 1 klant in het eerste halfuur en 2 klanten in het tweede halfuur.
- 0 klanten in het eerste halfuur en 3 klanten in het tweede halfuur.

$$P_1(3) = P_{\frac{1}{2}}(3) \cdot P_{\frac{1}{2}}(0) + P_{\frac{1}{2}}(2) \cdot P_{\frac{1}{2}}(1) + P_{\frac{1}{2}}(1) \cdot P_{\frac{1}{2}}(2) + P_{\frac{1}{2}}(0) \cdot P_{\frac{1}{2}}(3) = 2 \cdot P_{\frac{1}{2}}(0) \cdot P_{\frac{1}{2}}(3) + 2 \cdot P_{\frac{1}{2}}(1) \cdot P_{\frac{1}{2}}(2).$$

Met de binomiale verdeling vind je voor 3 klanten in een uur

$$P_1(3) = 2 \cdot \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 2 \cdot \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 1.$$

Dit was te verwachten. Er komen 3 klanten in 1 uur.

- Nu 7 klanten

$P_1(7)$ is de kans op precies 7 klanten in het uur.

$P_{\frac{1}{2}}(7)$ is de kans op precies 7 klanten in het halfuur (welk half uur wordt dus niet

aangegeven. Dat is niet van belang.)

De kans op:

“7 klanten in het eerste half uur en 0 klanten in het tweede half halfuur” is ook de kans op :

“7 klanten in een uur waarvan 7 in het eerste halfuur.”

Dus:

$$P_{\frac{1}{2}}(7) \cdot P_{\frac{1}{2}}(0) = P_1(7) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7.$$

Eerst $P_1(7)$. Dit is de kans dat er 7 klanten in een uur komen: je weet nooit zeker of er 7 klanten komen.

Nu 7 klanten in een halfuur:

Om dit uit te rekenen gebruiken we de binomiale verdeling met $n = 7$, $p = \frac{1}{2}$ en $k = 7$:

$$\text{dus } \binom{7}{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7-7} = \left(\frac{1}{2}\right)^7.$$

$$\rightarrow P_{\frac{1}{2}}(7) \cdot P_{\frac{1}{2}}(0) = P_1(7) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \Leftarrow.$$

Kijk ook nog weer naar 10 klanten per uur waarvan 8 in het eerste halfuur [zie boven:

$$P(X = 8) = \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2, \text{ opgave 11b].}$$

De kans op:

“6 klanten in het eerste half uur en 1 klant in het tweede half halfuur” is ook de kans op :

“7 klanten in een uur waarvan 6 in het eerste halfuur.”

Dit laatste kan op 7 verschillende manieren, de binomiale verdeling,:

$$P_{\frac{1}{2}}(6) \cdot P_{\frac{1}{2}}(1) = P_1(7) \cdot \binom{7}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7-6} = P_1(7) \cdot 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \Leftarrow.$$

Deel het resultaat van 7 klanten in het eerste halfuur door het resultaat van 6 klanten in het eerste halfuur en elimineer zo $P_1(7)$:

$$\frac{P_{\frac{1}{2}}(7) \cdot P_{\frac{1}{2}}(0)}{P_{\frac{1}{2}}(6) \cdot P_{\frac{1}{2}}(1)} = \frac{P_1(7) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7}{P_1(7) \cdot 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7} = \frac{1}{7}, \rightarrow P_{\frac{1}{2}}(7) = \frac{1}{7} \frac{P_{\frac{1}{2}}(1)}{P_{\frac{1}{2}}(0)} P_{\frac{1}{2}}(6).$$

In het algemeen kun je afleiden:

$$P_{\frac{1}{2}}(n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{P_{\frac{1}{2}}(1)}{P_{\frac{1}{2}}(0)} P_{\frac{1}{2}}(n-1).$$

$$\text{Kies } \lambda = \frac{P_{\frac{1}{2}}(1)}{P_{\frac{1}{2}}(0)}.$$

$$P_{\frac{1}{2}}(n) = \frac{1}{n} \cdot \lambda \cdot P_{\frac{1}{2}}(n-1) = \frac{1}{n(n-1)} \lambda^2 P_{\frac{1}{2}}(n-2) = \dots \Rightarrow$$

$$P_{\frac{1}{2}}(n-1) = \frac{1}{n-1} \cdot \lambda \cdot P_{\frac{1}{2}}(n-2),$$

$$\text{dus } P_{\frac{1}{2}}(n) = \frac{1}{n} \cdot \lambda \cdot P_{\frac{1}{2}}(n-1) = \frac{1}{n(n-1)} \lambda^2 P_{\frac{1}{2}}(n-2) = \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{\frac{1}{2}}(n) = \frac{\lambda^n}{n!} \cdot P_{\frac{1}{2}}(0)$$

Als je weet wat de kans is op 0 en 1 klant in een half uur, dan kun je de kans op n klanten in een half uur berekenen.

- Tussenstap: het getal e

e is het getal van Euler.

Voor e geldt dat $\frac{d}{dx} e^x \equiv (e^x)' = e^x$ (de functie e^x is gelijk aan haar/zijn afgeleide).

$e \approx 2.7$

Ook geldt dat: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \frac{x^n}{n!} + \dots$ (oneindige som).

Dus: $\frac{d}{dx} e^x = \frac{d}{dx} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \frac{x^n}{n!} + \dots \right) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \frac{x^n}{n!} + \dots,$

want $\frac{d}{dx} \frac{x^n}{n!} = n \frac{x^{n-1}}{n!} = n \frac{x^{n-1}}{n(n-1)!} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$

- Vervolg abstracte winkel.

De oneindige som: $P_{\frac{1}{2}}(0) + P_{\frac{1}{2}}(1) + P_{\frac{1}{2}}(2) + \dots$ is de kans dat er 0, 1, 2, klanten binnenkomen in een half uur.

Die totale kans is 1.

We hebben al afgeleid dat: $P_{\frac{1}{2}}(n) = \frac{\lambda^n}{n!} \cdot P_{\frac{1}{2}}(0).$

$$\begin{aligned} \text{Dus } P_{\frac{1}{2}}(0) + P_{\frac{1}{2}}(1) + P_{\frac{1}{2}}(2) + \dots &= P_{\frac{1}{2}}(0) \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots \frac{\lambda^n}{n!} + \dots \right) = \\ &= P_{\frac{1}{2}}(0) \cdot e^\lambda = 1. \end{aligned}$$

$$\rightarrow P_{\frac{1}{2}}(0) = e^{-\lambda} \text{ en } P_{\frac{1}{2}}(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$

De kans op n klanten in een half uur is:

$$P_{\frac{1}{2}}(n) = \frac{\lambda^n}{n!} \cdot P_{\frac{1}{2}}(0) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \text{ met } \lambda = \frac{P_{\frac{1}{2}}(1)}{P_{\frac{1}{2}}(0)} = \frac{\text{kans op 1 voorval}}{\text{kans op 0 voorvallen}}.$$

Opmerking: Eigenlijk is hier gebruik gemaakt van de binomiaal verdeling voor de afleiding van de Poisson verdeling (zie Oefenopgave 16).

- De verwachtingswaarde

Algemeen

Kies een willekeurig tijdsinterval (i.p.v. een half uur).

Stel X is het aantal keren dat een voorval in een tijdsinterval kan optreden.

De voorvallen treden onafhankelijk van elkaar op.

En $\lambda = \frac{\text{kans op 1 voorval}}{\text{kans op 0 voorvallen}}$.

Dan is: $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

Stelling

De verhouding $\lambda = \frac{\text{kans op 1 voorval}}{\text{kans op 0 voorvallen}}$ is de verwachtingswaarde van X .

Bewijs

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) + \dots = \\ &= 1 \cdot \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} + 2 \cdot \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} + 3 \cdot \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} + \dots = \lambda e^{-\lambda} \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots \frac{\lambda^n}{n!} + \dots \right) = \\ &= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda. \end{aligned}$$

Nota bene: bij deze afleiding maak je gebruik van: $\frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!}$.

- **Poissonverdeeld**

X is het aantal keren dat een voorval in een zekere tijdsperiode optreedt.

De voorvallen treden onafhankelijk van elkaar op.

De verhouding $\frac{\text{kans op 1 voorval}}{\text{kans op 0 voorvallen}}$ noemen we λ .

Gegeven is dat het voorval gemiddeld λ keer optreedt in die tijdsperiode (de verwachtingswaarde is λ).

De kans op k voorvallen in die tijdsperiode

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Dan is X Poissonverdeeld met parameter λ .

NB: In de formule komt geen kans p voor. Je weet alleen het gemiddelde.

Als het aantal klanten in 1 uur Poissonverdeeld is met een gemiddelde λ , dan is het aantal klanten in $\frac{1}{2}$ uur Poissonverdeeld met $\frac{1}{2} \lambda$.

Algemeen: Het aantal klanten in t uur is Poissonverdeeld met een gemiddelde van $t \cdot \lambda$.

- **Extra: Van binomiaal naar normaal**

We weten inmiddels dat onder bepaalde voorwaarden, de binomiale verdeling kunnen benaderen met de normale verdeling.

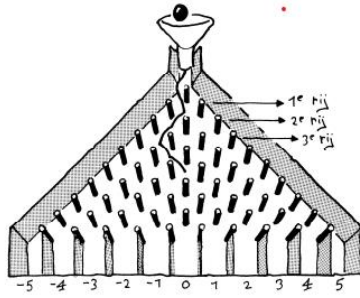
Maar kun je dat ook bewijzen? Dat gaat niet zo gemakkelijk als bij de bovenstaande Poissonverdeling (zie Les 3). In Blok 5 Les 4 hebben we de benadering toegepast in de Les over de centrale limietstelling.

De standaard normale verdelingsfunctie is $\propto y = e^{-x^2}$.

Ook hier komen we weer de e-macht tegen, net als bij de Poissonverdeling. Wat heeft de functie $y = e^{-x^2}$ te maken met de binomiaalcoëfficiënten $\binom{n}{m}$?

Bij de Wageningse methode wordt het verband tussen de e-macht en de faculteiten uitgelegd met het bord van Galton. Zoals gezegd: het is niet eenvoudig.

Het bord van Galton:



De bakjes waar het balletje in kan vallen geven we een nummer. Het middelste krijgt nummer 0. De breedte van de bakjes noemen we a . Elke keer als een balletje een pin raakt, springt het $\frac{1}{2}a$ naar rechts of $\frac{1}{2}a$ naar links. Het zal duidelijk zijn dat de pinnen in horizontale richting een afstand a van elkaar staan.

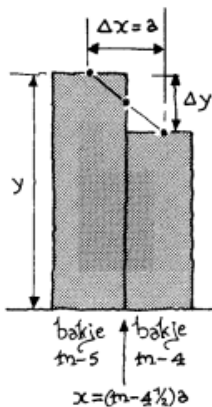
Als het balletje m keer naar rechts gaat en dus $(10 - m)$ keer naar links, komt het balletje in bakje $(m - 5)$. De kans daarop is $\binom{10}{m} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$.

als het balletje $(m - 1)$ keer naar rechts gaat en dus $(9 - m)$ keer naar links, komt het balletje in het bakje $(m - 4)$. De kans daarop is $\binom{10}{m+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$.

De grens tussen twee bakjes ligt bij $x = (m - \frac{10-1}{2})a$.

Daar is de y -waarde van de kans het gemiddelde van m en $(m + 10)$ successen:

$\frac{1}{2} \cdot \left[\binom{10}{m} + \binom{10}{m+1} \right] \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$, de eerste stap van discreet naar continue. Zie onderstaande tekening:



$$\begin{aligned} \binom{10}{m+1} &= \frac{10!}{(m+1)!(10-[m+1])!} = \frac{10!}{(m+1)!(9-m)!} = \frac{10!}{(m+1)m!(9-m)!} = \frac{10!(10-m)}{(m+1)(10-m)(9-m)!} = \\ &= \frac{(10-m)}{m+1} \frac{10!}{m!(10-m)!} = \frac{(10-m)}{m+1} \binom{10}{m}. \end{aligned}$$

We gaan nu de richtingscoëfficiënt, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, bepalen uit de gegeven binomialeverdeling (Zie bovenstaande figuur). Daartoe bepalen we eerst de y -waarde bij $x = (m - \frac{10-1}{2})a$.

Dus,

$$y = \frac{1}{2} \cdot \left[\binom{10}{m} + \binom{10}{m+1} \right] \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{2} \cdot \left[1 + \frac{10-m}{m+1} \right] \binom{10}{m} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{m+1}{m+1} + \frac{10-m}{m+1} \right] \binom{10}{m} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{10} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{11}{m+1} \right] \cdot \binom{10}{m} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{10}.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}:$$

$$\Delta x = a,$$

$$\Delta y = \binom{10}{m+1} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{10} - \binom{10}{m} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{10} = \left(\frac{10-m}{m+1} - \frac{m+1}{m+1} \right) \cdot \binom{10}{m} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{10} = \frac{9-2m}{m+1} \cdot \binom{10}{m} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{10},$$

waarbij is gebruik gemaakt van $\binom{10}{m+1} = \frac{(10-m)}{m+1} \binom{10}{m}$, zie bovenstaande berekening, de kansen bij $(m-5)$ en $(m-4)$.

$$\text{Dus: } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{a} \cdot \frac{9-2m}{m+1} \cdot \binom{10}{m} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{10}.$$

$$\text{We hebben: } x = \left(m - \frac{10-1}{2} \right) a \Rightarrow (9-2m) = -\frac{2x}{a},$$

$$\text{dus } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{a} \cdot \frac{9-2m}{m+1} \cdot \binom{10}{m} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{10} = -\frac{2x}{a^2} \cdot \frac{1}{m+1} \binom{10}{m} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{10}.$$

Met de bovenstaand uitgerekenen y -waarde:

$$y = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{11}{m+1} \right] \cdot \binom{10}{m} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{10} \Rightarrow \frac{2y}{11} = \frac{1}{m+1} \binom{10}{m} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{10}.$$

Substitueer deze waarde van $\frac{2y}{11}$ in:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2x}{a^2} \cdot \frac{1}{m+1} \binom{10}{m} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{10} = -\frac{4}{11a^2} \cdot x \cdot y.$$

Bij n rijen in het Galton bord vinden we:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{4}{(n+1)a^2} \cdot x \cdot y.$$

We zien in deze uitdrukking nog de afhankelijkheid van het a van het Galtonbord.

Dat wil je niet. We moeten a handig kiezen. Om de normale verdeling te krijgen moet bij toenemende n , de bakjes steeds smaller worden. Een handige keuze is:

$$a = \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

We vinden dan voor de richtingscoëfficiënt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{4}{(n+1)a^2} \cdot x \cdot y = -x \cdot y.$$

Op deze wijze hebben we de differentiaalvergelijking:

$$\frac{dy}{dx} = -x \cdot y,$$

van de normaalverdeling gevonden. Zie hiervoor Blok 14, Continue Dynamische Processen.

Oefenen en uitgewerkte Oefenopgaven.

Opgave 13 Een herhaling uit de samenvatting

a) Als er 7 klanten in het eerste halfuur komen en 0 in het tweede halfuur, dan komen er 7 klanten in het hele uur en die 7 klanten komen allemaal in de eerste helft van het uur.

Dit vertalen we in kansen:

$$P_{\frac{1}{2}}(7) \cdot P_{\frac{1}{2}}(0) = P_1(7) \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^7, \text{ want de kans is } \frac{1}{2} \text{ dat 1 klant in het eerste of tweede halfuur komt.}$$

Een zelfde redenering geeft

$$P_{\frac{1}{2}}(6) \cdot P_{\frac{1}{2}}(1) = P_1(7) \cdot 7 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^7.$$

Redenering:

$P(6 \text{ klanten in het eerste halfuur en } 1 \text{ klant in het tweede halfuur}) =$
 $= P(7 \text{ klanten in het hele uur en daarvan } 1 \text{ klant in het tweede halfuur}) =$
 $= P_1(7) \cdot P_1(1 \text{ van de } 7 \text{ klanten komt in het tweede halfuur}), \text{ en dat kan op } 7 \text{ manieren:}$

$$P_1(7) \cdot \binom{7}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \frac{1}{2} = P_1(7) \cdot 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7.$$

b) $P_1(7)$ kennen we niet. Maar zoals in de bovenstaande summary valt te lezen kunnen we $P_1(7)$ elimineren met de twee uitdrukkingen onder a):

$$P_1(7) = \frac{\frac{P_1(7) \cdot P_1(0)}{\left(\frac{1}{2}\right)^7}}{\frac{P_1(6) \cdot P_1(1)}{7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7}} \Rightarrow P_1(7) = \frac{1}{7} \frac{P_1(1)}{P_1(0)} P_1(6).$$

c) De relatie tussen n en $n - 1$ wordt:

$$P_{\frac{1}{2}}(n) = \frac{1}{n} \frac{P_{\frac{1}{2}}(1)}{P_{\frac{1}{2}}(0)} P_{\frac{1}{2}}(n-1).$$

d) De formule onder c) geeft voor $n = 1$

$$P_{\frac{1}{2}}(1) = \frac{P_{\frac{1}{2}}(1)}{P_{\frac{1}{2}}(0)} P_{\frac{1}{2}}(0) \Rightarrow \frac{P_{\frac{1}{2}}(1)}{P_{\frac{1}{2}}(0)} = \frac{P_{\frac{1}{2}}(1)}{P_{\frac{1}{2}}(0)}, \text{ Typ hier uw vergelijking.}$$

de formule klopt voor $n = 1$.

Opgave 15 :

a) Neem $P_{\frac{1}{2}}(0) = 0.1$; dan is er een kans van 10% dat er in een half uur geen klanten in de winkel komen.

Hoe groot is λ ?

Uit de summary weet je: $P_{\frac{1}{2}}(0) \cdot e^\lambda = 1, \therefore \lambda = \ln \frac{1}{P_{\frac{1}{2}}(0)} = \ln 10 = 2.3026.$

b) Laat zien dat algemeen geldt: $\lambda = \ln \frac{1}{P_{\frac{1}{2}}(0)}.$

Zie onder a)

Opgave 16:

De verwachtingswaarde $E(X) = \lambda$, is afgeleid op bovenstaande bladzijde 147.

Laten we de Poisson verdeling afleiden uit de binomiale verdeling. De Poisson verdeling geldt voor grote waarden van het aantal experimenten $\Rightarrow n \rightarrow \infty$.

De binomiale verdeling $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, met $n \rightarrow \infty$. Voor de verwachtingswaarde, np , uit de binomiale verdeling, stellen we $np = \lambda \therefore p = \frac{\lambda}{n}$. Dit substitueren we in de binomiale verdeling:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k}{n^k} \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k}.$$

We evalueren deze uitdrukking voor de limiet $n \rightarrow \infty$.

$$\text{Voor vaste waarde van } k : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k} = 1 \Rightarrow P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n!}{n^k (n-k)!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n.$$

Wat wordt de limiet : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$? Je weet $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}.$

We hebben nu al een aantal ingrediënten:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n!}{n^k (n-k)!} e^{-\lambda}.$$

Er rest ons nog: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^k (n-k)!}$. Het antwoord is simpel maar niet zo direct te zien. Door handig te spelen met de faculteiten komen we er wel uit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^k (n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)!}{n^k (n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k} = \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^{k-1}} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = 1.$$

$$\text{Dus: } P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Wat rest ons nog? Op bovenstaande bladzijde 147 in de summary, is de verwachtingswaarde $E(X) = \lambda$, afgeleid.

Nu nog de variantie: voor de binomiale verdeling is deze $np(1-p)$. Met $p = \frac{\lambda}{n}$, vind je voor

$$\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \lambda \therefore \sigma = \sqrt{\lambda}.$$

Opgave 17

Het aantal klanten per uur is X en heeft parameter λ . Het aantal klanten per halfuur is Y en heeft parameter $\frac{1}{2}\lambda$.

a) In Opgave 12a in bovenstaande summary heb je gezien dat $P_1(0) = [P_{\frac{1}{2}}(0)]^2$.

Dus $P(X=0) = [P(Y=0)]^2$. Controleer dat de gelijkheid geldt met de Poisson kansen $P(X=0)$ en $P(Y=0)$.

Met Poisson: $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

$$P(X=0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}.$$

$$P(Y=0) = \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^0}{0!} e^{-\lambda/2} = e^{-\lambda/2}.$$

$$\therefore P(X=0) = e^{-\lambda} = (e^{-\lambda/2})^2 = [P(Y=0)]^2.$$

b) In Opgave 12b in bovenstaande summary heb je gezien dat $P_1(1) = 2 \cdot P(Y=0) \cdot P(Y=1)$.

Controleer dat deze gelijkheid geldt met de Poisson kansen $P(X=1)$, $P(Y=0)$ en $P(Y=1)$.

$$P(X=1) = \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda},$$

$$P(Y=0) = e^{-\lambda/2}, \text{ zie onder a),}$$

$$P(Y=1) = \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^1}{1!} e^{-\lambda/2} = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda/2}.$$

$$\text{Dan vinden we: } 2 \cdot P(Y=0) \cdot P(Y=1) = 2 \cdot e^{-\lambda/2} \cdot \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda/2} = \lambda e^{-\lambda} = P(X=1).$$

- **Oefenen**

Maken: Opgave 19.

Blok 13 Les 3 De som van de Poissonverdeling en de binomiale verdeling

Deze les sluit aan bij paragraaf 2 (vanaf opgave 20) van Poisson Verdeling van de Wageningse Methode 2009.

- **Poisson**

In deze les leer je hoe je twee Poisson verdeelde stochasten kunt samennemen.

En hoe je bij twee winkels A en B kunt berekenen wat de kans is dat er voor winkel A wordt gekozen.

Bovendien blijkt er een verband te bestaan tussen de Poissonverdeling en de binomiale verdeling (zie opgave 16 hierboven, Les 2).

Herhaling:

Gegeven is dat er gemiddeld λ klanten in een tijdsinterval binnenkomen.

X is het aantal klanten dat er in dat tijdsinterval binnen kan komen.

Dan is $P(X=k)$ de kans dat er precies k klanten in dat tijdsinterval binnenkomen, en:

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ voor } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- **Twee winkels**

X is het aantal klanten dat in een tijdsinterval in winkel A komt met een gemiddelde λ .

Y is het aantal klanten dat in een tijdsinterval in winkel B komt met een gemiddelde μ .

X en Y zijn onafhankelijk en Poissonverdeeld.

Wat is de kans dat er 3 klanten in genoemd tijdsinterval in winkel A of B komen? de mogelijkheden zijn:

3 klanten in A en 0 in B; $X = 3, Y = 0$

2 klanten in A en 1 in B; $X = 2, Y = 1$

1 klant in A en 2 in B; $X = 1, Y = 2$

0 klanten in A en 3 in B; $X = 0, Y = 3$

Met Poisson:

$$\begin{aligned} &P(X = 3) \cdot P(Y = 0) + P(X = 2) \cdot P(Y = 1) + P(X = 1) \cdot P(Y = 2) + \\ &\quad + P(X = 0) \cdot P(Y = 3) = \\ &\frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} \frac{\mu^0}{0!} e^{-\mu} + \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} \frac{\mu^1}{1!} e^{-\mu} + \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} \frac{\mu^2}{2!} e^{-\mu} + \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} \frac{\mu^3}{3!} e^{-\mu} = \\ &= \left[\frac{\lambda^3}{3!} + \frac{\lambda^2}{2!} \mu + \lambda \frac{\mu^2}{2!} + \frac{\mu^3}{3!} \right] e^{-(\lambda+\mu)} = \left[\frac{\lambda^3}{3!} + 3 \frac{\lambda^2 \mu}{3!} + 3 \frac{\lambda \mu^2}{3!} + \frac{\mu^3}{3!} \right] e^{-(\lambda+\mu)} = \\ &\frac{1}{3!} [\lambda^3 + 3\lambda^2 \mu + 3\lambda \mu^2 + \mu^3] e^{-(\lambda+\mu)} = \frac{(\lambda+\mu)^3}{3!} e^{-(\lambda+\mu)}. \end{aligned}$$

We zien dat:

$X + Y$ ook Poissonverdeeld is en

$$P(X + Y = k) = \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!} e^{-(\lambda+\mu)}$$

Het gemiddeld aantal klanten dat voor A kiest is: λ .

Het gemiddeld aantal klanten dat voor B kiest is: μ .

Het gemiddelde vinden we weer door de verwachtingswaarde uit te rekenen.

De kansen:

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu} < 1, \text{ en } \frac{\mu}{\lambda+\mu} < 1. \text{ (Nota Bene: dit wordt hieronder afgeleid).}$$

Deze wordt dus ook gebruikt in de binomiale verdeling, bijv. $\rightarrow p = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

Opmerking bij bovenstaand voorbeeld: in de tekst van de opgave staat “..in winkel A of B ...”. Ik vind dat niet duidelijk, want bij de uitwerking worden de klanten verdeeld over A en B! Er zijn dan 4 mogelijkheden. Bij A of B zijn er 2 mogelijkheden.

We gaan verder met het voorbeeld van de twee winkels om bovenstaande kansen te bepalen:

Er komt een klant aangelopen die kan kiezen uit winkel A of B.

Gegeven de gemiddelden λ en μ , wat is de kans dat de klant voor A kiest?

X is het aantal klanten dat in een tijdsinterval in winkel A komt met een gemiddelde λ .

Y is het aantal klanten dat in een tijdsinterval in winkel B komt met een gemiddelde μ .

X en Y zijn onafhankelijk en Poissonverdeeld.

Bereken met Poisson dat de klant voor winkel A kiest.

Je hebt twee gelijkwaardige redeneringen:

$$\begin{aligned} &P(\text{A of B krijgt 1 klant}) \text{ en } P(\text{klant kiest voor A}) = \\ &= P(\text{A krijgt 1 klant}) \text{ en } P(\text{B krijgt 0 klanten}). \end{aligned}$$

De uitdrukkingen links en rechts van het gelijkteken (de gelijkwaardige redeneringen) drukken we in formule vorm uit, je gaat $P(\text{klant kiest voor A})$ uitrekenen:

$$\begin{aligned} \frac{(\lambda+\mu)^1}{1!} e^{-(\lambda+\mu)} \cdot P(\text{klant kiest voor A}) &= \\ = \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} [\equiv P(\text{A krijgt 1 klant})] &= 1 \cdot \frac{\mu^0}{0!} e^{-\mu} [\equiv P(\text{B krijgt 0 klanten})] = 0. \end{aligned}$$

Dit vereenvoudigen we:

$$(\lambda + \mu) e^{-(\lambda+\mu)} \cdot P(\text{klant kiest voor A}) = \lambda e^{-(\lambda+\mu)}.$$

Dus:

$$P(\text{klant kiest voor A}) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

Op dezelfde wijze:

$$P(\text{klant kiest voor B}) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

- **Poisson en de binomiale verdeling.**

Bij grote n en kleine p kun je de binomiale verdeling benaderen door een Poisson verdeling met $\lambda = n \cdot p$.

$$P(X = k) = \text{binompdf}(n, p, k) \approx \text{poissonpdf}(\lambda = n \cdot p, k).$$

Opgave 22

a) Het aantal Amsterdammers met een zeldzame ziekte is binomiaal verdeeld.

$$n = 8 \cdot 10^5 \text{ en } p = 10^{-5}.$$

$$E(X) = n \cdot p = 8.$$

b) Bereken $P(X = 6)$

$$P(X = 6) = \text{binom}(800000, 0.00001, 6) = 0.1221.$$

c) Nu de benadering met Poisson:

$$\lambda = 8$$

$$P(Y = 6) = \frac{8^6}{6!} \cdot e^{-8} = \text{poissonpdf}(8, 6) = 0.1221.$$

d) t/m g) Onder b) en c) hebben we hetzelfde antwoord gekregen

De benadering:

Bij de benadering ga je uit van de binomiale verdeling:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Deze formule gaan we uitwerken met :

$$P(X = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

- $np = \lambda$

- k een vaste waarde

- $n \gg 1$ en $p \ll 1$ en λ een gegeven waarde.

Verder maken we gebruik van $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{\lambda}{n})^n = e^{-\lambda}$.

Samenvatting Oefenopgave 16 Blok 13, Les 2:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} (1-p)^{-k} p^k (1-p)^n = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \left(1 - \frac{np}{n}\right)^{-k} \frac{(np)^k}{k!} \left(1 - \frac{np}{n}\right)^n = \\ &= \left[\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \right] \left[\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \right] \frac{(\lambda)^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

Voor $n \rightarrow \infty$ en een vaste waarde voor k naderen de uitdrukkingen tussen vierkante haken tot 1.

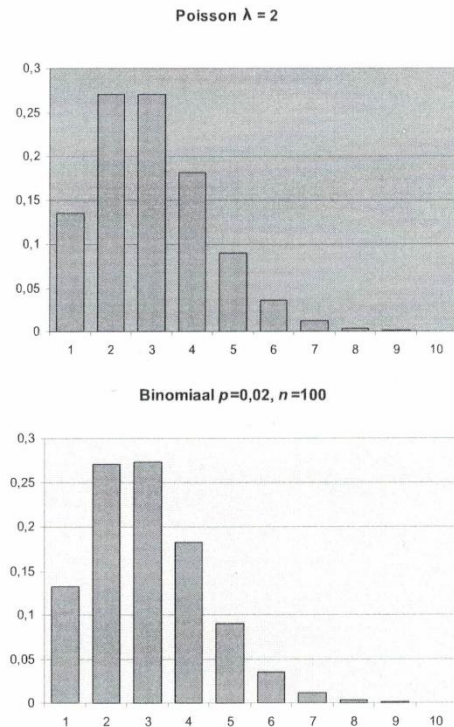
We hebben als resultaat de verdeling van Poisson:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Bij grote n en kleine λ naderen de Binomiale verdeling en de Poisson verdeling tot elkaar.

- Een voorbeeld van de vergelijking van de Poissonverdeling en de binomiale verdeling met dezelfde verwachtingswaarde:

- Poisson met $\lambda = 2$,
- Binomiaal met $n = 100$ en $p = 0.02$.



Oefenen en uitgewerkte Oefenopgave.

Opgave 23 Zie opgave 22 in de summary.

De zeldzame ziekten van opgave 22 komt voor bij 1 op de 100000 mensen. Nederland telt 17 miljoen inwoners. Bereken de kans, $P(X \leq 185)$, dat er in Nederland ten hoogste 185 mensen met de ziekte zijn.

Dit berekenen we met cumulatief Poisson:

$$\lambda = \frac{17 \cdot 10^6}{10^5} = 170.$$

$$\text{poissoncdf}(170, 185) = 0.8818.$$

Opgave 24, Toepassing van de Poisson Verdeling:

Von Bortkiewicz telde in 14 regimenten(leger) over 20 jaren (1875 t/m 1894) in totaal 194 doden door een trap van een paard. Hij concludeerde dat per regiment per jaar het aantal door een trap van een paard gedode cavalieristen Poisson verdeeld was met verwachtingswaarde 0.7.

Bereken de kansen dat dat in een regiment in een jaar 0, 1, 2 doden vielen door een trap van een paard.

$$\lambda = 0.7.$$

$$P(X = 0) = \frac{(0.7)^0}{0!} \cdot e^{-0.7} = e^{-0.7} = 0.4966,$$

$$P(X = 1) = \frac{(0.7)^1}{1!} \cdot e^{-0.7} = 0.7 \cdot e^{-0.7} = 0.3476,$$

$$P(X = 2) = \frac{(0.7)^2}{2!} \cdot e^{-0.7} = \frac{0.49}{2} \cdot e^{-0.7} = 0.1217.$$

Opgave 25

De lotto is een kansspel. De speler(m/v) kruist zes nummers aan uit 1 t/m 45 en kiest zes van de mogelijke kleuren. De notaris trekt ook zes nummers en een kleur, als die nummers hetzelfde zijn als de zes die de speler koos, en bovendien de kleur hetzelfde is, wint de speler de jackpot.

a) Ga na dat de kans $2.05 \cdot 10^{-8}$ is.

De cijfers: het aantal mogelijkheden is, trekken zonder terugleggen, $\binom{45}{6}$. De kans op de juiste cijfers is dan $\frac{1}{\binom{45}{6}}$.

Nota bene(rehearsel) van trekken zonder terugleggen: $\frac{45}{6} \cdot \frac{44}{5} \cdot \frac{43}{4} \cdot \frac{42}{3} \cdot \frac{41}{2} \cdot \frac{40}{1} = \frac{45!}{6! \cdot 39!} = \binom{45}{6}$.

De kleuren: 6 mogelijkheden. De kans is $\frac{1}{6}$.

De beide kansen zijn onafhankelijk. De totale kans is: $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\binom{45}{6}} = 2.0462 \cdot 10^{-8} \cong 2.05 \cdot 10^{-8}$.

Dit is dus een voorbeeld waar het gebruik van de Poissonverdeling is geoorloofd: de kans is klein en het aantal deelnemers is groot.

b) Stel dat er in een week 1 miljoen lottoformulieren worden ingevuld.

Bereken de kans dat de jackpot in een week niet valt.

Noem het aantal deelnemers met alles goed Y .

$$\lambda = n \cdot p = 10^6 \cdot 2.05 \cdot 10^{-8} = 2.05 \cdot 10^{-2}.$$

De Poissonverdeling

$$P(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ met } k = 0 \Rightarrow P(Y = 0) = e^{-2.05 \cdot 10^{-2}} = 0.9797459 \cong 0.9797.$$

c) Als meer dan één speler alles goed heeft, moeten de winnaars de jackpot delen.

Bereken de kans dat de jackpot moet worden gedeeld.

We weten niet met hoeveel personen de jackpot moet worden gedeeld.

De kans dat de jackpot moet worden gedeeld, wordt dan: $P(Y \geq 2) = 1 - (P(Y = 0) + P(Y = 1))$ —(de kans dat niemand de jackpot heeft) —(de kans dat één persoon de jackpot heeft).

Zoals we zien moeten we getallen van elkaar aftrekken: nauwkeurig rekenen! Dus $\lambda = 2.0462 \cdot 10^{-2}$.

We moeten nog uitrekenen: $P(Y = 1)$

$$P(Y = 1) = \frac{2.0462 \cdot 10^{-2}}{1!} e^{-2.0462 \cdot 10^{-2}} = 0.00200475.$$

We hebben nu alle ingrediënten:

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) = 0,000207.$$

• Oefenen

Blok 13 Les 4 Wanneer komt de volgende klant?

Deze les sluit aan bij paragraaf 3 van Poisson Verdeling van de Wageningse Methode 2009.

• Een winkel

X is het aantal klanten dat in een tijdsinterval binnenkomt.

X is Poisson verdeeld.

Gemiddeld komen er per uur λ klanten binnen.

In 2 uur komen er gemiddeld 2λ klanten binnen.

In een half uur komen er gemiddeld $\lambda/2$ klanten binnen.

T is de aankomsttijd van de eerste klant.

Nu komt er het eerste halfuur (0.5) geen klant.

Met de Poissonverdeling:

$$P(T > 0.5) = P[0 \text{ klanten in het eerste half uur (0.5)}] = \frac{(0.5\lambda)^0}{0!} e^{-0.5\lambda}.$$

Nu de algemene formulering:

In t uur komen er gemiddeld $\lambda \cdot t$ klanten binnen:

$$P(T > t) = P(0 \text{ klanten in } t \text{ uur}) = \frac{(t\lambda)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}.$$

Een andere vraag:

Wat is de kans dat de eerste klant binnen t uur binnen komt?

In woorden: dat is 1 min de kans dat er geen klant binnen t uur binnen komt,

$$P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - \frac{(t\lambda)^0}{0!} e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Dus als een aantal "successen" X Poissonverdeeld is met gemiddelde λ en T is de tijdsduur dat je op het eerste succes moet wachten, dan $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Een stochast T heet exponentieel verdeeld met parameter λ als T alle positieve getallen als waarde kan aannemen en $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ voor alle $t \geq 0$.

- **Liften**

Opgave 29:

S. probeert elke vrijdagavond een lift te krijgen om het weekend bij de ouders door te brengen. De helft van de keren duurt het minder dan 30 minuten voordat S. een lift krijgt. Bepaal λ .

Dit weergegeven in formule:

$$\begin{aligned} P(T \leq t) &= 0.5 \\ \rightarrow 1 - e^{-30\lambda} &= 0.5 \\ \rightarrow e^{-30\lambda} &= 0.5 \\ \rightarrow e^{30\lambda} &= 2 \\ \rightarrow 30\lambda &= \ln 2 = 0.6931 \\ \rightarrow \lambda &= 0.0231. \end{aligned}$$

Opgelet: λ heeft hier de dimensie van 1/minuut.

a) Wat is de kans dat S. binnen 5 minuten een lift krijgt?

$$\begin{aligned} P(T \leq 5) &= 1 - e^{-5\lambda} = 1 - e^{-0.1155} = 0.1090 \approx 0.11 \rightarrow \\ \rightarrow & \text{In 11\% van de gevallen krijgt S. binnen 5 minuten een lift.} \end{aligned}$$

b) Wat is nu de kans dat S. na een uur nog geen lift heeft?

$$\begin{aligned} P(T > t) &= e^{-\lambda t} . \\ \text{Dus } P(T > 60 \text{ min.}) &= e^{-\lambda \cdot 60} = 0.251. \end{aligned}$$

- **De verdelingsfunctie en de dichtheidsfunctie**

$$P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \text{ heet de verdelingsfunctie van } T.$$

$$P(a \leq T \leq b) = 1 - e^{-\lambda b} - (1 - e^{-\lambda a}) = F(b) - F(a)$$

$$\text{Neem } f(t) = \frac{dF}{dt} \equiv F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

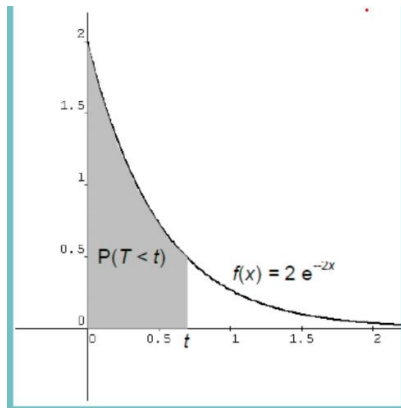
$$\text{Dan is } F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

$$f(t) = \frac{dF}{dt} \equiv F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \text{ heet de dichtheidsfunctie van } T.$$

f is de afgeleide van F en F is de primitieve van f .

$$\rightarrow \int_0^t f(x) dx = F(t) - F(0) = F(t)$$

$$P(T \leq t) = \int_0^t f(x) dx \text{ is de oppervlakte onder de grafiek van } f.$$



Nota Bene: $t < 0$ bestaat dus niet.

- **Geheugen stochast**

De stochast X heeft geen geheugen als $P(X > a + b) = P(X > a) \cdot P(X > b)$ voor alle getallen a en b .

Is dit een verstandige definitie? De geschiedenis van de stochast speelt geen rol en daaruit mag je concluderen dat a en b onafhankelijk zijn en de kansen mogen worden vermenigvuldigd. Voor een exponentieel stochast geldt dat deze geen geheugen heeft:

$$P(X > a) = e^{-\lambda a}, P(X > b) = e^{-\lambda b} \text{ en } P(X > a + b) = e^{-\lambda(a+b)} = e^{-\lambda a} e^{-\lambda b}.$$

- **De verwachtingswaarde**

Een discrete stochast X heeft de uitkomsten $x_1, x_2, \dots, x_n$ met kansen $P(X = x_i) = p_i$.

Dan is de verwachtingswaarde:

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

Een continue stochast X heeft de uitkomsten x met de kansdichtheidsfunctie $f(x)$.

Dan is de verwachtingswaarde:

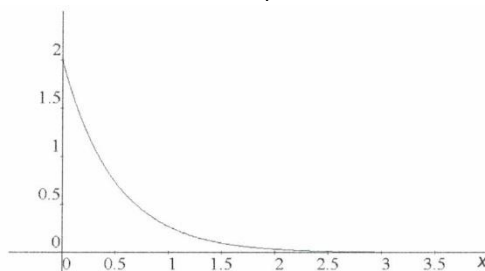
$$E(X) = \int_0^{\infty} x f(x) dx.$$

Nota Bene: de kans bij de continue verdeling is dus $f(x)dx$.

Denk aan de integraal als som en $f(x)dx$ als een blokje met breedte dx .

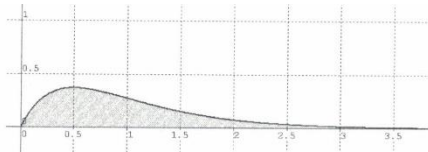
Opgave 33:

Hieronder staat de grafiek van de dichtheidsfunctie $f(x) = 2e^{-2x}$ van een exponentieel verdeelde stochast T met parameter 2:



a) Om de verwachtingswaarde van T te berekenen moet je $x \cdot f(x) = x \cdot 2e^{-2x}$ integreren van 0 tot oneindig: $\int_0^{\infty} x \cdot 2e^{-2x} dx$.

Maak een schatting van $E(T)$, dat is de oppervlakte onder onderstaande grafiek.



Hokjes tellen: de oppervlakte is ongeveer twee hokjes, elk met een oppervlakte van 0.25. Dus de oppervlakte is ongeveer $1/2$.

b) De primitieve van $f(x) = 2e^{-2x}$?

$f(x) = 2e^{-2x}$ is een kansdichtheidsfunctie bij een continue stochast X .

Toon aan dat $F(x) = -xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$ een primitieve is van $xf(x)$.

We moeten aantonen dat $xf(x) = F'(x) \equiv \frac{dF}{dx}$.

De afgeleide van $F(x)$ is:

$$-e^{-2x} + 2xe^{-2x} + e^{-2x} = 2xe^{-2x} = xf(x). \text{ QED.}$$

c) De verwachtingswaarde $E(T)$?

$$E(X) = \int_0^\infty xf(x)dx = \int_0^\infty x \cdot 2e^{-2x}dx.$$

We hebben al aangetoond wat de primitieve is van $x \cdot 2e^{-2x} = xf(x)$.

De verwachtingswaarde is de bepaalde integraal tussen de grenzen 0 en ∞ .

$$\text{Dus } \left| -xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} \right|_0^\infty = 0 - \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} = E(X).$$

d) Hoe groot is de verwachtingswaarde van een exponentieel verdeelde stochast met parameter λ ?

De exponentieel verdeelde stochast: $xf(x) = x\lambda e^{-\lambda x}$, zie onder b).

De verwachtingswaarde:

$$E(X) = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx = \left| -xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} \right|_0^\infty = 0 - \left(-\frac{1}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda}.$$

Oefenen en uitgewerkte Oefenopgave.

Opgave 26, Wanneer komt de volgende klant?

Het aantal klanten is Poisson verdeeld met gemiddeld 3 klanten per uur.

a) Wat is de kans dat de eerste klant ten minste 0.5 uur op zich laat wachten?

Het aantal klanten per 0.5 uur is $3/2=1.5$. De eerste aankomsttijd noemen we T ; dat is de tijd die het duurt voordat de eerste klant binnen komt. $\lambda = 1.5$.

$$P(T \geq 0.5) = P(0 \text{ klanten in het eerste half uur}) = \frac{1.5^0}{0!} e^{-1.5} = 0.2231.$$

b) Bereken de kans dat de eerste klant meer dan een 0.5 uur maar minder dan 1.5 uur op zich laat wachten.

Onder a) hebben we al de kans uitgerekend dat de klant meer dan 0.5 uur op zich laat wachten uitgerekend.

$$\text{Algemeen: } P(a \leq T \leq b) = 1 - e^{-\lambda b} - (1 - e^{-\lambda a}) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

$$\text{Dus: } P(0.5 \leq T \leq 1.5) = e^{-1.5 \cdot 1} - e^{-1.5 \cdot 3} = 0.2231 - 0.0111 = 0.212.$$

c) Bereken de kans dat de derde en vierde klant in het derde kwartier komen. Tip: dan moeten in het eerste halfuur (twee kwartieren) 2 klanten komen en in het daaropvolgende kwartier ook twee klanten.

We moeten dur uitrekenen: $P(2 \text{ klanten in het eerste halfuur}) \cdot P(2 \text{ klanten in het derde kwartier})$.

We pakken dit product van kansen met 2 λ 's aan: $\lambda = 1.5$ voor de klanten in een halfuur en met $\lambda = 0.75$ voor klanten in een kwartier. Dus een tijdseenheid van een half uur en een tijdseenheid van een kwartier.

$$P(2 \text{ klanten in het eerste halfuur}) \cdot P(2 \text{ klanten in het derde kwartier}) = \frac{(1.5)^2}{2!} e^{-1.5} \cdot \frac{(0.75)^2}{2!} e^{-0.75} = 0.0333.$$

Opgave 27

Het aantal klanten X is Poissonverdeeld met gemiddelde λ per uur. T is de tijd die het duurt voordat de eerste klant komt.

a) Welke waarden kan T aannemen?

$T \geq 0$.

b) Is X discreet of continue verdeeld? En T ?

X is het aantal klanten dat de winkel binnenkomt. Dus X is discreet verdeeld.

$T \geq 0$, T kan elke waarde groter dan 0 aannemen. Dus T is continue verdeeld.

c) Bewijs dat $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$, voor alle $t > 0$. Zie ook de bovenstaande summary.

Het aantal klanten in de eerste t uur is Poisson verdeeld met parameter λt .

We weten dat $P(X = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$.

$$P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - P(0 \text{ klanten in de eerste } t \text{ uur}) = 1 - \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t}.$$

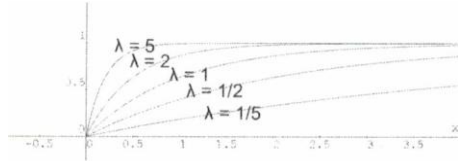
d) Controleer $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$, voor de randgevallen $t = 0$ en t nadert tot oneindig.

Als $t = 0$, levert $1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^0 = 0$, en dat moet ook. De kans dat de eerste klant onmiddellijk komt is 0.

Als $t \rightarrow \infty$, levert $1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\infty} = 1$, en dat moet ook. De kans dat er ooit een klant komt is 1.

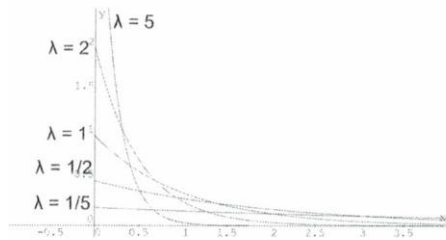
Opgave 28

a) Teken de grafiek van de functie $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, als functie van t , voor enkele waarden van λ in één figuur:



F heet de verdelingsfunctie van t .

b) Teken de grafiek van de afgeleide $f = \frac{dF}{dt} \equiv F'$:



f heet de dichtheidsfunctie van t .

c) Leg uit dat $P(T \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} = \frac{dF}{dt} \Rightarrow \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx + c \Rightarrow F(0) = 0 = \int_0^0 \lambda e^{-\lambda x} dx + c \Rightarrow c = 0.$$

$$\text{Dus: } P(T \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Zie ook de summary: de verdeling - en de dichtheidsfunctie.

Opgave 34

S. gaat weer liften. Gemiddeld stopt er elke tien minuten een auto om een lifter mee te nemen.

Als S. op de liftplaats aankomt, staan er al drie anderen te liften, die één voor één een lift moeten krijgen voor dat S. aan de beurt is.

a) Wat is de verwachtingswaarde van de wachttijd voor S.?

S. is als vierde aan de beurt. 10 minuten wachten per klant: de verwachtingswaarde van de wachttijd is 40 minuten.

b) Wat is de kans dat S. binnen een half uur een lift heeft?

Wat is λ ?

Elke 10 minuten 1 klant. De tijdseenheid van λ is de minuut. 1 klant per 10 minuten: $\lambda t = 1$, met

$$t = 10 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{10}.$$

De kans binnen een half uur een lift is gelijk aan $1 -$ de kans binnen een halfuur geen lift.

Het aantal auto's X dat een lifter meeneemt in 30 minuten is Poisson verdeeld met $\lambda t = 3$.

Dus de kans P dat de 4^e klant een auto X krijgt, is 1-de kans dat 3 klanten drrvoor een lift krijgen:
 $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \text{poissoncdf}(\lambda, k) = 1 - \text{poisson}(3,3) = 1 - 0.6472 = 0.3528$.

• Oefenen

Blok 13 De toets Poissonverdeling

Opgave 1 Aardbeving in Groningen

In de maand februari 2017, gedurende een periode van vier weken, zijn er door het KNMI 15 aardbevingen geregistreerd in de provincie Groningen(www.KNMI.nl). Deze frequentie is al enige tijd redelijk stabiel.

a) R. gaat vijf dagen naar Groningen. Bereken de kans dat er gedurende die tijd minstens één aardbeving wordt geregistreerd. Gebruik de formule van de Poissonverdeling.

λ : 15 aardbevingen in 4 weken betekent dat $\lambda = \frac{15}{28}$.

De kans op minsten 1 aardbeving in de vier weken:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\frac{15}{28}} = 0.585.$$

b) Bereken de kans dat er hoogstens twee aardbevingen worden geregistreerd in de periode dat R. in Groningen is.

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

of

$$P(X \leq 2) = \text{poissoncdf}\left(\frac{15}{28}, 2\right) = 0.98.$$

c) Bereken de kans dat er gedurende de 5 dagen van R. 's verblijf op 3 achtereenvolgende dagen aardbevingen zijn geregistreerd en op de andere twee dagen niet.

De kans op 0 bevingen

$$P(X = 0) = e^{-\lambda t} = 0.585,$$

en de kans op minsten één aardbeving

$$P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 0.414.$$

Dus de kans op geen aardbeving 0.585 en de kans op een aardbeving is 0.414.

Let op een binomiale verdeling, en het aantal mogelijkheden van 3 achtereenvolgende dagen een aardbeving is gelijk aan 3 mogelijkheden. Dat vind je door het aantal manieren te tellen.

Dus de kans is 3 keer maal de kans op 3 bevingen(aaneengesloten) maal de kans op 2 dagen geen bevingen:

$$P(3 \text{ bevingen}) = 3 \cdot (0.414)^3 \cdot (0.585)^2 \cong 0.07.$$

d) T is het aantal uren dat R. wacht voordat er een nieuwe aardbeving wordt geregistreerd in Groningen.

Bereken de kans dat R. minder dan 10 uur hoeft te wachten.

Nu gaat het om het aantal bevingen per uur:

$$\lambda = \frac{15}{28 \cdot 24}.$$

$$P(T < 10) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\frac{15}{28 \cdot 24} \cdot 10} \cong 0.2.$$

Opgave 2 Kindertelefoon

De Kindertelefoon is er voor alle kinderen van 8 tot 18 jaar die in vertrouwen willen praten. Volgens de site van de Kindertelefoon zijn er zo'n 10000 telefoontjes per jaar. De telefoon is bereikbaar van 11 tot 18 uur. De binnenkomende telefoontjes worden over zeven locaties in Nederland verdeeld. We nemen aan dat kinderen of jongeren geen voorkeur hebben voor bepaalde bereikbaarheidsuren, dus de gemiddelden zijn voor elk uur gelijk. We nemen verder aan dat telefoontjes naar de Kindertelefoon Utrecht bij benadering Poissonverdeeld zijn.

a) J. werkt als vrijwilliger in Utrecht. J. heeft ervaring de ervaring dat als J's dienst begint in 10% van de gevallen binnen een kwartier het eerste telefoontje in Utrecht binnenkomt.

Bereken de kans dat J. vanmiddag meer dan een uur moet wachten op het eerste telefoontje in Utrecht.

Wat is λ ?

$$P(T \leq 15 \text{ minuten}) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\lambda \cdot 15} = ?$$

Hier maken we gebruik van "in 10% van de gevallen binnen een kwartier".

$$\text{Dus, } 1 - e^{-\lambda \cdot 15} = 0.1 \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 0.9}{-15} = 0.007.$$

Nu de vraag: s 'middags meer dan een uur wachten

$$P(T > 60) = 1 - [1 - P(T \leq 60)] = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot 60}) = e^{-0.42}.$$

b) Bereken of J's ervaring past bij de aantallen telefoontjes die in de inleiding van deze opgave genoemd zijn, als je aanneemt dat Utrecht een zevende deel van alle telefoontjes krijgt.

Gebaseerd op J's ervaring is het aantal telefoontjes per dag in Nederland:

met $\lambda = 0.007$, en 7 werkuren, is het aantal telefoontjes per dag in Utrecht met λ per minuut:

$$\lambda \cdot 60 \cdot 7 = 0,007 \cdot 420 = 2.94.$$

Voor het hele land per jaar: $2.94 \cdot 365 \cdot 7 \cong 7512$.

Minder dan de genoemde 10000.

Opgave 3 Ambulance

In onderstaande tabel is het aantal ambulances opgenomen dat in een aantal maanden een bepaald meetpunt passeerden.

aantal ambulances	aantal keer
0	7
1	12
2	10
3	6
4	3
5	1

In de tabel zie je, bijvoorbeeld, dat er 10 maanden waren waarin 2 ambulances het meetpunt passeerden.

a) Bereken met de tabelgegevens het gemiddelde aantal ambulances per maand: λ

$$\frac{0 \cdot 7 + 1 \cdot 12 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1}{7 + 12 + 10 + 6 + 3 + 1} = \frac{67}{39} \approx 1,72$$

b) Laat zien dat de gegevens in de tabel behoren bij een Poissonverdeling :

$$P(X = k) = \frac{(\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Deze kans moeten we vermenigvuldigen met het aantal maanden: 39.

Dus:

$$- k = 0 \rightarrow 39 \cdot \text{poissonpdf}(1,72,0) = 7.05 ,$$

$$- k = 1 \rightarrow 39 \cdot \text{poissonpdf}(1,72,1) = 12.06 ,$$

.....,

$$- k = 5 \rightarrow 39 \cdot \text{poissonpdf}(1,72,5) = 0.86 .$$

De verdeling in de tabel wordt goed benaderd door de Poissonverdeling.

Opgave 4 Stoffen

In een textielfabriek worden rollen stoffen vervaardigd met een lengte van 50 meter per rol. Het aantal weeffouten per rol is Poissonverdeeld met een bijbehorende verwachtingswaarde van 1 weeffout per rol. Bij de kwaliteitskeuring van de rollen stof worden deze gescheiden in rollen van A-kwaliteit (met 0 of 1 weeffout per rol) en rollen van B-kwaliteit (met twee of meer weeffouten per rol).

a) Bereken de kans dat een willekeurige rol de aanduiding B-kwaliteit krijgt. $\lambda = 1$, is de verwachtingswaarde.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1).$$

$$P(X \leq 1) = \text{poissoncdf}(\lambda, x) = \text{poissoncdf}(1,1) = 0.736$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0.736 = 0.264.$$

b) de productieomvang per dag is gelijk aan 2000 meter stof.

Hoe groot is de kans dat er op een willekeurige dag tenminste 30 rollen mat A-kwaliteit worden gemaakt?

Dit is een vraagstuk met succeskans van 0.736 en een faalkans van 0.264.

Er worden per dag $\frac{2000}{50} = 40$ rollen per dag geproduceerd.

We hebben nu te maken met een binomiale verdeling met $n = 40$.

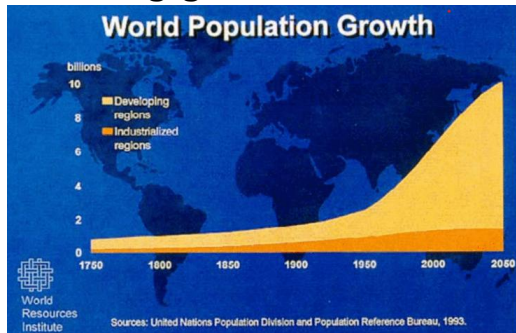
$$P(A \geq 30) = 1 - P(A \leq 29) = 1 - \text{binomialcdf}(40, 0.736, 29) = 0.0503.$$

Blok 14 Dynamische processen

Blok 14 Les 1 Ongeremde groei

Deze les sluit aan bij de paragraaf 4 van Continue Dynamische Processen van de Wageningse Methode 2009

- Bevolkingsgroei



Op 1 januari 2016 telt de wereldbevolking 7,44 miljard mensen. De verwachting, weergegeven in de grafiek, is dat dit aantal 10 miljard is in 2050.

Aanname: Gedurende tijdsduur Δt is de aanwas ΔN evenredig met het aanwezige aantal N en Δt . De evenredigheidsconstante is k .

In formule: $\Delta N = k \cdot N \cdot \Delta t$, of

anders geschreven:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = k \cdot N.$$

De bijpassende differentiaalvergelijking is:

$$\frac{dN}{dt} = k \cdot N$$

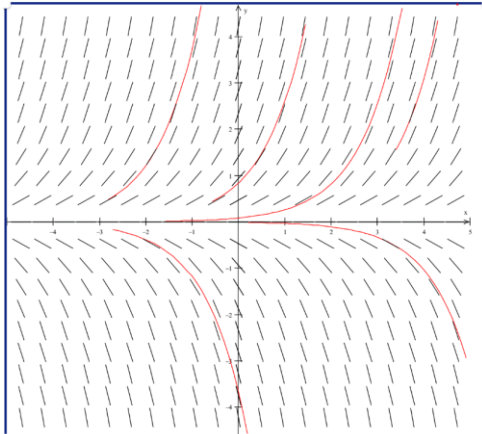
Gegeven de differentiaalvergelijking:

$$\frac{dy}{dx} = c \cdot x$$

Wat zijn alle oplossingen van deze vergelijking?

Je kan Winplot gebruiken voor het richtingsveld. Teken voor $c = 1.2$ het richtingsveld:

$$\frac{dy}{dx} = 1.2 \cdot y$$



- De vergelijking oplossen

Gegeven de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = c \cdot y$.

Wat zijn alle oplossingen van deze vergelijking?

Stelling:

$y = a \cdot e^{c \cdot x}$ is een oplossing van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = c \cdot y$ met startwaarde

$$y(0) = a.$$

Bewijs:

Gegeven $y = a \cdot e^{c \cdot x}$

Differentieer: $\frac{dy}{dx} = a \cdot c \cdot e^{c \cdot x} = c \cdot (a \cdot e^{c \cdot x}) = c \cdot y$

en $y(0) = a \cdot e^{c \cdot 0} = a$.

Neem nu een andere startwaarde.

Stelling:

$y = a \cdot e^{c \cdot (x-k)}$ is een oplossing van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = c \cdot y$ met startwaarde:

$$y(k) = a.$$

Bewijs:

Gegeven $y = a \cdot e^{c \cdot (x-k)}$

$a \cdot e^{c \cdot (x-k)} = a \cdot e^{c \cdot x} \cdot e^{-c \cdot k} = b \cdot e^{c \cdot x}$ en $b = a \cdot e^{-c \cdot k}$, een constante.

$$y(k) = a \cdot e^{c \cdot (k-k)} = a \cdot e^{c \cdot 0} = a.$$

Gevolg:

De kromme $y_k = a \cdot e^{c \cdot (x-k)}$ is de kromme $y = a \cdot e^{c \cdot x}$ die over een afstand $|k|$ naar rechts ($k > 0$) of links ($k < 0$) is verschoven.

Stelling:

Door elk punt (p, q) van het vlak gaat een oplossingskromme van de vergelijking $\frac{dy}{dx} = c \cdot y$.

Bewijs

Je weet dat $y = a \cdot e^{c \cdot x}$ een oplossingskromme is voor elke a .

Als (p, q) op deze kromme ligt, dan geldt: $q = a \cdot e^{c \cdot p}$,

Dus $a = q \cdot e^{-c \cdot p}$ en

$$y = a \cdot e^{c \cdot x} = q \cdot e^{-c \cdot p} \cdot e^{c \cdot x} = q \cdot e^{-c \cdot (x-p)},$$

en dit is een oplossingskromme.

Voor $y = q$ en $x = p$ vind je: $q = q$; QED.

Tot nu toe is bewezen dat de krommen van de gedaante $y = a \cdot e^{c \cdot x}$ oplossingskrommen zijn.

Maar zijn ze dat ook allemaal? Kunnen er meer oplossingen zijn?

Stelling:

Elke oplossing van de vergelijking $\frac{dy}{dx} = c \cdot y$ is van de gedaante $y = a \cdot e^{c \cdot x}$.

Bewijs:

Stel $y = f(x)$ is een oplossing van $\frac{dy}{dx} = c \cdot y$.

$$\text{Dus } f'(x) = c \cdot f(x)$$

Bekijk $g(x) = f(x) \cdot e^{-c \cdot x}$,

Dan is $g'(x) = f'(x) \cdot e^{-c \cdot x} - c \cdot f(x) \cdot e^{-c \cdot x} =$
 $= c \cdot f(x) \cdot e^{-c \cdot x} - c \cdot f(x) \cdot e^{-c \cdot x} = 0$

Dus $g(x) = a$, een constante.

En $f(x) = g(x) \cdot e^{c \cdot x} = a \cdot e^{c \cdot x}$.

- **Ongeremde groei continu model**

Als $c > 0$ dan beschrijft de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = c \cdot y$ ongeremde groei.

Alle oplossingen van de vergelijking zijn exponentiële groeifuncties

$y = a \cdot e^{c \cdot x} = a \cdot (e^c)^x$, met groeifactor e^c .

$x = 0 \rightarrow y(0) = a \cdot e^{c \cdot 0} = a$.

Door $y = y(0) \cdot e^{c \cdot x}$ wordt de oplossing door zijn startpunt vastgelegd.

- **Luchtdruk**

Wet van Boyle:

De snelheid waarmee de luchtdruk afneemt bij toenemende hoogte boven zeeniveau, is evenredig met de luchtdruk.

In formule: $\frac{dp}{dh} = c \cdot p$

(p is de luchtdruk in hectopascal, h is de hoogte in meters ten opzichte van het zeeniveau)

Op zeeniveau is de luchtdruk 1030 hectopascal.

Op 5 km hoogte is de luchtdruk 570 hectopascal.

Op welke hoogte is de luchtdruk 770 hectopascal?

Uitwerking:

$$\frac{dp}{dh} = c \cdot p$$

De oplossing is $p = a \cdot e^{c \cdot h}$.

Bereken a en c uit de gegevens.

Reken h in km.

$$a = p(0) = 1030,$$

$$p(5) = 570 \text{ dus } 570 = 1030 \cdot e^{c \cdot 5} \rightarrow$$

$$\rightarrow e^{c \cdot 5} = \frac{570}{1030} \rightarrow$$

$$\rightarrow c \cdot 5 = \ln \frac{570}{1030} \rightarrow$$

$$\rightarrow c = \frac{1}{5} \ln \frac{570}{1030} = -0,118 \rightarrow$$

$$\rightarrow 770 = 1030 \cdot e^{-0,118 \cdot h}, \text{ dus } h = \frac{-1}{0,0118} \ln \frac{570}{1030} = 2,465 \text{ km}.$$

Oefenen en uitgewerkte Oefenopgave.

Opgave 20:

Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = c \cdot y$, c is een constante.

a) Ga na dat de functie $y = a \cdot e^{cx}$, de oplossingsfuncties zijn van de differentiaalvergelijking voor elke waarde van a . Hierbij is a , eveneens een constante. De oplossing werd gevonden door substitutie.

Dit deel van de probleemstelling is in bovenstaande tekst van Blok 14 Les 1 behandeld.

b) We nemen $c = 1.5$.

Dit is een invuloefening.

Opgave 22 Radioactief afval

Radioactieve stoffen worden naarmate de tijd verstrijkt minder radioactief. Experimenteel is vastgesteld dat de snelheid waarmee de radioactiviteit afneemt (de vervalsnelheid) evenredig is met de hoeveelheid aanwezige radioactieve stof. Als y de hoeveelheid radioactieve stof (uitgedrukt in gram) is, geldt dus:

$$\frac{dy}{dx} = -c \cdot y, \text{ voor een positieve constante } c.$$

a) Verklaar het minteken in $\frac{dy}{dx} = -c \cdot y$.

y is positief. De radioactieve stof is aanwezig, maar wordt steeds minder: afname. Dus $\frac{dy}{dx} < 0$.

b) In de geneeskunde wordt vaak jodium-125 gebruikt. De halveringstijd van deze radioactieve stof is 60 dagen. Halveringstijd: De tijd waarin de hoeveelheid radioactieve stof tot de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid is afgenomen.

$$\text{Toon aan dat } c = \frac{\ln 2}{60}.$$

$$x \equiv t.$$

We hebben de differentiaalvergelijking: $\frac{dy}{dx} = -c \cdot y$, met de algemene oplossingsfunctie $y = a \cdot e^{-c \cdot t}$. De dimensie van t is dagen.

De halvering van y in 60 dagen: de hoeveelheid ten tijde van $t = 0$, gedeeld door de hoeveelheid ten tijde van $t = 60$: $\frac{y_{t=0}}{y_{t=60}} = 2 = \frac{a}{a \cdot e^{-c \cdot 60}} = e^{c \cdot 60} \therefore c \cdot 60 = \ln 2 \rightarrow c = \frac{\ln 2}{60}$.

c) Het verval van een andere radioactieve stof wordt beschreven door de differentiaalvergelijking:

$$\frac{dy}{dt} = -0.0035 \cdot y. \text{ Wat is de halveringstijd van deze stof?}$$

De oplossingsfunctie is:

$y = a \cdot e^{-0.0035 \cdot t}$, waarvan de halveringstijd bepaald moet worden. We noemen de hoeveelheid y na halvering: $y_{1/2}$. Dus:

$$\frac{y_{t=0}}{y_{1/2}} = 2 = \frac{a}{a \cdot e^{-0.0035 \cdot t}} = e^{0.0035 \cdot t} \therefore t = \frac{\ln 2}{0.0035} = 198 \text{ dagen.}$$

- Oefenen

Lezen: Bladzijde 18 en 19.

Blok 14 Les 2 Ongeremde groei(vervolg)

Deze les sluit aan bij de paragraaf 4 van Continue Dynamische Processen van de Wageningse Methode 2009

- Ongeremde groei

We hebben het continue model behandeld. Lees nog eens het deel van Blok 14 Les 1 tot en met het voorbeeld van de luchtdruk.

Je kunt ook een discreet model maken voor ongeremde groei.

- Discrete ongeremde groei

Gegeven de oneindige rij $y_1, y_2, y_3, \dots$

De differentievergelijking $\Delta y = y_{n+1} - y_n = c \cdot y_n$ beschrijft discrete ongeremde groei.

$$\rightarrow y_{n+1} = y_n + c \cdot y_n = (1 + c) \cdot y_n = (1 + c)^2 \cdot y_{n-1} = \dots = (1 + c)^n \cdot y_1$$

De oplossing is een meetkundige rij.

Voorbeeld:

Je zet € 1000 op je spaarrekening en krijgt jaarlijks 2,5% rente.

De rente wordt jaarlijks bijgeschreven.

Na 10 jaar staat er op je rekening:

$$(1 + 0,025)^9 \cdot € 1000 \approx € 1280.$$

Oefenen en uitgewerkte Oefenopgave.

Opgave 25:

Toon aan dat de functies $y = a \cdot e^{cx} + p$, voor elke waarde van a , oplossingen zijn van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = c(y - p)$. Gegeven: p en c zijn constanten.

Substitueer $y = a \cdot e^{cx} + p$, in $\frac{dy}{dx} = c(y - p) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = c \cdot a \cdot e^{cx}$.

Verder: $c(y - p) = c(a \cdot e^{cx} + p - p) = c \cdot a \cdot e^{cx}$,

$\therefore y = a \cdot e^{cx} + p$, zijn voor alle waarden van a , oplossingen van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = c(y - p)$.

Opgave 35 Antibiotica (Penicilline)

Ter bestrijding van een infectie begint een patiënt aan een penicillinekuur die bestaat uit het innemen van pillen. Iedere keer na het innemen van een pil stijgt de concentratie penicilline in het bloed met 350000 eenheden per milliliter. Aan het begin van de kuur zit er geen penicilline in het bloed van de patiënt. De penicilline wordt afgebroken met een snelheid die evenredig is met de concentratie:

$$\frac{dP}{dt} = -0.3 \cdot P.$$

Hierbij is t de tijd (in uren) en P de concentratie penicilline (in eenheden per milliliter). De concentratie penicilline mag niet onder de 100000 eenheden per milliliter komen.

Bereken hoeveel uur na het innemen van de eerste pil, de tweede, de derde en vierde pil moet worden ingenomen.

$$\frac{dP}{dt} = -0.3 \cdot P \Rightarrow P = a \cdot e^{-0.3 \cdot t}.$$

We nemen aan dat ten tijde $t = 0$, de eerste pil wordt ingenomen en de concentratie instantaan naar 350000 stijgt. Deze aanname lijkt logisch omdat er anders niets te berekenen valt.

Dus, $t = 0 \Rightarrow P(0) = 350000 \Rightarrow a = 350000 \Rightarrow P(t) = 350000 \cdot e^{-0.3 \cdot t}$.

De concentratie mag niet onder 100000 komen. Met dit gegeven kunnen we de tijd berekenen waarna de tweede pil moet worden ingenomen:

$$100000 = 350000 \cdot e^{-0.3 \cdot t} \rightarrow e^{0.3 \cdot t} = 3.5 \rightarrow t = \frac{\ln 3.5}{0.3} = 4.18 \cong 4 \text{ uur}.$$

Na 4 uur wordt de tweede pil ingenomen. De concentratie wordt instantaan 450000. Met dit gegeven kunnen we de tijd uitrekenen dat de derde pil moet worden ingenomen:

$$P(t) = 450000 \cdot e^{-0.3 \cdot t} \rightarrow t = \frac{\ln 4.5}{0.3} \cong 5 \text{ uur}.$$

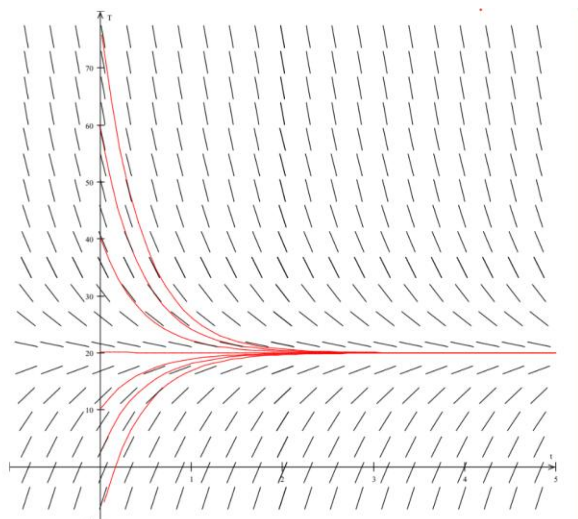
Nu weten we dat na 5 uur de concentratie weer 100000 is. Dus voor de inname van de volgende pillen ligt het tijdstip steeds om de 5 uren.

- Lezen: Bladzijde 18 en 19.
Oefenen: de opgaven

Blok 14 Les 3 Geremde groei

Deze les sluit aan bij de paragraaf 4 van Continue Dynamische Processen van de Wageningse Methode 2009

- Het afkoelen van een glas thee:
Volgens de afkoelingswet van Newton is de afkoeling van een kop thee in een tijdsinterval Δt evenredig met het verschil tussen de temperatuur van de thee, T en de kamer(omgevings)temperatuur (20°C) en Δt . c is de evenredigheidsconstante.
In formule: $\Delta T = c \cdot (T - 20) \cdot \Delta t$.
Dus ook: $\frac{\Delta T}{\Delta t} = c \cdot (T - 20)$.
Als Δt nadert tot 0, gaat de differentievergelijking over in de differentiaalvergelijking:
 $\frac{dT}{dt} = c \cdot (T - 20)$.
Met Winplot kun je het richtingsveld $\frac{dT}{dt} = -2 \cdot (T - 20)$ analyseren:



Als $T > 20$ dus $T - 20 > 0$ is $\frac{dT}{dt} < 0$, en daalt de temperatuur tot 20°C .

Als $T < 20$ dus $T - 20 < 0$ is $\frac{dT}{dt} > 0$, en stijgt de temperatuur tot 20°C .

Als $T = 20$ dus $T - 20 = 0$ is $\frac{dT}{dt} = 0$, en blijft de temperatuur 20°C .

De vergelijking $\frac{dT}{dt} = c \cdot (T - 20)$

Stelling:

$T(t) = a \cdot e^{-2t} + 20$ is een oplossing.

Bewijs:

We herschrijven de stelling:

$T(t) - 20 = a \cdot e^{-2t}$ is een oplossing.

De afgeleide naar de tijd van de temperatuur:

$$T'(t) \left(\equiv \frac{dT}{dt} \right) = -2 \cdot a \cdot e^{-2t} \text{ en } a \cdot e^{-2t} = T(t) - 20.$$

Dus: $-2 \cdot a \cdot e^{-2t} = -2 \cdot (T(t) - 20)$ en

$$-2 \cdot (T(t) - 20) = -2 \cdot a \cdot e^{-2T} = T'(t).$$

- Algemeen

Opgave 25, zie ook Oefenopgave Blok 14 Les 2:

Laat zien dat

$$y(x) = a \cdot e^{c \cdot x} + p$$

een oplossing is van de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = c \cdot (y - p)$$

voor elke waarde van a .

Uitwerking

$$y(x) = a \cdot e^{c \cdot x} + p$$

$$\rightarrow y' = a \cdot c \cdot e^{c \cdot x},$$

en

$$y - p = a \cdot e^{c \cdot x},$$

dus

$$c \cdot (y - p) = a \cdot c \cdot e^{c \cdot x} = y'.$$

We hebben aangetoond dat $y(x) = a \cdot e^{c \cdot x} + p$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = c \cdot (y - p)$.

Laat zien dat functies van de vorm $y(x) = a \cdot e^{c \cdot x} + p$ alle oplossingen zijn van de

differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = c \cdot (y - p)$ en dat de waarde van a wordt bepaald door de beginwaarde $y(0)$.

Aanwijzing:

Vervang de functie $y(x) - p$ door de hulpfunctie $g(x) = y(x) - p$ en laat zien dat g voldoet aan $\frac{dg}{dx} = c \cdot g$.

Bewijs:

Stel $f(x)$ is een oplossing van

$$\frac{dy}{dx} = c \cdot (y - p).$$

$$g(x) = f(x) - p.$$

$$\rightarrow g'(x) = f'(x) \left(\equiv \frac{dy}{dx} \right) = c \cdot (f(x) - p) = c \cdot g(x).$$

$$\rightarrow g(x) \text{ is een oplossing van } \frac{dy}{dx} = c \cdot y$$

dan is

$$g(x) = a \cdot e^{c \cdot x}.$$

En dus

$$f(x) = g(x) + p = a \cdot e^{c \cdot x} + p.$$

$$\rightarrow f(0) = a + p \text{ dus } a = f(0) - p.$$

- Een discreet model

Een kapitaal K groeit met 10% per jaar. In het begin van elk jaar wordt € 10.000 opgenomen.

Het beginkapitaal is € 100.000.

$$\Delta K = K_{n+1} - K_n = 0,1 \cdot K_n - 10.000$$

$$K_{n+1} = K_n + 0,1 \cdot K_n - 10.000 = 1,1 \cdot K_n - 10.000$$

$$K_{n+1} = K_n + 0,1 \cdot K_n - 10.000 = 1,1 \cdot (1,1 \cdot K_{n-1} - 10.000) - 10.000 =$$

$$= (1,1)^2 \cdot K_{n-1} - 2,1 \times 10.000 =$$

$$= (1,1)^3 \cdot K_{n-2} - 3,2 \times 10.000 =$$

$$= (1,1)^n \cdot K_1 - (1,1 \cdot n - 0,1) \times 10.000.$$

Oefenen en uitgewerkte Oefenopgave.

Opgave 24 Afkoeling van een ketel

Voor de temperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ geldt na t minuten afkoelen:

$$\frac{dT}{dt} = -0,2 \cdot T.$$

Veronderstel dat de begintemperatuur 80°C is.

a) Bepaal de temperatuur na 5 minuten afkoelen.

$$\frac{dT}{dt} = -0,2 \cdot T \Rightarrow T = a \cdot e^{-0,2 \cdot t}.$$

We weten dat voor $t = 0$, de begintemperatuur 80°C . Dus $T(0) = a \cdot e^0 = 80 \rightarrow a = 80$.

De temperatuur na 5 minuten: $T = 80 \cdot e^{-0,2 \cdot t} \rightarrow T(5) = 80 \cdot e^{-1} \rightarrow T(5) = 29,4$.

Bij een begintemperatuur van 60°C : $T = 60 \cdot e^{-0,2 \cdot t} \rightarrow T(5) = 60 \cdot e^{-1} \rightarrow T(5) = 22,07$.

b) Volgens de afkoelingswet van Newton is de snelheid waarmee de temperatuur T afneemt evenredig met het verschil met de omgevingstemperatuur. Dus als de omgevingstemperatuur 20°C is, is de differentiaalvergelijking

$$\frac{dT}{dt} = -0,2(T - 20).$$

We nemen de omgevingstemperatuur 20°C .

Veronderstel dat de begintemperatuur 100°C is.

Bepaal de temperatuur van de ketel na 5 minuten afkoelen.

De differentiaalvergelijking:

$$\frac{dT}{dt} = -0.2(T - 20) \rightarrow \frac{d(T-20)}{dt} = -0.2(T - 20) \rightarrow T - 20 = a \cdot e^{-0.2 \cdot t}.$$

We weten dat voor $t = 0$, de begintemperatuur 100°C . Dus $T(0) = a \cdot e^0 \rightarrow a = 80 \therefore T = 80 \cdot e^{-0.2 \cdot t} + 20$.

Dus $T(5) = 80 \cdot e^{-1} + 20 = 49.4^\circ\text{C}$,

Nu dat voor $t = 0$, de begintemperatuur $80^\circ\text{C} \therefore T = 60 \cdot e^{-0.2 \cdot t} + 20 \rightarrow T(5) = 60 \cdot e^{-1} + 20 = 42.1^\circ\text{C}$.

Nu dat voor $t = 0$, de begintemperatuur $60^\circ\text{C} \therefore T = 40 \cdot e^{-0.2 \cdot t} + 20 \rightarrow T(5) = 40 \cdot e^{-1} + 20 = 34.7^\circ\text{C}$.

c) Samengevat de oplossingsfuncties van:

$$-\frac{dT}{dt} = -0.2 \cdot T, \text{ met } T = 100 \text{ als } t = 0 : T = 100 \cdot e^{-0.2 \cdot t},$$

$$-\frac{dT}{dt} = -0.2(T - 20), \text{ met } T = 100 \text{ als } t = 0 : T = 80 \cdot e^{-0.2 \cdot t} + 20.$$

Opgave 26 Haringvangst

Internationaal is afgesproken hoeveel haring er jaarlijks gevangen mag worden: elk land heeft een zekere hoeveelheid(quotum) toegewezen gekregen. Dit is afgesproken om te voorkomen dat de Noordzee overbevist wordt en er na een paar jaar geen haring meer over is.

In 1988 zat er 700000 ton haring in de Noordzee.

$H(t)$ is de haringstand (in honderdduizende tonnen) in het jaar $1988 + t$. Als er geen haring zou worden gevangen is de groeisnelheid van H evenredig met H met evenredigheidsconstante 0.5. Het totale jaarlijkse quotum bedraagt q (in honderdduizende tonnen).

a) Leg uit dat geldt: $\frac{dH}{dt} = 0.5 \cdot H - q$.

H is de haringstand en q is het quorum dat gevangen mag worden. Met dat quorum verminderd de haringstand. Dus q moet van de groei worden afgetrokken.

b) Bepaal de functie H :

We herschrijven de differentiaal vergelijking $\frac{dH}{dt} = 0.5 \cdot H - q$, en maken gebruik van het feit dat q een constante is.

$$\frac{dH}{dt} = 0.5 \cdot (H - 2q) \Rightarrow \frac{d(H-2q)}{dt} = 0.5 \cdot (H - 2q) \Rightarrow \frac{d(H-2q)}{H-2q} = 0.5dt \Rightarrow H = ae^{0.5t} + 2q.$$

Ten tijde van $t = 0 \Rightarrow H = 7$ (honderd duizend ton): $7 = a + 2q \therefore$

$$H = (7 - 2q)e^{0.5t} + 2q.$$

c) Neem aan dat elk jaar het quotum q even groot is. Bij welke waarde van q zal de haring in de Noordzee uitsterven?

De haring zal uitsterven wanneer H afneemt. Dat gebeurt wanneer $(7 - 2q) < 0 \therefore q > 3.5$ (honderd duizend ton).

Opgave 41 Val met wrijving

Een kogeltje valt in een bak met één of andere vloeistof. De snelheid van het kogeltje, t seconden nadat het in de vloeistof is gekomen, is $v(t)$ m/s. De val van het kogeltje wordt versneld door de gravitatiekracht en vertraagd door de wrijvingskracht. We nemen aan dat de wrijvingskracht evenredig is met met de valsnelheid. Dit leidt tot de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{dv}{dt} = -f \cdot v + 10, \text{ waarbij } f \text{ een positieve evenredigheidsconstante is.}$$

Hierbij hebben we de valversnelling(gravitatie) op 10 m/s^2 afgerond. De wrijvingsconstante f is afhankelijk van de stroperigheid van de vloeistof(viscositeit). De opwaartse kracht is verwaarloosd.

a) Geef de algemene formule voor een oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking.

$$\frac{dv}{dt} = -f \cdot v + 10 \rightarrow \frac{dv}{dt} = -f \cdot \left(v - \frac{10}{f}\right) \rightarrow \frac{d}{dt} \left(v - \frac{10}{f}\right) = -f \cdot \left(v - \frac{10}{f}\right) \therefore v = a \cdot e^{-f \cdot t} + \frac{10}{f}.$$

b) De snelheid van het kogeltje wordt na enige tijd constant: 5 m/s.

Bereken hieruit f .

We nemen aan dat met na enige tijd wordt bedoeld: $t \rightarrow \infty$

$$\text{Dus: } v = a \cdot e^{-f \cdot t} + \frac{10}{f} \rightarrow v = a \cdot e^{-f \cdot \infty} + \frac{10}{f} \rightarrow v = 5 = \frac{10}{f} \therefore f = 2.$$

c) De snelheid waarmee het kogeltje in de vloeistof komt is 3 m/s. Geef de formule van de oplossingsfunctie.

$$v = a \cdot e^{-f \cdot t} + \frac{10}{f}.$$

Ten tijde van $t = 0$, is $v = 3 \text{ m/s} \rightarrow 3 = a \cdot e^0 + 5 \therefore a = -2 \rightarrow v = -2 \cdot e^{-2 \cdot t} + 5$.

d) De in de vloeistof afgelegde weg na t seconden noemen we $s(t)$.

Geef een formule van $s(t)$ en bereken hiermee hoe diep het kogeltje is gevallen na 20 seconden.

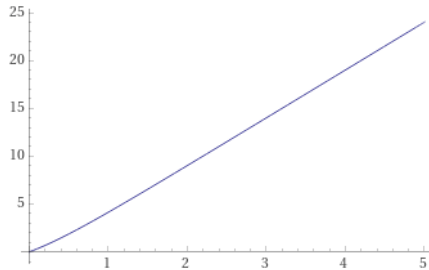
We hebben geleerd dat de afgelegde weg volgt uit integratie van de snelheid over een bepaald tijdsinterval:

$$s(t) = \int_0^t v dt' = \int_0^t (-2 \cdot e^{-2 \cdot t'} + 5) dt' = e^{-2 \cdot t'} \Big|_0^t + 5t' \Big|_0^t = e^{-2 \cdot t} - 1 + 5t.$$

Dus $s(t)$ na 20 seconden is $s(20) = e^{-2 \cdot 20} - 1 + 100 \approx 99$.

Dit resultaat maakt duidelijk dat de e-macht niet meer bijdraagt en de afgelegde weg benaderd kan worden met: $s(t) = 5t - 1$.

e) Teken de grafiek van $s(t) = e^{-2 \cdot t} - 1 + 5t$.



f) De snelheid van het kogeltje wordt op den duur nagenoeg constant.

De bovenstaande grafiek laat zien dat na $t > 2$, $s(t) = -1 + 5t$.

Substitueer $t = 2$ in $s(t) = e^{-2 \cdot t} - 1 + 5t \rightarrow s(2) = 9.018$.

g) De formule is onder d): $s(t) = 5t - 1$.

- Oefenen

Lezen: Bladzijde 20 en 21

Maken: Opgave 41

Blok 14 Les 4 Logistische groei, Logistical Growth

Deze les sluit aan bij de paragraaf 5 van Continue Dynamische Processen van de Wageningse Methode 2009

- Een gistkolonie

Opgave 28 Petrischaal §5



De groei van gist is een combinatie van exponentiele groei en geremde groei. Eerst groeit de kolonie exponentieel. Maar geleidelijk aan wordt de groei geremd doordat de beschikbare hoeveelheid voedsel opraakt.

Veronderstel dat de bovenstaande petrischaal 500 gram gistcellen kan bevatten.

Hoe ziet een model voor de groeisnelheid eruit?

- Enerzijds is de groeisnelheid van de hoeveelheid gistcellen evenredig met de al aanwezige hoeveelheid gistcellen.

- Anderzijds is de groeisnelheid van de hoeveelheid gistcellen evenredig met de ruimte(voedsel) op de

petrischaal die er nog is.

Stel $G(t)$ is het aantal gistcellen op tijdstip t .

Begin: ΔG is evenredig met G (ongeremde groei)

Later: ΔG is evenredig met $500 - G$ (geremde groei)

De bijbehorende differentievergelijking is:

$$\Delta G = c \cdot G \cdot (500 - G) \cdot \Delta t,$$

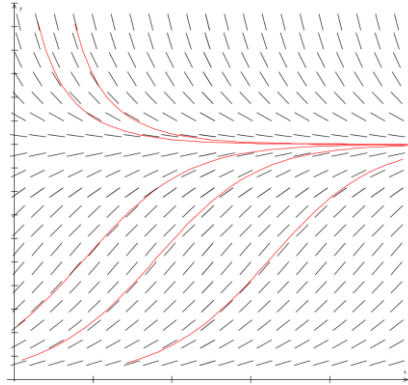
waarbij je mag aannemen dat de factor c uit proeven is gevonden. We stellen $c = 0.003$.

En de bijbehorende differentiaalvergelijking:

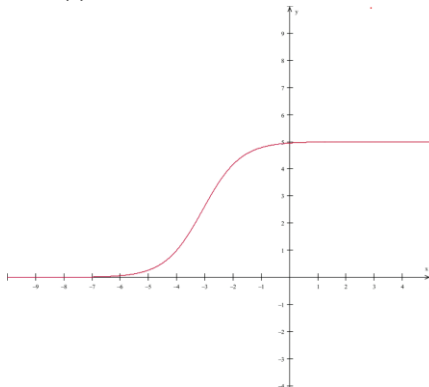
$$\frac{dG}{dt} = 0.003 \cdot G \cdot (500 - G).$$

Groei die door bovenstaande differentiaalvergelijking wordt beschreven, heet logistische groei.

Met Winplot kan het richtingsveld worden gevonden voor $\frac{dG}{dt}$:



en $G(t)$



De bovenstaande grafiek wordt S-kromme of sigmoïde genoemd.

a) Ga na dat de functie

$G(t) = \frac{500}{1+100 \cdot e^{-1.5t}}$, aan bovenstaande differentiaalvergelijking voldoet.

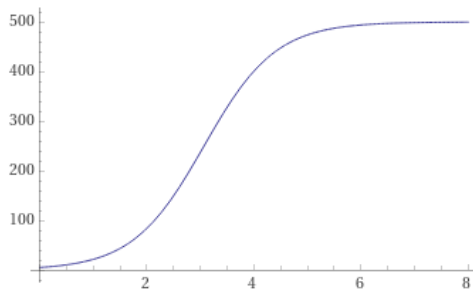
$$\rightarrow G'(t) = \frac{-500 \cdot 100 \cdot (-1.5) e^{-1.5t}}{(1+100 \cdot e^{-1.5t})^2} = \frac{(75000) e^{-1.5t}}{(1+100 \cdot e^{-1.5t})^2}$$

Substitueer deze uitdrukking voor de afgeleide $G'(t)$ en die voor $G(t)$ in bovenstaande differentiaalvergelijking:

$$\begin{aligned} 0.003 \cdot G \cdot (500 - G) &= 0.003 \cdot \frac{500}{1+100 \cdot e^{-1.5t}} \cdot \left(500 - \frac{500}{1+100 \cdot e^{-1.5t}} \right) = \\ &= \frac{1.5}{1+100 \cdot e^{-1.5t}} \cdot \left(\frac{500(1+100 \cdot e^{-1.5t})}{1+100 \cdot e^{-1.5t}} - \frac{500}{1+100 \cdot e^{-1.5t}} \right) = \\ &= \frac{1.5}{1+100 \cdot e^{-1.5t}} \cdot \left(\frac{500(100 \cdot e^{-1.5t})}{1+100 \cdot e^{-1.5t}} \right) = \frac{(75.000) e^{-1.5t}}{(1+100 \cdot e^{-1.5t})^2} = G'(t). \end{aligned}$$

b) Grafiek van $G(t)$

Met WolframAlpha of met de GR:



Het verzadigingsniveau 500 wordt hier zichtbaar.

c) Afleiding van het verzadigingsniveau uit de formule voor $G(t) = \frac{500}{1+100 \cdot e^{-1.5t}}$.

Het verzadigingsniveau wordt na enige tijd bereikt. Wiskundig weergegeven: $t \rightarrow \infty$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = \frac{500}{1+100 \cdot e^{-\infty}} = 500.$$

d) Logistische groei:

Een groeiproses y is logistisch met verzadigingswaarde M als de groeisnelheid evenredig is met $y \cdot (M - y)$.

Daarbij hoort de differentiaalvergelijking:

$$\frac{dy}{dt} = c \cdot y \cdot (M - y),$$

Waarbij de constante c proefondervindelijk wordt vastgesteld.

De oplossingsfuncties zijn:

$$y(t) = \frac{M}{1+b \cdot e^{-cMt}}$$

De waarde van b wordt bepaald door de startwaarde van $y(t)$.

Laat zien dat de functie $y(t) = \frac{M}{1+b \cdot e^{-cMt}}$ aan de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = c \cdot y \cdot (M - y)$ voldoet.

Onder a) is deze exercitie, dus met behulp van substitutie, uitgevoerd.

$$\text{Bepaal } \frac{dy}{dt} \text{ uit } y(t) = \frac{M}{1+b \cdot e^{-cMt}} \rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{b \cdot c \cdot M^2 \cdot e^{-cMt}}{(1+b \cdot e^{-cMt})^2}.$$

Nu $c \cdot y \cdot (M - y)$ uit de differentiaalvergelijking:

$$c \cdot y \cdot (M - y) = \frac{c \cdot M}{1+b \cdot e^{-cMt}} \cdot \frac{c \cdot b \cdot M \cdot e^{-cMt}}{1+b \cdot e^{-cMt}} = \frac{b \cdot c \cdot M^2 \cdot e^{-cMt}}{(1+b \cdot e^{-cMt})^2}.$$

e) Druk b uit in de startwaarde $y(0)$.

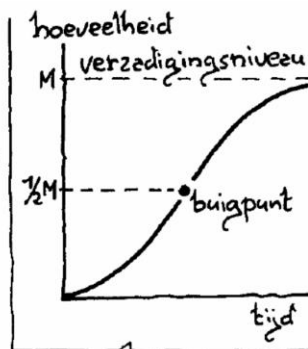
$$t = 0 \rightarrow y(0) = \frac{M}{1+b \cdot e^{-cM \cdot 0}} = \frac{M}{1+b} \therefore b = \frac{M}{y(0)} - 1.$$

• De grafiek

De grafiek van logistische groei is

een **S-curve**.

Je kunt deze S-vorm verklaren vanuit de vergelijking.



De differentiaalvergelijking: $\frac{dy}{dt} = c \cdot y \cdot (M - y)$, beschrijft het proces, weergegeven in bovenstaande grafiek.

Met toenemende tijd, dus van links naar rechts in de grafiek:

- De afgeleide $\frac{dy}{dt}$ begint met de waarde 0, want $y(0) = 0$.
- De stijging van de curve neemt toe.

- Vanaf het buigpunt, $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$ voor $y = \frac{M}{2}$, neemt de stijging van de curve weer af.
- De afgeleide nadert naar de waarde 0 bij het verzadigingsniveau $y = M$.

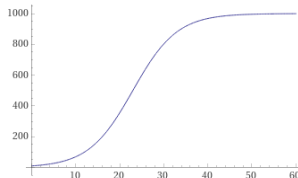
Opgave 29

$H = \frac{1000}{1+99 \cdot e^{-0.2 \cdot t}}$, is een voorbeeld van een logistische functie.

a) Wat moet je in de formule $H = \frac{M}{1+b \cdot e^{-c \cdot M \cdot t}}$ voor M , b en c invullen om de voorbeeld functie zoals gegeven te krijgen?

$M = 1000$, $b = 99$ en $c \cdot M = 0.2 \therefore c = 0.0002$.

b) De grafiek van de voorbeeldfunctie:



c) De differentiaal vergelijking van de voorbeeldfunctie

$$\frac{dH}{dt} = c \cdot H(M - H) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{dH}{dt} = 0.0002 \cdot H \cdot (1000 - H) = 0.0002 \cdot (1000H - H^2).$$

d) Voor welke waarde van H is $0.0002 \cdot (1000H - H^2)$ maximaal? Dus $\frac{dH}{dt} = 0$?

Onderzoek de kwadratische functie : $1000H - H^2$

Splits een kwadraat af:

$$1000H - H^2 = -(H^2 - 1000H + 500^2) + 500^2 = -(500 - H)^2 + 500^2.$$

dus

$$\frac{dH}{dt} = 0.0002[-(500 - H)^2 + 500^2].$$

Hieruit volgt dat $\frac{dH}{dt}$ is maximaal als $H = 500 (= \frac{1}{2}M)$, want $(500 - H)^2 = 0$.

e) Het buigpunt van de grafiek van H ligt op de hoogte $H = 500 (= \frac{1}{2}M)$.

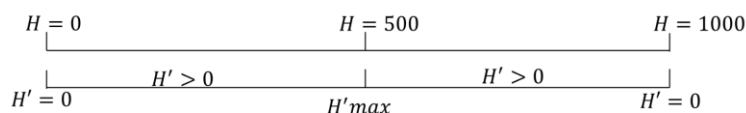
$\frac{dH}{dt}$ is maximaal, dat betekent dat de afgeleide van $\frac{dH}{dt} \rightarrow \frac{d^2H}{dt^2} = 0$, moet zijn: een buigpunt.

$$\frac{d^2H}{dt^2} = \frac{d}{dt}[0.0002 \cdot (1000H - H^2)] = 0.0002 \cdot (1000 - 2 \cdot H) \cdot \frac{dH}{dt} = 0 \rightarrow H = 500.$$

In woorden: in het buigpunt is de helling extreem.

H'_{max} is het buigpunt.

Tekenoverzicht:



Het buigpunt bij een logistische functie ligt half zo hoog als het verzadigingsniveau. Op pagina 173 hierboven is dit nog eens weergegeven.

f) Bereken de t -coördinaat van het buigpunt.

$$H = 500 \therefore 2 = 1 + 99e^{-0.2 \cdot t} \rightarrow t - 5 \ln 99 \rightarrow t = 22.98$$

g) Je kunt de differentiaalvergelijking waaraan H voldoet ook schrijven als

$$\frac{dH}{dt} = 0.2 \cdot H - 0.0002 \cdot H^2.$$

Aan het begin van het proces, $t \cong 0$, is H klein. Dan speelt de term $0.0002 \cdot H^2$ bijna geen rol $\rightarrow$

$$\rightarrow \frac{dH}{dt} \cong 0.2 \cdot H. \text{ De groei van } H \text{ gaat dan ongeveer exponentieel.}$$

Bepaal de groeifactor van de oplossingsfuncties van de differentiaalvergelijking

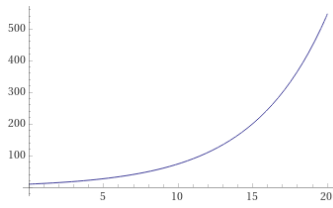
$$\frac{dy}{dt} = 0.2 \cdot y.$$

$$\frac{dy}{dt} = 0.2 \cdot y \rightarrow y = a \cdot e^{0.2 \cdot t} = a \cdot (e^{0.2})^t \rightarrow \text{groeifactor is } e^{0.2}$$

h) $H = \frac{1000}{1+99 \cdot e^{-0.2 \cdot t}} \rightarrow t = 0$ geeft $H = 10$.

Bekijk de exponentiele functie G met dezelfde beginhoeveelheid en met dezelfde groeifactor, dus

$$G = 10 \cdot e^{0.2 \cdot t}.$$



Vergelijken we bovenstaande groeicurve met de logistische curve met de zelfde groeifactor, dan zie je dat de curves aanvankelijk gelijk lopen.

Logistische groei bij de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dt} = c \cdot y \cdot (M - y)$$

is aanvankelijk nagenoeg exponentieel met groeifactor $e^{c \cdot M}$.

- **Alternatieve vorm**

De differentiaalvergelijking bij logistische groei wordt vaak geschreven in de gedaante:

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{M}\right)$$

Hierin is k een maat voor de groeisnelheid en M de verzadigingswaarde.

De oplossingsfuncties zijn dan:

$$y(t) = \frac{M}{1 + b \cdot e^{-kt}}.$$

Het voordeel van deze formules is dat je de gegevens rechtstreeks terug vindt in de oplossing.

- **Alle oplossingen**

Tot nu toe is aangetoond dat

$$y(t) = \frac{M}{1 + b \cdot e^{-kt}}$$

een oplossing is van

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{M}\right).$$

Nog niet is aangetoond dat dit alle oplossingen zijn.

Bewijs:

Stel een functie $f(t)$ is de oplossing van

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{M}\right) = k \cdot y - k \cdot \frac{y^2}{M}.$$

Dan geldt:

$$f'(t) = k \cdot f(t) - k \cdot \frac{(f(t))^2}{M}$$

Deel links en rechts van het gelijkteken door $-(f(t))^2$:

$$-\frac{f'(t)}{(f(t))^2} = -k \cdot \frac{1}{f(t)} + \frac{k}{M},$$

aan de linkerkant van deze vergelijking staat de afgeleide van $\frac{1}{f(t)}$.

Stel $g(t) = \frac{1}{f(t)}$, dan geldt: $g'(t) = -k \cdot g(t) + \frac{k}{M} = -k \cdot [g(t) - \frac{1}{M}]$.

$g'(t) = -k \cdot [g(t) - \frac{1}{M}]$: dit is de vergelijking van ongeremde groei.

De oplossing van deze differentiaalvergelijking is:

$$\rightarrow g(t) = b \cdot e^{-kt} + \frac{1}{M} = \frac{b \cdot M \cdot e^{-kt} + 1}{M}$$

$$\rightarrow f(t) = \frac{1}{g(t)} = \frac{M}{b \cdot M \cdot e^{-kt} + 1}.$$

- Een discreet gistmodel

De hoeveelheid gistcellen ΔA_{n+1} die er in een uur bijkomt is evenredig met:

- de hoeveelheid A_n in het vorige uur
- de ruimte $V - A_n$ die er nog is om te groeien.

In formulevorm:

$$\Delta A_{n+1} = c \cdot A_n \cdot (V - A_n)$$

c is de maat voor de groeisnelheid; de evenredigheidsconstante.

V is het verzadigingsniveau.

Anders geschreven:

$$\Delta A_{n+1} = A_{n+1} - A_n,$$

dus

$$A_{n+1} = \Delta A_{n+1} + A_n = A_n + c \cdot A_n \cdot (V - A_n) = (1 + c \cdot V) \cdot A_n - c \cdot (A_n)^2$$

Deze laatste vergelijking is een kwadratische vorm in A_n .

In dit geval is er geen directe formule voor A_n .

Voorbeeld:

de groei van een hoeveelheid gistcellen kun je beschrijven met de formule:

$$A_{n+1} = 1.5 \cdot A_n - 0.001 \cdot (A_n)^2.$$

De startwaarde is $A_1 = 10$.

Bereken c en V voor deze situatie.

Vergelijk

$$A_{n+1} = 1.5 \cdot A_n - 0.001 \cdot (A_n)^2 \text{ met } A_{n+1} = (1 + c \cdot V) \cdot A_n - c \cdot (A_n)^2$$

$$\rightarrow c = 0.001 \text{ en } c \cdot V = 0.5 \text{ dus } V = \frac{0.5}{0.001} = 500.$$

Met de GR kun je de grafiek tekenen voor deze situatie.

Oefenen en uitgewerkte Oefenopgave.

Opgave 30: De bevolkingsgroei in de USA.

In onderstaande tabel is de bevolkingsgroei van de USA, over een bepaalde periode, weergegeven.

jaar	Aantal inwoners (x 1000)	jaar	Aantal inwoners (x 1000)	jaar	Aantal inwoners (x 1000)
1790	3929	1850	23192	1910	91972
1800	5308	1860	31443	1920	105711
1810	7240	1870	38558	1930	122775
1820	9638	1880	50156	1940	131669
1830	12866	1890	62948	1950	150697
1840	17069	1900	75995	1960	179323

a) Met de Grafische Rekenmachine kun je deze gegeven weergeven in een grafiek:

Maak een lijst L_1 met daarin de jaartallen. Maak een lijst L_2 met daarin de aantallen inwoners. Met STAT PLOT teken je de grafiek.

In detail:

{1790,1800,1810,1820,1830,1840,1850,1860,1870,
1880, 1890,1900,1910,1920,1930,1940,1950, 1960}

STO→ L_1 , ENTER

{3929,5308,7240,9638,12866,17069,23192,31443,
38558,50156,62948,75995,91972,105711,122775,
131669,150697,179323}

STO→ L_2 , ENTER

STAT PLOT, 1: ENTER On, Type:stippengrafiek (linksbo-
ven), Xlist: L_1 Freq: L_2

Graph

b) De grafiek heeft een S-vorm. We proberen de bevolkingsgroei in de USA met een logistische groeifunctie

weer te benaderen: $B = \frac{M}{1+b \cdot e^{-c \cdot M \cdot t}}$, waarbij het aantal inwoners in duizendtallen is en de tijd in tientallen jaren vanaf 1790.

Aanvankelijk (tot 1840), is de groei van de bevolking nagenoeg exponentieel.

Bepaal de groeifactor per 10 jaar uitgaande van exponentiële groei van B , waarbij $B = 3929$ in 1790 en $B = 17069$ in 1840.

Exponentiële groei: $B = B_0 e^{a \cdot t} \rightarrow t = 0 \rightarrow 3929 = B_0 e^{a \cdot 0} \rightarrow B_0 = 3929$.

$t = 5 \rightarrow 17069 = 3929 e^{a \cdot 5} \rightarrow e^a = \left(\frac{17069}{3929}\right)^{1/5} \rightarrow e^a = 1.341$.

c) Wat is het verzadigingsniveau M ?

Uit de getekende grafiek volgt dat het buigpunt bij 1920 ligt.

We weten uit de theorie dat het buigpunt op de helft van het verzadigingsniveau M ligt.

Dus bij 1920: $B = 105711 \rightarrow \frac{M}{2} = 105711 \rightarrow M = 211422$.

d) Bepaal nu met behulp van b) en c) de waarde van c in $B = \frac{M}{1+b \cdot e^{-c \cdot M \cdot t}}$.

Bij b) hebben we de groeifactor berekend: $e^a = 1.341 \rightarrow e^{c \cdot M} = 1.341 \rightarrow c = \frac{\ln 1.341}{211422} = 0.0000014$.

e) Bereken nu ook b .

$t = 0$: met $B = \frac{M}{1+b \cdot e^{-c \cdot M \cdot t}} \rightarrow B(0) = \frac{M}{1+b} \rightarrow 3929 = \frac{211422}{1+b} \rightarrow b = 52.8$.

f) Vergelijk de logistische groeifunctie met de waarden uit de bovenstaande tabel.

$$B = \frac{211422}{1+52.8 \cdot e^{-0.293 \cdot t}}.$$

Een invuloefening.

Opmerking: Dat de werkelijkheid zich niet altijd volgens het voorgestelde model gedraagt is ook hier duidelijk: de USA hadden in 1999 ongeveer 265 miljoen inwoners.

Opgave 32:

Gegeven is de differentiaalvergelijking:

$$\frac{dy}{dx} = 0.3y \left(1 - \frac{1}{200}y\right).$$

Voor een oplossingsfunctie $f(x)$ van de differentiaalvergelijking geldt: $f(x = 10) = 80$.

Geef een formule voor f .

De algemene oplossing van $\frac{dy}{dx} = ky \left(1 - \frac{1}{M}y\right)$, is

$$y = \frac{M}{1+be^{-kx}}.$$

Dus, $M = 200$ en $k = 0.3$. Tevens geldt voor $x = 10 \Rightarrow y = 80$:

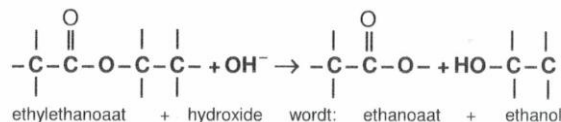
$$y = \frac{M}{1+be^{-kx}} \Rightarrow 80 = \frac{200}{1+be^{-0.3 \cdot 10}} \Rightarrow 1 + be^{-3} = \frac{5}{2} \Rightarrow b = \frac{3}{2}e^3 = 30.1.$$

De formule voor

$$f(x) = y = \frac{200}{1+30.1e^{-0.3x}}.$$

Opgave 33 Verzeeping

Een ester en een loog geven een zuurrest en een alcohol. Hieronder zie je een voorbeeld.



De concentraties (in mol per liter) van de ester en van het loog op tijdstip t noemen we respectievelijk $E(t)$ en $L(t)$. De reactiesnelheid (dat is de groeisnelheid van $E(t)$) is evenredig met de concentratie van de ester en van het loog. In formule:

$$\frac{dE}{dt} = -c \cdot E \cdot L, \text{ waarbij } c \text{ een positieve evenredigheidsconstante is.}$$

De beginconcentraties zijn gegeven:

$$E(0) = 0.005, \text{ en } L(0) = 0.01.$$

Op elk tijdstip is er evenveel van de ester als van het loog omgezet:

$$E(0) - E(t) = L(0) - L(t).$$

Bij een zekere temperatuur is $c = 0.06$ lieter per molsec.

Uit voorgaande gegevens valt het volgende beginwaardeprobleem af te leiden:

$$\frac{dE}{dt} = -0.06 \cdot E \cdot (0.005 + E), \text{ met startwaarde, zoals bovenstaand is gegeven, } E(0) = 0.005.$$

a) Leg dat uit.

$$\begin{aligned} \text{We weten: } L(t) &= -[E(0) - E(t)] + L(0) \rightarrow L(t) = L(0) - [E(0) - E(t)] \rightarrow \\ &\rightarrow L(t) = 0.01 - 0.005 + E(t) = 0.005 + E(t). \end{aligned}$$

$$\text{We weten: } \frac{dE}{dt} = -c \cdot E \cdot L = -0.06 \cdot E \cdot (0.005 + E).$$

b) Los het beginwaardeprobleem op, dus geef de formule voor $E(t)$.

We herschrijven $\frac{dE}{dt} = -0.06 \cdot E \cdot (0.005 + E)$, in de vorm van de logistische functie.

$$\frac{dE}{dt} = -0.0003 \cdot E \left(1 + \frac{E}{0.005}\right).$$

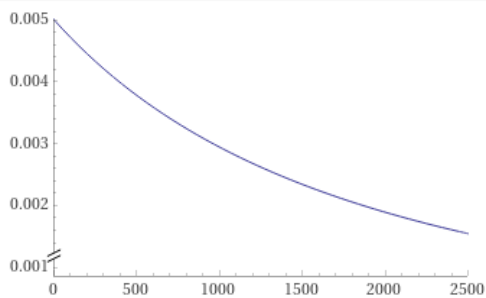
De algemene logistische functie $\frac{dy}{dx} = k \cdot y \left(1 - \frac{y}{M}\right) \rightarrow k = -0.0003$, en $M = -0.005$.

De formule voor $E(t)$:

$$E(t) = \frac{-0.005}{1 + b e^{0.0003 \cdot t}}.$$

$$\text{Met } E(0) = 0.005 = \frac{-0.005}{1+b} \rightarrow b = -2 \therefore E(t) = \frac{-0.005}{1 - 2 \cdot e^{0.0003 \cdot t}}.$$

c) De grafiek van de oplossingsfunctie:



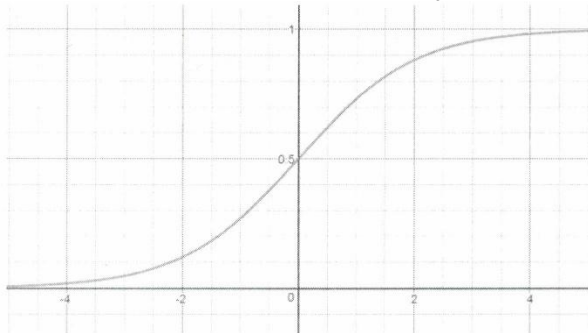
Bovenstaande grafiek lijkt niet op de logistische groeikromme: de constante M en b zijn niet positief.

d) Na hoeveel tijd is 50% van de ester omgezet?

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{-0.005}{1 - 2 \cdot e^{0.0003 \cdot t}} \rightarrow \frac{0.005}{2} = 0.0025 = \frac{-0.005}{1 - 2 \cdot e^{0.0003 \cdot t}} \rightarrow 2 \cdot e^{0.0003 \cdot t} = 1 + 2 = 3 \rightarrow 0.0003 \cdot t = \ln \frac{3}{2} \rightarrow \\ &\rightarrow t = 1352 \text{ sec. De halfwaarde tijd.} \end{aligned}$$

Overzichtsvraag 1

a) Teken de grafiek van de functie $y = \frac{1}{1+e^{-t}}$.



De grafiek heeft twee horizontale asymptoten:

$$- \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1+e^{-t}} = \frac{1}{1+0} = 1 \rightarrow \text{De asymptoot is } y = 1,$$

$$- \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^{-t}} = \frac{1}{1+\infty} = 0 \rightarrow \text{De asymptoot is } y = 0.$$

b) Controleer algebraïsch dat het gemiddelde van $y(t)$ en $y(-t)$, $\frac{1}{2}$ is.

$$\frac{y(t)+y(-t)}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+e^{-t}} + \frac{1}{1+e^t} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{1+e^t+1+e^{-t}}{(1+e^{-t})(1+e^t)} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{2+e^t+e^{-t}}{1+e^t+e^{-t}+1} \right] = \frac{1}{2}.$$

Dit betekent dat de functie punt symmetrisch is in $(0, \frac{1}{2})$.

c) Geef de differentiaalvergelijking behorende bij $y = \frac{1}{1+e^{-t}}$.

De bovenstaande functie vergelijken we met de algemene functie van de S-curve: $y(t) = \frac{M}{1+b \cdot e^{-kt}}$, en de

bijbehorende differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = k \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{M}\right)$.

Uit de vergelijking volgt: $M = 1$, $b = 1$, en $k = 1$.

De differentiaalvergelijking waarvan $y = \frac{1}{1+e^{-t}}$, een oplossing is: $\frac{dy}{dt} = y \cdot (1 - y)$.

Overzichtsvraag 2

Een logistische groeifunctie voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = 8y - 2y^2.$$

a) Wat is het verzadigingsniveau?

Om de vraag te beantwoorden maken we gebruik van de algemene differentiaalvergelijking voor logistische groei:

$$\frac{dy}{dx} = k \cdot y \left(1 - \frac{y}{M}\right).$$

In deze algemene differentiaalvergelijking is M het verzadigingsniveau.

Nu herschrijven we $\frac{dy}{dx} = 8y - 2y^2 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 8 \cdot y \left(1 - \frac{y}{4}\right) \therefore M = 4$.

b) Wat is de grootste groeisnelheid?

Uit de theorie weten we dat de grootste groeisnelheid wordt gevonden wanneer $\frac{dy}{dx}$ maximaal is.

$\frac{dy}{dx}$ is maximaal wanneer $8y - 2y^2$ maximaal is. $8y - 2y^2$ is een concave parabool. Definitie: een functie van één variabele heet concaaf op een interval, als het verbindingsstuk tussen ieder tweetal punten van de grafiek van de functie onder of op de grafiek van de functie ligt. Een dergelijke parabool wordt ook wel bergparabool genoemd. De functie is maximaal wanneer de afgeleide van $8y - 2y^2$ gelijk aan 0 is:

$$\frac{d}{dy}(8y - 2y^2) = 8 - 4y = 0 \therefore y = 2.$$

De grootste groeisnelheid $\frac{dy}{dx}$ is dan: $8y - 2y^2 \rightarrow 8 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 = 8$.

c) De enige oplossingsfuncties waar van de grafiek een horizontale raaklijn heeft, zijn twee functies.

Welke functies en hoe zie je dat aan de differentiaalvergelijking?

Als de oplossingsfuncties een horizontale raaklijn moeten hebben dan moet de afgeleide gelijk zijn aan 0, dus moet gelden $\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow 8y - 2y^2 = 0 \rightarrow y = 0$ en $y = 4$.

Blok 14 De Toets Logistical Growth

Opgave 1

Bij het afkoelingsproces van een kopje thee kun je het volgende model van de afkoelingswet van Newton gebruiken:

$$\frac{dT}{dt} = c(T - 21),$$

waarbij T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ is en t de tijd in minuten.

Hierbij zie je dat het verschil van de temperatuur T met de omgeving (21°C) bepaalt hoe snel de thee zal afkoelen. Daarbij is c een constante waarde. Je ziet hier een voorbeeld, waarbij de snelheid van afkoelen dus niet rechtstreeks van de tijd afhangt, maar van de temperatuur zelf.

Uit metingen is de volgende tabel ontstaan:

t	0	10	20	30	40	50
T	95	70	53	42	35	30
$\frac{dT}{dt}$	-3.1	-2.0				

Met de gegeven punten kun je de grafiek tekenen, zie volgende bladzijde.

Ook zijn in de grafiek raaklijnen getekend. Pas op voor schijnnaauwkeurigheid.

De raaklijn voor $t = 0$: Kies voor het tijdsinterval $\Delta t = 20$, dan is $\frac{\Delta T}{\Delta t} \cong -\frac{59}{20} \cong -3.0$,

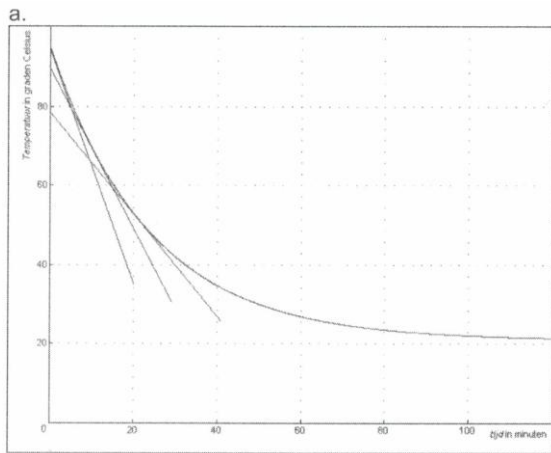
De raaklijn voor $t = 10$: $\frac{\Delta T}{\Delta t} \cong -\frac{40}{20} \cong -2.0$,

De raaklijn voor $t = 20$: $\frac{\Delta T}{\Delta t} \cong -\frac{26}{20} \cong -1.3$,

De raaklijn voor $t = 30$: $\frac{\Delta T}{\Delta t} \cong -\frac{17}{20} \cong -0.85$,

De raaklijn voor $t = 40$: $\frac{\Delta T}{\Delta t} \cong -\frac{11}{20} \cong -0.55$,

De raaklijn voor $t = 50$: $\frac{\Delta T}{\Delta t} \cong -\frac{9}{20} \cong -0.35$.



b) Bereken c .

Met de gegevens uit de tabel, $t = 10, T = 70$:

$$\frac{dT}{dt} = c(T - 21) \rightarrow \frac{dT}{dt} = c(70 - 21) \text{ en } \frac{dT}{dt} = -2.0 \rightarrow 49c = -2 \rightarrow c \sim -0.041.$$

Neem je $t = 0, T = 95 \rightarrow \frac{dT}{dt} = c(95 - 21)$ en $\frac{dT}{dt} = -3.0 \rightarrow 74c = -3 \rightarrow c \sim -0.042$.

Neem je $t = 40, T = 35 \rightarrow \frac{dT}{dt} = c(35 - 21)$ en $\frac{dT}{dt} = -0.55 \rightarrow 14c = -0.55 \rightarrow c \sim -0.039$.

Neem je $t = 50, T = 30 \rightarrow \frac{dT}{dt} = c(30 - 21)$ en $\frac{dT}{dt} = -0.35 \rightarrow 9c = -0.35 \rightarrow c \sim -0.039$.

Gelet op de mogelijke meetnauwkeurigheid lijkt dit een goede benadering van c .

Het model wordt: $\frac{dT}{dt} = -0.042(T - 21)$ met $T = 95$ op $t = 0$.

Dit noemen we een continue dynamisch model:

- Een gegeven formule waarbij de snelheid van de verandering van een grootte uitgedrukt is in die grootte $\rightarrow$ een differentiaalvergelijking.
- Beginwaarde.

Opgave 2

Een continu dynamisch model kun je ook gebruiken als je kijkt naar de groei van een populatie dieren.

Als P de populatieomvang is en t de tijd in een bepaalde tijdseenheid uitgedrukt, dan krijg je volgens het model van Malthus:

$$\frac{dP}{dt} = g \cdot P, \text{ met } P(0) \text{ op } t = 0.$$

Bij deze vorm van groei is de snelheid waarmee de populatieomvang verandert in de tijd dus evenredig met de omvang zelf. Je ziet dit terug bij de exponentiële groei en bij de meetkundige rij.

Neem voor $g = 0.35$, en voor $P(0) = 100$, dan kun je een formule maken voor P als functie van de tijd t .

Maak daarbij gebruik van de vorm $P = a \cdot e^{ct}$

$$P = a \cdot e^{ct} \text{ en } \frac{dP}{dt} = 0.35 \cdot P \text{ met } P(0) = 100.$$

$$P = a \cdot e^{ct} \rightarrow t = 0: P(0) = 100 = a \cdot e^0 \rightarrow a = 100 \rightarrow P(t) = 100 \cdot e^{c \cdot t} \rightarrow \frac{dP}{dt} = 100 \cdot c \cdot e^{c \cdot t} = 0.35 \cdot P \therefore c \cdot P = 0.35 \cdot P \rightarrow c = 0.35 \rightarrow P = 100 \cdot e^{0.35 \cdot t}.$$

Dit is echter geen realistisch model. Als $g > 0$ en $t \rightarrow \infty \therefore P \rightarrow \infty$, ongeacht de waarde van $P(0)$ die uiteraard groter dan 0 is. De omvang van de populatie is nooit negatief.

Opgave 3

Een realistischer model dan het model van opgave 2 is het logistische groeimodel. In dat model wordt verondersteld dat de populatie bij een bepaalde omvang G niet meer groeit. G heet de grenswaarde.

De differentiaalvergelijking wordt in dat geval:

$$\frac{dP}{dt} = k \cdot P(G - P).$$

Je kunt de factor $(G - P)$ zien als een factor die de groei meer afremt naarmate P dichterbij G komt. Neem G als grenswaarde en relateer je de waarde van P aan G , dan krijg je :

$$\frac{dP}{dt} = k \cdot P(G - P) \rightarrow \frac{dP}{dt} = k \cdot P \cdot G \left(1 - \frac{P}{G}\right) \rightarrow \frac{dP}{dt} = k \cdot G \cdot \frac{P}{G} \left(1 - \frac{P}{G}\right) = c \cdot \frac{P}{G} \left(1 - \frac{P}{G}\right).$$

Dus, $c = k \cdot G$ en met $\frac{P}{G} = N$ wordt de differentiaal vergelijking : $\frac{dN}{dt} = c \cdot N(1 - N)$, waarbij $N(0) = \frac{P(0)}{G}$.

Bij de differentiaalvergelijking $\frac{dN}{dt} = c \cdot N(1 - N)$, kun je proberen een formule te vinden (zie onderstaande toegift) als je c en $N(0)$ weet. Zo'n formule moet voldoen aan de differentiaalvergelijking.

Bij het logistisch groeimodel met de differentiaalvergelijking $\frac{dN}{dt} = c \cdot N(1 - N)$ hoort een oplossingsformule van de vorm:

$$N(t) = \frac{1}{1 + Ae^{-ct}}, \text{ en met } A = \frac{1 - N(0)}{N(0)}.$$

a) Controleer door te differentiëren van de formule voor $N(t) = \frac{1}{1 + Ae^{-ct}}$, dat dit inderdaad een oplossingsformule is.

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{1}{(1 + Ae^{-ct})^2} \cdot (-c \cdot Ae^{-ct}) = \frac{c \cdot Ae^{-ct}}{(1 + Ae^{-ct})^2},$$

$$c \cdot N(1 - N) = \frac{c}{1 + Ae^{-ct}} \left(1 - \frac{1}{1 + Ae^{-ct}}\right) = \frac{c \cdot Ae^{-ct}}{(1 + Ae^{-ct})^2}.$$

b) Laat zien dat $A = \frac{1 - N(0)}{N(0)}$.

$$\frac{dN}{dt}(t = 0) = c \cdot N(t = 0)[1 - N(t = 0)],$$

en

$$\frac{dN}{dt}(t = 0) = \frac{c \cdot Ae^{-c \cdot 0}}{(1 + Ae^{-c \cdot 0})^2} = \frac{c \cdot A}{(1 + A)^2}.$$

We weten ook $N(t) = \frac{1}{1 + Ae^{-ct}} \rightarrow N(t = 0) = \frac{1}{1 + A}$.

$$\text{Dus } \frac{dN}{dt}(t = 0) = \frac{c \cdot A}{(1 + A)^2} = c \cdot A \cdot [N(t = 0)]^2.$$

Nu hebben we $c \cdot A \cdot [N(t = 0)]^2 = c \cdot N(t = 0)[1 - N(t = 0)]$, met $N(t = 0) \equiv N(0)$,

$$A \cdot [N(0)]^2 = N(0)[1 - N(0)] \therefore A = \frac{1 - N(0)}{N(0)}.$$

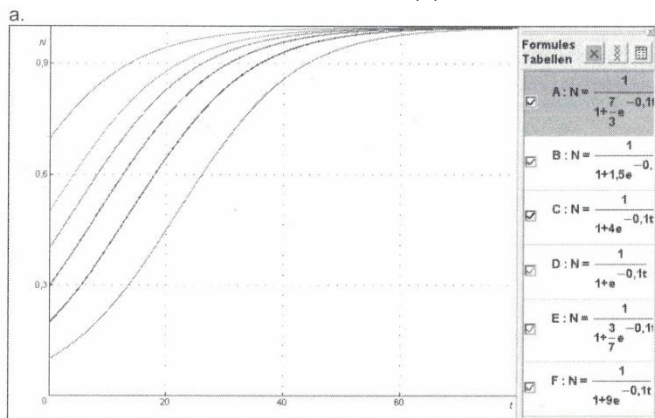
Opgave 4

Omdat de e-macht in $N(t) = \frac{1}{1 + Ae^{-ct}}$, steeds dichterbij 0 komt als t groter wordt, gaat N uiteindelijk naar 1, dus P naar G ($\frac{P}{G} = N$). Dit geldt voor elke waarde van $N(0)$ en c ($c > 0$).

Voor $c = 0.1$ en $N(0) = 0.3$ krijg je de volgende functie $N(t) = \frac{1}{1 + Ae^{-ct}}$ met $A = \frac{1 - N(0)}{N(0)} = \frac{7}{3}$ vinden we

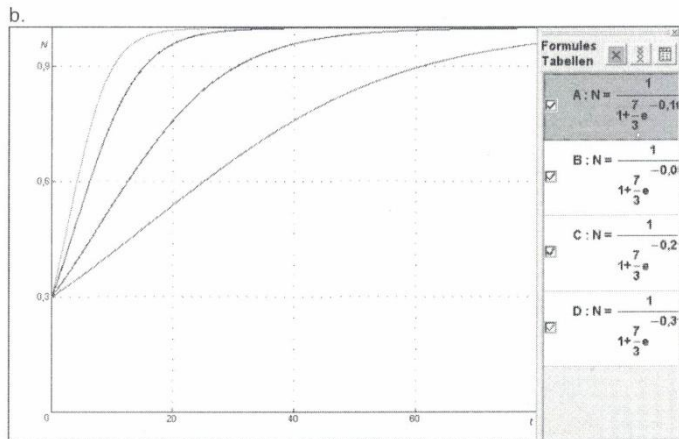
$$N(t) = \frac{1}{1 + Ae^{-ct}} = N(t) = \frac{1}{1 + \frac{7}{3}e^{-0.1t}}.$$

a) Teken met VU-grafiek de grafiek van deze functie. Je kunt ook Geogebra, Winplot of WolframAlpha gebruiken. Via klembord kun je de grafiek bewaren in een WORD-document. Teken in dezelfde figuur ook grafieken met andere beginwaarden $N(0)$.



b) Teken in een andere figuur ook de grafieken bij de waarden $c = 0.05$; $c = 0.1$; $c = 0.2$ en $c = 0.3$:

Bewaar ook dit plaatje.



Opgave 5

Het tekenen van een grafiek gaat gemakkelijker als je een oplossingsformule kunt vinden. Dat is in de praktijk niet altijd zo. Als meerdere factoren een rol spelen in het dynamische proces wordt de differentiaalvergelijking ingewikkelder en is het lastiger om daar een oplossingsformule voor te vinden. Voorbeeld: In het logistische model ga je ervan uit dat er ook bij een kleine populatieomvang sprake is van groei. Dat geldt voor vele soorten niet. Denk aan dieren die vrij geïsoleerd leven en op zoek gaan naar een partner. Als de populatie erg klein is, wordt de kans op succes erg klein. Als je aanneemt dat de groei pas plaats kan vinden vanaf een zekere drempelwaarde d dan wordt de differentiaalvergelijking:

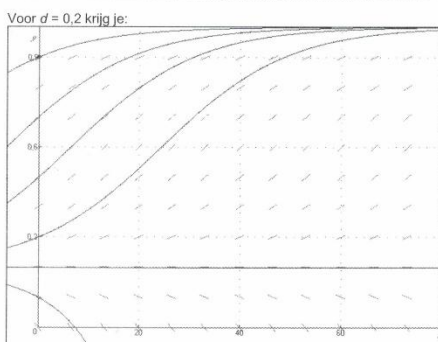
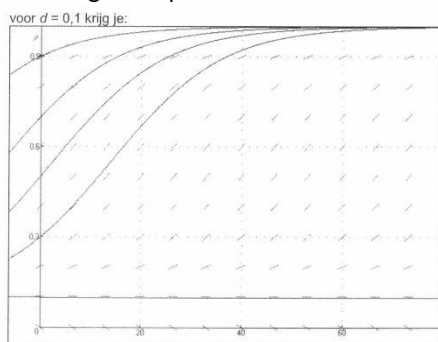
$$\frac{dN}{dt} = c \cdot (N - d)(1 - N).$$

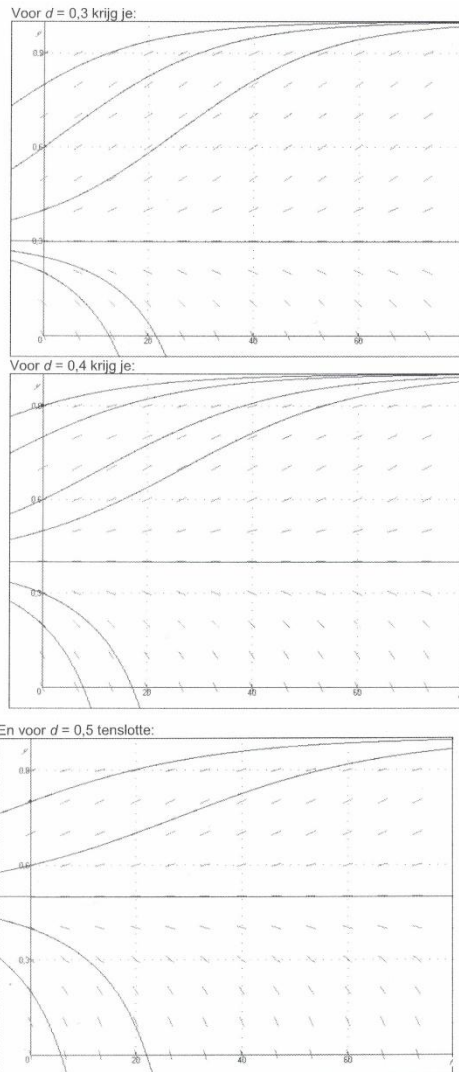
(Nota Bene: in de toegift is een methode gepresenteerd waarmee ook deze differentiaalvergelijking kan worden opgelost).

Neem $c = 0.1$ en teken met het programma VU-grafiek plus. Voor verschillende waarden van d in het interval $<0;0.5>$, het lijnelementen veld en een aantal oplossingskrommen door verschillende waarden van $N(0)$ te nemen. Zie korte handleiding na de toegift.

Je kunt de differentiaalvergelijking ook tekenen met de WolframAlpha-app. Deze app kost een paar euro.

Met VU-grafiek plus:





De verschillen met het logistisch model, de verschillen tussen $\frac{dN}{dt} = c \cdot (N - d)(1 - N)$ en $\frac{dN}{dt} = c \cdot N(1 - N)$:

- Als je $N(0)$ gelijk aan d kiest, dan blijft N constant,
- Als je $N(0) < d$ kiest, sterft de populatie uit,
- Voor $N(0) > d$ lijkt het model op het logistisch model en groeit naar 1 toe.

Opgave 6

Het lijnenveld dat je bij bovenstaande VU-grafiek plus ziet, kun je ook gebruiken om te zien hoe je zelf een voorspelling van een waarde van N kunt doen zonder daarbij de oplossingsformule te hebben.

Veronderstel dat je in het punt $(0;0.3)$ start, dus het punt $N(0) = 0.3$. Bij de differentiaalvergelijking kiezen we voor $c = 0.1$ en $d = 0.2$:

$$\frac{dN}{dt} = 0.1 \cdot (N - 0.2)(1 - N).$$

Als je nu wilt weten wat de waarde van N is op $t = 0.2$, dan kun je dat als volgt doen.

Je trekt een lijntje langs het lijnelement, raaklijntje, in het punt $(0;0.3)$ en stopt bij $t = 0.2$.

De waarde $N(0.2)$ bereken je als volgt:

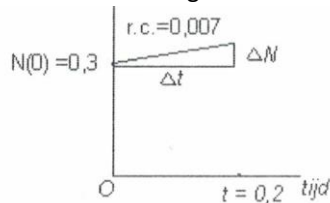
$$N(0.2) = 0.3 + r \cdot c_{\text{raaklijntje}} \cdot 0.2, \text{ immers voor dat raaklijntje geldt: } \frac{\Delta N}{\Delta t} = r \cdot c_{\text{raaklijntje}} \therefore$$

$$\therefore \Delta N = r \cdot c_{\text{raaklijntje}} \cdot \Delta t. \text{ Voor } \Delta t = 0.2.$$

$$\begin{aligned} \text{Voor } t = 0 \text{ en } N = 0.3 \text{ hebben we } r \cdot c_{\text{raaklijntje}} &= \left(\frac{dN}{dt}\right)_{t=0} = 0.1 \cdot (N - 0.2)(1 - N) = \\ &= 0.1 \cdot (0.3 - 0.2)(1 - 0.3) = 0.007. \end{aligned}$$

$$\text{Dus } N(0.2) = 0.3 + 0.007 \cdot 0.2 = 0.3014.$$

In onderstaande figuur is bovenstaande werkwijze nog eens weergegeven:



Uitgaande van $N(0.2) = 0.3014$ kun je nu weer de waarde van N voort = 0.4 berekenen.

a) Met de Grafische rekenmachine kan dit op een directe wijze:

Voer 0.3 in en dan <enter> .

Vervolgens: $\text{Ans} + 0.1(\text{Ans} - 0.2)(1 - \text{Ans}) \cdot 2$ <enter>. (Ans is de waarde voor N).

Het resultaat: 0.3014.

Als je nu weer <enter> intoetst krijg je de waarde van N voor $t = 0.4$, enz.

Door $\Delta t = 0.01$ te kiezen wordt het resultaat nauwkeuriger.

Nadeel: als je dan de waarde van N voor bijvoorbeeld $t = 1$ wilt weten, moet je wel 100 keer <enter> intoetsen.

Als je een nauwkeuriger resultaat wilt, gebruik je de rijen methode van je GR.

Neem $\Delta t = 0.01$

$n_{\min} = 0$

$u_n = u(n-1) + (0.1(u(n-1) - 0.2)(1 - u(n-1))) \cdot 0.01$

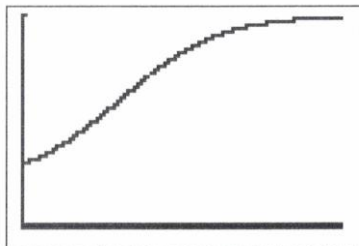
$u_{n\min} = 0.3$.

Om de waarde van N voor $t = 1$ te bepalen kun je naar $u(100)$ kijken in het gewone scherm.

Het resultaat: $N(t = 1) \approx 0.30721$.

b) Zet op de GR bij FORMAT de timegrafiek aan; kies n van 0 tot 8000 en y van 0 tot 1 en laat de GR nu de grafiek tekenen die past bij de differentiaalvergelijking $\frac{dN}{dt} = 0.1 \cdot (N - 0.2)(1 - N)$.

Met de USB kabel va de GR is deze grafiek in het WORD document in te voeren.



Dit kostte veel tijd met de GR.

Opgave 7

Zoeken naar evenwicht.

Meestal ben je geïnteresseerd wat je na lange tijd vindt met het model. Gaan de variabelen naar vaste waarden? Als dat het geval is dan is er een evenwichtoplossing. Met behulp van numerieke berekeningen wordt dit gedrag van het model duidelijk.

Met het model kun je ook de evenwichtswaarden uit de vergelijkingen vinden.

1^e manier

Het logistisch groeimodel $\frac{dN}{dt} = c \cdot N \cdot (1 - N)$.

Dit kun je ook schrijven als:

$$N(t + \Delta t) = N(t) + c \cdot N(t) \cdot [1 - N(t)] \cdot \Delta t.$$

Als er sprake is van een evenwichtstoestand dan zal $N(t + \Delta t) = N(t) = N_e$ ∴

$$\therefore N_e = N_e + c \cdot N_e (1 - N_e) \cdot \Delta t \rightarrow c \cdot N_e (1 - N_e) \cdot \Delta t = 0 \rightarrow N_e = 0 \text{ en } N_e = 1.$$

Met $c \neq 0$ en $\Delta t \neq 0$.

Dit is niet echt verrassend

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = c \cdot N(t) \cdot [1 - N(t)] = 0 \rightarrow \frac{dN}{dt} = 0 \rightarrow c \cdot N \cdot (1 - N) \rightarrow N_e = 0 \text{ en } N_e = 1.$$

Nota Bene: we weten dat $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{dN}{dt}$.

2^e manier

Als je de oplossingsfunctie hebt, kun je nagaan hoe de functie zich gedraagt voor grote waarden van t :

$$N(t) = \frac{1}{1+A \cdot e^{-ct}} \text{ gaat naar } 1 \text{ voor } t \rightarrow \infty, \text{ met } c > 0.$$

Maar er zijn voorbeelden waar deze oplossingsfunctie niet eenvoudig te vinden is:

$$\frac{dN}{dt} = c \cdot (N - 0.1)(1 - N) - k \cdot N, \text{ met } c > 0, \text{ en } 0 < k < 1.$$

In bovenstaande differentiaalvergelijking is $k \cdot N$ het deel van de populatie dat wordt gevangen.

Er is ook sprake van afname als $N < 0.1$, omdat er onvoldoende aanwas is onder de grens $N < 0.1$. Ook is er geen groei bij $N = 1$.

De evenwichtsoplossing vind je weer door $N = 0$. Je krijgt dan een kwadratische vergelijking:

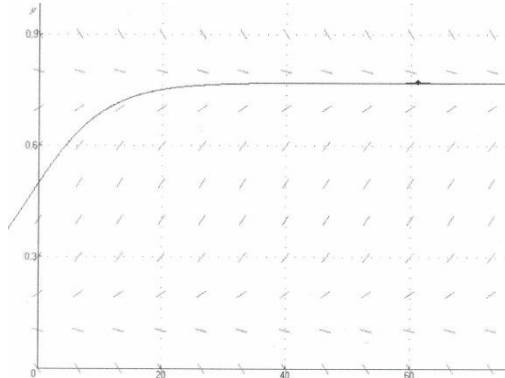
$$c \cdot (N_e - 0.1)(1 - N_e) - k \cdot N_e = 0, \text{ met twee waarden voor } N_e \text{ (door gebruik te maken van de abc-formule). Als } c = 0.25 \text{ en } k = 0.02 \rightarrow N_e = 0.11 \text{ en } N_e = 0.91.$$

Met Winplot vind je het "Slope Field". Dan zie je voor kleine startwaarden van $N(0) < 0.11$ dat de populatie uitsterft. Als $N(0) \approx 0.11$, dan blijft de populatie constant en voor $N(0) > 0.11$ groeit de populatie naar ongeveer 0.91.

Overigens is de differentiaalvergelijking weer een "separable equation". Maar deze separable equation vraagt wat meer werk. (zie de toegift).

De predator- prey relatie kan aanleiding zijn tot een verstoring van een evenwicht. Dat evenwicht kan daardoor lager komen te liggen. Bijvoorbeeld overmatige visvangst kan aanleiding zijn tot uitsterven van een populatie. Daarom worden er bij onderhandelingen over de hoeveelheid te vangen vis afspraken gemaakt. Het model $\frac{dN}{dt} = c \cdot (N - 0.1)(1 - N) - k \cdot N$ kan daarbij een rol spelen.

a) Stel je voor dat dit model gebruikt wordt om de hoeveelheid Tonijn in een bepaald gebied te beschrijven. De groeifactor $c = 0.25$. Verder is bekend dat er momenteel 0.5 eenheden Tonijn zijn. Schets de oplossingskromme voor voor $k = 0.05$ in het bijbehorende lijnelement veld (Slope Field) met het programma VU-grafiek plus.



b)

Bereken algebraïsch het evenwicht voor $k = 0.05$.

$$\frac{dN}{dt} = 0.25 \cdot (N - 0.1)(1 - N) - 0.05 \cdot N.$$

$$\text{Bij evenwicht is } \frac{dN}{dt} = 0 \rightarrow 0.25 \cdot (N - 0.1)(1 - N) - 0.05 \cdot N = 0 \rightarrow N^2 - 0.9N + 0.1 = 0 \rightarrow$$

$N = 0.45 \pm \sqrt{0.1025} = 0.45 \pm 0.32 \therefore N = 0.77 \text{ of } N = 0.13$. Bij deze laatste waarde van N vind je geen horizontaal lijnelement. Dus de laatste waarde is niet stabiel.

c) Voor welke waarde van k sterft de populatie uit?

$$\text{We hebben de vergelijking: } 0.25 \cdot (N - 0.1)(1 - N) - 0. \cdot k \cdot N = 0 \rightarrow N^2 - (1.1 - 4k)N + 0.1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow N = \frac{1}{2}(1.1 - 4k) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1.1 - 4k)^2 - 0.4}.$$

$$\text{Voor zinvolle oplossingen moet } (1.1 - 4k)^2 - 0.4 > 0 \text{ zijn } \therefore (1.1 - 4k)^2 > 0.4 \rightarrow 1.1 - 4k > \sqrt{0.4} \rightarrow$$

$$\rightarrow k < 0.16.$$

d) Als k niet al te groot is dan zijn er twee evenwichten: zie onder c)

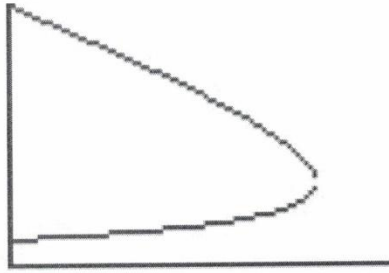
$$y_1 \equiv N_e = \frac{1}{2}(1.1 - 4k) + \frac{1}{2}\sqrt{(1.1 - 4k)^2 - 0.4} \text{ en } y_2 \equiv N_e = \frac{1}{2}(1.1 - 4k) - \frac{1}{2}\sqrt{(1.1 - 4k)^2 - 0.4}.$$

Teken nu met een grafiekprogramma de evenwichten in de grafiek. Zet k uit op de x-as.

Neem $k_{max} = 0.15$.

We voeren y_1 en y_2 in we nemen $0 \leq k \leq 0.15$ en vervolgens ZoomFit.

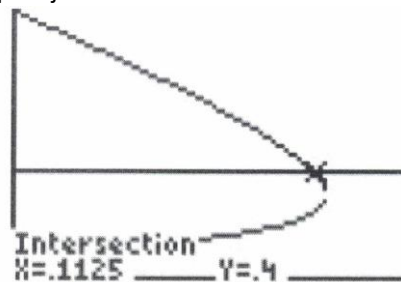
Dit geeft met $y_{min} = 0$ het volgende plaatje:



e) We gebruiken bovenstaande grafiek.

Bij onderhandelingen tussen de vissersorganisatie en de overheid wordt afgesproken dat de populatie Tonijn niet onder de 0.4 mag komen. Hoe groot mag k maximaal zijn?

Snijden we bovenstaande grafiek met de lijn $y_3 = 0.4$ dan krijg je na intersectie van y_1 en y_3 het volgende plaatje:



En mag k dus maximaal 0.1125 zijn, dus er mag 11.25% maximaal gevangen worden.

Nota Bene: we kunnen k ook uitrekenen.

$$N_e = 0.4 \text{ en } N_e = \frac{1}{2}(1.1 - 4k) + \frac{1}{2}\sqrt{(1.1 - 4k)^2 - 0.4} \rightarrow 0.8 = \frac{1}{2}(1.1 - 4k) + \frac{1}{2}\sqrt{(1.1 - 4k)^2 - 0.4}.$$

Dus $4k - 0.3 = \sqrt{(1.1 - 4k)^2 - 0.4}$. Hier zie je dat $4k - 0.3 = -\sqrt{(1.1 - 4k)^2 - 0.4}$ tot hetzelfde resultaat leidt.

$$\text{Kwadrateren } (4k - 0.3)^2 = (1.1 - 4k)^2 - 0.4 \therefore k = 0.1125.$$

f) Uit onderzoek blijkt dat tonijnen in één grote school leven. Dat betekent volgens de vissers dat er gemakkelijk voortplanting plaatsvindt en dat de factor 0.1 in $N - 0.1$ overbodig is.

Stel dat de vissers gelijkhebben, hoeveel vissen mogen ze dan per tijdseenheid vangen?

We hebben dan de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{dN}{dt} = 0.25 \cdot N(1 - N) - k \cdot N \rightarrow 0.25 \cdot N(1 - N) - k \cdot N = 0 \rightarrow N^2 - (1 - 4k)N = 0 \therefore$$

$$\therefore N = 0 \vee N = 1 - 4k.$$

Aangezien $N > 0.4$ moet zijn, wordt $4k < 0.6 \rightarrow k = 0.15$.

Er mag maximaal 15% gevangen worden.

g) Ook met het laatste resultaat is de vissersorganisatie niet tevreden en daarom beweren ze dat tonijnen voldoende leefruimte hebben en dus niet logistisch maar volgens het groeimodel van Malthus groeien.

Bepaal het percentage dat gevangen mag worden.

$$\text{De differentiaalvergelijking } \frac{dN}{dt} = 0.25 \cdot N - k \cdot N \rightarrow 0.25 \cdot N - k \cdot N = 0 \rightarrow k = 0.25. \text{ } k \text{ mag maximaal}$$

0.25 zijn anders neemt N sowieso af. Dus $k < 0.25$ en er mag maximaal 25% gevangen worden.

• Oefenen

Lezen: Bladzijde 23 tot en met 28

Toegift Oplossing Logistische Differentiaalvergelijkingen

- De differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = c \cdot y \cdot (M - y)$, is behandeld en de oplossingsfunctie is gegeven.

Kun je deze differentiaalvergelijking ook de oplossingsfunctie bepalen met de reeds beschikbare kennis?

Laten we dit eens uitzoeken.

Je hebt in ieder geval geleerd hoe de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{y}$ op te lossen. Daar gaan we gebruik van maken.

$$\frac{dy}{dt} = c \cdot y \cdot (M - y) \rightarrow \frac{\frac{dy}{dt}}{c \cdot y \cdot (M - y)} = 1.$$

Kunnen we bovenstaande vergelijking in de vorm $\frac{dy}{y}$ brengen?

Dat kan als je

$\frac{1}{c \cdot y \cdot (M - y)}$ in de vorm $\frac{A}{c \cdot y} + \frac{B}{M - y}$ kan brengen (a separable equation) en A en B constanten zijn.

Dus

$$\frac{1}{c \cdot y \cdot (M - y)} \equiv \frac{A}{c \cdot y} + \frac{B}{M - y} \rightarrow 1 \equiv A(M - y) + B \cdot c \cdot y = A \cdot M - y \cdot (A - B \cdot c).$$

$$\text{Dus } A \cdot M - y \cdot (A - B \cdot c) \equiv 1.$$

In het rechterlid van bovenstaande identiteit staat een constante gelijk aan 1 en geen $y \therefore A \cdot M = 1$ en $A - B \cdot c = 0$.

$$A = \frac{1}{M} \text{ en } B = \frac{A}{c} = \frac{1}{c \cdot M}.$$

De differentiaalvergelijking hebben we nu in de volgende vorm gebracht:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{dy}{dt}}{c \cdot y \cdot (M - y)} = 1 &\rightarrow \frac{\frac{dy}{dt}}{c \cdot M \cdot y} + \frac{\frac{dy}{dt}}{c \cdot M \cdot (M - y)} = 1 \rightarrow \frac{dy}{y} + \frac{dy}{M - y} = c \cdot M \cdot dt \rightarrow \\ \rightarrow \frac{dy}{y} - \frac{d(M - y)}{M - y} &= c \cdot M \cdot dt \rightarrow \ln y - \ln(M - y) = c \cdot M \cdot t + \text{const} \rightarrow \\ \rightarrow \ln \frac{y}{M - y} &= c \cdot M \cdot t + \text{constante} \rightarrow \frac{y}{M - y} = d \cdot e^{c \cdot M \cdot t}, \text{ waarbij } d = e^{\text{const}}. \\ \frac{y}{M - y} &= d \cdot e^{c \cdot M \cdot t} \rightarrow y = d \cdot M \cdot e^{c \cdot M \cdot t} - y \cdot d \cdot e^{c \cdot M \cdot t} \rightarrow \\ \rightarrow y(1 + d \cdot e^{c \cdot M \cdot t}) &= d \cdot M \cdot e^{c \cdot M \cdot t} \rightarrow y = d \cdot M \frac{e^{c \cdot M \cdot t}}{1 + d \cdot e^{c \cdot M \cdot t}} \rightarrow \\ \rightarrow y &= d \cdot M \frac{1}{e^{-c \cdot M \cdot t} + d} = \frac{M}{1 + \frac{1}{d} e^{-c \cdot M \cdot t}} = \frac{M}{1 + b \cdot e^{-c \cdot M \cdot t}}, \end{aligned}$$

waarbij $b = \frac{1}{d}$.

- We zoeken nu de oplossing van

$$\frac{dN}{dt} = c \cdot (N - 0.1)(1 - N) - k \cdot N.$$

Het lijkt erop dat we deze differentiaalvergelijking in de vorm van

$$\frac{dy}{dt} = c \cdot y \cdot (M - y),$$

kunnen brengen.

$$\frac{\frac{dN}{dt}}{c \cdot (N - d)(1 - N) - k \cdot N} = 1 \rightarrow \frac{dN}{[N - (C + D)][N - (C - D)]} = -c \cdot dt,$$

waarbij

$$C = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + d - \frac{k}{c}\right), \text{ en } D = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(1 + d - \frac{k}{c}\right)^2 - 4d}.$$

Note:

Bovenstaand resultaat hebben we gevonden door kwadraat afsplitsing:

$$\begin{aligned} c \cdot (N - d)(1 - N) - k \cdot N &= -c[N^2 - N\left(1 + d - \frac{k}{c}\right) + d] \rightarrow \\ \rightarrow -c[N^2 - N\left(1 + d - \frac{k}{c}\right) + \frac{1}{4}\left(1 + d - \frac{k}{c}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(1 + d - \frac{k}{c}\right)^2 + d] \rightarrow \\ \rightarrow -c\left[\left\{N - \frac{1}{2}\left(1 + d - \frac{k}{c}\right)\right\}^2 - \frac{1}{4}\left\{\left(1 + d - \frac{k}{c}\right)^2 - 4d\right\}\right]. \end{aligned}$$

Maak gebruik van(algemeen): $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

$$\begin{aligned} -c\left[\left\{N - \frac{1}{2}\left(1 + d - \frac{k}{c}\right)\right\}^2 - \frac{1}{4}\left\{\left(1 + d - \frac{k}{c}\right)^2 - 4d\right\}\right] &= \\ = -c\left\{N - \frac{1}{2}\left(1 + d - \frac{k}{c}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(1 + d - \frac{k}{c}\right)^2 - 4d}\right\} \cdot \left\{N - \frac{1}{2}\left(1 + d - \frac{k}{c}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{\left(1 + d - \frac{k}{c}\right)^2 - 4d}\right\}. \end{aligned}$$

Voor het gemak maken we nog gebruik van de volgende substitutie:

$$C + D = -E, \text{ en } C - D = -F.$$

Dus

$$\frac{dN}{[N+E][N+F]} = -c \cdot dt.$$

Zoals je ziet kunnen we nu weer scheiding van variabelen toepassen.

$$\frac{dN}{[N+E][N+F]} \equiv \frac{G}{N+E} + \frac{L}{N+F} \rightarrow 1 \equiv G(N+F) + L(N+E) \therefore$$

$$-GF + LE = 1,$$

$$-GN + LN = 0 \rightarrow G = -L.$$

Met $GF + LE = 1$ en $G = -L$

$$-LF + LE = 1 \rightarrow L = \frac{1}{E-F}, \text{ en } G = \frac{1}{F-E}.$$

We hebben dan

$$\frac{1}{[N+E][N+F]} \equiv \frac{1}{F-E} \frac{1}{N+E} + \frac{1}{E-F} \frac{1}{N+F}.$$

We hebben, met C en D ,

$$F - E = (D - C) + C + D = 2D,$$

$$E - F = -(C + D) + C - D = -2D.$$

Belangrijk tussenresultaat:

$$\frac{dN}{[N+E][N+F]} \equiv \frac{1}{F-E} \frac{dN}{N+E} + \frac{1}{E-F} \frac{dN}{N+F} = \frac{1}{2D} \frac{dN}{N+E} - \frac{1}{2D} \frac{dN}{N+F} = -c \cdot dt.$$

We zijn weer op bekend terrein:

$$\frac{dN}{N+E} - \frac{dN}{N+F} = -2D \cdot c \cdot dt,$$

Deze differentiaalvergelijking kunnen we oplossen:

$$\frac{N+E}{N+F} = P e^{-2D \cdot c \cdot t},$$

waarbij P een constante is.

We hebben nu voor N

$$N = \frac{F \cdot P e^{-2D \cdot c \cdot t} - E}{1 - P e^{-2D \cdot c \cdot t}} = \frac{-(C-D)P e^{-2D \cdot c \cdot t} + (C+D)}{1 - P e^{-2D \cdot c \cdot t}} = \frac{(C+D) - (C-D)P e^{-2D \cdot c \cdot t}}{1 - P e^{-2D \cdot c \cdot t}},$$

met

$$C + D = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + d - \frac{k}{c}\right) + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(1 + d - \frac{k}{c}\right)^2 - 4d},$$

$$C - D = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + d - \frac{k}{c}\right) - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(1 + d - \frac{k}{c}\right)^2 - 4d},$$

$$2 \cdot D = \sqrt{\left(1 + d - \frac{k}{c}\right)^2 - 4d}.$$

Met $t = 0 \rightarrow N = N(0)$ kunnen we P uitrekenen:

$$P = \frac{N(0) - (C + D)}{N(0) - (C - D)}.$$

Als we direct getallen gebruiken, krijgen we

$$\frac{dN}{N^2 - 0.9N + 0.4} = 0.25dt \rightarrow \frac{dN}{(N - 0.77)(N - 0.13)} = -0.25dt.$$

$$\frac{dN}{(N - 0.77)(N - 0.13)} \equiv \frac{dN}{0.64(N - 0.77)} - \frac{dN}{0.64(N - 0.13)} = -0.25dt.$$

$$\ln \frac{N - 0.77}{N - 0.13} = -0.16t + \text{const.}$$

$$\frac{N - 0.77}{N - 0.13} = P e^{-0.16t} \rightarrow N = \frac{0.77 - 0.13 P e^{-0.16t}}{1 - P e^{-0.16t}}.$$

Voor $t = 0 \rightarrow N = N(0)$:

$$N(0) = \frac{0.77 - 0.13P}{1 - P} \rightarrow P = \frac{N(0) - 0.77}{N(0) - 0.13}.$$

Terug naar de algemene formule

$$N = \frac{(C + D) - (C - D) P e^{-2D \cdot c \cdot t}}{1 - P e^{-2D \cdot c \cdot t}}.$$

$$\text{Met } t \rightarrow \infty \rightarrow N(t \rightarrow \infty) = C + D = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + d - \frac{k}{c}\right) + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(1 + d - \frac{k}{c}\right)^2 - 4d}.$$

- Korte handleiding VU-grafiek plus.

Dit programma is alleen te gebruiken als je gebruik kan maken van de schoollicentie.

Korte handleiding VU-grafiek plus

Open dit programma en kies voor differentiaalvergelijkingen.

Vervolgens moet je een differentiaalvergelijking invoeren

$$\frac{dy}{dt} = 0,1(y - d)(1 - y) \text{ voor de eerste waarde van } d.$$

Voor de t -as kies je de waarden 0 en 50 en voor de y -as kies je de waarden 0 en 2.

Dan verschijnt er een pijltje in beeld. Dat kun je helemaal rechts vervangen door een schuin streepje. Klik ook richtingsveld aan.

Ga nu staan op het punt $(0, N(0))$ als startpunt en druk op start (groene ►) (Het duurt wel even, maar uiteindelijk tekent VU-grafiek de oplossingskromme).

Als je goed kijkt dan zie je dat die kromme inderdaad in de punten waar die doorheen gaat, raakt aan die kleine stukjes raaklijn. Met de rode ● kun je het tekenen laten stoppen.

Een ander startpunt geeft dan een andere oplossingskromme.

Voor een andere waarde van d moet je kiezen voor d.v.. bij invoer.

Epiloog, Waarom de Samenvatting Online?

Deze samenvatting van Wiskunde D-Online VWO 4 heb ik gemaakt voor mijn kleindochter.

Waarom deze samenvatting online geplaatst?

Mijn kleindochter wilde voor haar Vwo-opleiding Wiskunde D als keuzevak. Helaas, haar school had Wiskunde D niet meer opgenomen in het lesprogramma.

Wat te doen?

Het bleek dat er meer scholen waren/zijn die Wiskunde D niet meer opgenomen hebben in het lesprogramma. Dit is aanleiding geweest om de Stichting Wiskunde D-Online op te zetten.

Om gebruik te kunnen maken van het Wiskunde D programma door leerlingen die toch Wiskunde D willen kiezen, dient een school zich aan te melden. (Het zal duidelijk zijn dat deze scholen hun leerlingen toch willen steunen.) Op deze wijze krijgen de scholen toegang tot het online-lesprogramma. Het lesmateriaal is samengesteld uit: PowerPoint presentaties, video's, boeken (De Wageningse Methode) met opgaven, antwoorden en toetsen. Daarnaast hebben de docenten van participerende scholen toegang tot het docentenmateriaal.

Zoals gezegd, de scholen die toch buiten het reguliere lesprogramma hun leerlingen willen faciliteren bij de Wiskunde D keuze moeten zich aanmelden. Tevens een docent ter beschikking stellen om de leerlingen te begeleiden bij de studie en het maken van opgaven. Toetsen kunnen ter beoordeling worden opgestuurd.

De school van mijn kleindochter wilde niet participeren en evenmin een docent ter beschikking stellen. Mijn kleindochter was de enige leerling met Wiskunde D keuze. Met als gevolg dat ik samen met mijn kleindochter Wiskunde D-Online heb gedaan.

Nu de reden dat ik de samenvatting online(www.leennoordzij.me) heb geplaatst:

het kan nog steeds zo zijn dat er leerlingen Wiskunde D kiezen zonder dat een school voor begeleiding zorg wil dragen. Door deze samenvattingen te publiceren hoop ik de belangstelling voor Wiskunde D te stimuleren.

Remark: To whom it concerns.

When reading the above text in your mother's tongue, the translation can sometimes be hilarious. In Dutch: "geluk". The meaning of this word in my text is the usual meaning: by chance, by coincidence or by good fortune. However, various translation programs come up with happiness. In my text, I am not involved with "happiness".

Obviously, it made me happy to support my granddaughter!

